



R. KRASNODĘBSKI (Wrocław)

## Niezmienniki różniczkowe krzywej w przestrzeni symplektycznej

Przedmiotem tej pracy jest wyznaczenie niezmienników różniczkowych krzywej  $2r$ -wymiarowej przestrzeni symplektycznej  $G_{2r}$ . W ustępie 1 wprowadzimy oznaczenia i definicje, którymi w dalszym ciągu będziemy się posługiwali, w ustępie 2 określimy łuk krzywej w przestrzeni  $G_{2r}$  oraz podamy metodę tworzenia niezmienników za pomocą pochodnych współrzędnych punktu krzywej. Ustęp 3 poświęcony jest dowodowi pewnego twierdzenia pomocniczego, a ustęp 4 wyznaczeniu niezmienników podstawowych, z których za pomocą różniczkowania względem łuku można otrzymać każdy niezmiennik krzywej. W ustępie 5 dowodzi się, że niezmienniki podstawowe określają krzywą.

1. Zakładamy, że przestrzeń  $G_{2r}$  odniesiona jest do układu symplektycznego, jej forma podstawowa ma więc postać

$$\Omega = \sum_{i=1}^r [x^i x^{r+i}].$$

Na symplektyczny iloczyn skalarny dwóch wektorów  $\mathfrak{B}_1(x_1^k), \mathfrak{B}_2(x_2^k)$  <sup>(1)</sup> mamy więc wzór

$$(1) \quad \Omega[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2] = \sum_{h=1}^r (x_1^h x_2^{r+h} - x_1^{r+h} x_2^h);$$

iloczyn ten jest niezmiennikiem pary wektorów  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$  względem przekształceń grupy symplektycznej  $Sp_{2r}$ . W dalszym ciągu iloczyn ten będziemy oznaczali symbolem  $\sum_{h=1}^r [x_1^h x_2^{r+h}]$ . Jeżeli w  $G_{2r}$  dana jest pewna rodzina wektorów, to ich iloczyny skalarne tworzą pełny układ niezmienników rodziny ([1], str. 118); jeżeli więc między wektorami dwóch rodzin można ustalić taką odpowiedniość, ażeby iloczyny skalarne odpowiadających

<sup>(1)</sup> Wskaźniki greckie przebiegają stale wartości od 1 do  $2r$ , a wskaźniki łacińskie od 1 do  $r$ .

par były równe, to te rodziny są równoważne względem przekształceń należących do grupy  $Sp_{2r}$ .

2. Niech będzie dana krzywa  $\mathfrak{R}\{x^\alpha(t)\}$  przestrzeni  $G_{2r}$ ; zakładamy, że funkcje  $x^\alpha(t)$  należą do klasy  $C^{2r+1}$  w pewnym przedziale  $(a, b)$  zmiennej  $t$ . Utwórzmy wyrażenie

$$\sum_{i=1}^r \left[ \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2 x^{r+i}}{dt^2} \right] = R(t).$$

Jeżeli w miejsce parametru  $t$  wprowadzimy nowy parametr  $s \doteq s(t)$ , to

$$\sum_{i=1}^r \left[ \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2 x^{r+i}}{dt^2} \right] = \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \sum_{i=1}^r \left[ \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2 x^{r+i}}{ds^2} \right].$$

Parametr  $s$  wybierzemy tak, by

$$(2) \quad \sum_{i=1}^r \left[ \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2 x^{r+i}}{ds^2} \right] = 1.$$

Wystarczy w tym celu przyjąć  $ds/dt = [R(t)]^{1/3}$ . Tak dobrany parametr będziemy nazywać *łukiem krzywej*  $\mathfrak{R}$ . Łuk krzywej możemy określić oczywiście tylko wtedy, gdy  $R(t) \neq 0$ . W dalszym ciągu, mówiąc o krzywych, będziemy zakładać, że ten warunek jest spełniony. Pochodną względem  $s$  będziemy oznaczali za pomocą kropki:  $x^\alpha = dx^\alpha/ds$ .

Z każdym punktem krzywej  $\mathfrak{R}(s)$  jest związany ciąg wektorów

$$(*) \quad \{x^\alpha\}, \{x^{\cdot\alpha}\}, \dots$$

Zgodnie z tym, co zostało powiedziane wyżej, jedynymi niezmiennikami układu ciągu tych wektorów są ich symplektyczne iloczyny skalarne. Aby utworzyć jakiś niezmiennik, wybieramy dwa różne wektory z ciągu (\*) i tworzymy ich iloczyn zgodnie ze wzorem (1). *Rzędem* niezmiennika będziemy nazywali najwyższy rząd pochodnej występującej w niezmienniku; tę pochodną będziemy pisali na drugim miejscu. Oznaczając niezmienniki rzędu  $k$  przez  $K_{h|k}$  ( $h < k$ ) mamy

$$(3) \quad K_{h|k} = \sum_{i=1}^r \left[ \frac{d^h x^i}{ds^h} \frac{d^k x^{r+i}}{ds^k} \right], \quad h = 1, 2, \dots, k-1.$$

Na przykład każda krzywa przestrzeni  $G_{2r}$  ma następujące niezmienniki rzędu trzeciego:

$$K_{1|3} = \sum_{i=1}^r [x^i x^{\cdot\cdot r+i}], \quad K_{2|3} = \sum_{i=1}^r [x^{\cdot\cdot i} x^{\cdot\cdot r+i}].$$

Z równości (2) wynika, że niezmiennik  $K_{1|2}$  ma wartość 1. Jeżeli tę równość zróżniczkujemy, otrzymamy  $K_{1|3} = 0$ .

Jest oczywiste, że niezmienniki, w których występują pochodne różnych rzędów, są algebraicznie niezależne. Łatwo jednak zauważyć, że niektóre niezmienniki są pochodnymi innych, na przykład  $K_{2|4} = K_{2|3}$ .

3. Powstaje pytanie, czy wśród niezmienników  $K_{h|k}$  istnieje skończony układ niezmienników, z których za pomocą różniczkowania i operacji algebraicznych można otrzymać wszystkie inne. Pozytywna odpowiedź na to pytanie jest zawarta w twierdzeniu II. Na razie udowodnimy twierdzenie następujące:

**TWIERDZENIE I.** *Niezmienniki różniczkowe  $K_{h|k}$  ( $k \geq 3$ ) określone wzorem (3) krzywej  $\mathbb{R}(s)$  w przestrzeni symplektycznej  $G_{2r}$  wyrażają się za pomocą niezmienników  $K_{q-1|q}$  ( $q < k$ ) i ich pochodnych wzorem*

$$(4) \quad K_{h|k} = \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \binom{k-h-p}{p-1} K_{h+p-1|h+p}^{(k-h-2p+1)},$$

$$m = \left[ \frac{k-h+1}{2} \right], \quad h = 1, 2, \dots, k-1,$$

gdzie  $(k-h-2p+1)$  oznacza rząd pochodnej.

Uwaga. Rząd pochodnej jest co najmniej równy zeru. Istotnie, przy ustalonych wskaźnikach  $h$  i  $k$  wartość  $k-h-2p+1$  jest największa, gdy  $p = m$ . Łatwym rachunkiem można sprawdzić, że jeżeli różnica  $k-h$  jest liczbą parzystą, to  $k-h-2m+1 = 1$ , a jeżeli jest nieparzystą, to  $k-h-2m+1 = 0$ .

Wzór (4) udowodnimy indukcyjnie. Bezpośrednim rachunkiem łatwo sprawdzić, że jest on prawdziwy dla  $k = 3$ . Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla pewnego  $k$ ; udowodnimy, że niezmiennik rzędu  $k+1$  wyraża się wzorem

$$(5) \quad K_{h|k+1} = \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \binom{k-h-p+1}{p-1} K_{h+p-1|k+1}^{(k-h-2p+2)},$$

$$m = \left[ \frac{k-h+2}{2} \right], \quad h = 1, 2, \dots, k,$$

który otrzymuje się z (4) zamieniając w tym ostatnim  $k$  na  $k+1$ .

Obliczmy pochodną niezmiennika  $K_{h|k}$ . Jest  $K_{h|k} = K_{h+1|k} + K_{h|k+1}$ , czyli

$$(6) \quad K_{h|k+1} = K_{k|h} - K_{h+1|k}.$$

W przypadku gdy  $h+1 = k$ , jest  $K_{h+1|k} = 0$ ; wynika to z definicji niezmiennika  $K_{k|h}$  i jest zgodne ze wzorem (4). Z drugiej strony, obliczając pochodną

z prawej strony wzoru (4) mamy

$$(7) \quad K_{h|k} = \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \binom{k-h-p}{p-1} K_{h+p-1|h+p}^{(k-h-2p+2)},$$

$$m = \left\lfloor \frac{k-h+1}{2} \right\rfloor, \quad h = 1, 2, \dots, k-1,$$

natomiast

$$(8) \quad K_{h+1|k} = \sum_{p_1=1}^{m_1} (-1)^{p_1-1} \binom{k-h-p_1-1}{p_1-1} K_{h+p_1|h+p_1+1}^{(k-h-2p_1)},$$

$$m_1 = \left\lfloor \frac{k-h}{2} \right\rfloor, \quad h = 1, 2, \dots, k-1.$$

Dokonując podstawienia  $p_1 = p-1$ , możemy wzór (8) napisać inaczej, a mianowicie

$$(9) \quad K_{h+1|k} = \sum_{p=2}^{m_1+1} (-1)^p \binom{k-h-p}{p-2} K_{h+p-1|h+p}^{(k-h-2p+2)}.$$

Rozważymy dwa przypadki.

Przypadek 1. Liczba  $k-h$  jest parzysta. W tym przypadku  $m = m_1$ . Mamy więc, na mocy (7) i (9),

$$\begin{aligned} K_{h|k} - K_{h+1|k} &= \\ &= \binom{k-h-1}{0} K_{h|h+1}^{(k-h)} + \sum_{p=2}^m (-1)^{p-1} \left[ \binom{k-h-p}{p-1} + \binom{k-h-p}{p-2} \right] K_{h+p-1|h+p}^{(k-h-2p+2)} + \\ &\quad + (-1)^m \binom{k-h-m-1}{m-1} K_{h+m|h+m+1}^{(k-h-2m)} = \\ &= \sum_{p=1}^{m_2} (-1)^{p-1} \binom{k-h-p+1}{p-1} K_{h+p-1|h+p}^{(k-h-2p+2)}, \quad m_2 = m+1 = \left\lfloor \frac{k-h+2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z następującego znanego wzoru:

$$\binom{k-h-p}{p-1} + \binom{k-h-p}{p-2} = \binom{k-h-p+1}{p-1}$$

oraz z tego, że

$$\binom{k-h-m-1}{m-1} = \binom{k-h-m}{m} = 1,$$

albowiem  $k-h = 2m$ .

Przypadek 2. Liczba  $k-h$  jest nieparzysta. W tym przypadku  $m_1 = m-1$ . Mamy więc z (7) i (9):

$$\begin{aligned} K_{h|k} - K_{h+1|k} &= \\ &= \binom{k-h-1}{0} K_{h|h+1}^{(k-h)} + \sum_{p=2}^m (-1)^{p-1} \left[ \binom{k-h-p}{p-1} + \binom{k-h-p}{p-2} \right] K_{h+p-1|h+p}^{(k-h-2p+2)} = \\ &= \sum_{p=1}^m (-1)^{p-1} \binom{k-h-p+1}{p-1} K_{h+p-1|h+p}^{(k-h-2p+2)}, \quad m = m_1 + 1 = \left\lfloor \frac{k-h+2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

W obu przypadkach wzór (5) jest prawdziwy na mocy (6). Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

4. Podstawowymi niezmiennikami różniczkowymi krzywej nazywamy takie niezmienniki, z których za pomocą różniczkowania i operacji algebraicznych można otrzymać wszystkie inne niezmienniki różniczkowe. Niezmienników podstawowych wystarczy oczywiście szukać wśród niezmienników  $K_{q-1|q}$ . Zachodzi pytanie, jaki jest najwyższy rząd  $q$  niezmienników podstawowych. Odpowiedź na to pytanie jest sformułowana na końcu niniejszej pracy jako twierdzenie II.

Oprócz niezmienników  $K_{h|k}$  dogodnie jest wprowadzić niezmiennik rzędu  $2r$ . Utwórzmy macierz

$$D = \left\| \begin{array}{c|c} dx^1 & \dots & dx^r & dx^{r+1} & \dots & dx^{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^r x^1 & \dots & d^r x^r & d^r x^{r+1} & \dots & d^r x^{2r} \\ \hline d^{r+1} x^1 & \dots & d^{r+1} x^r & d^{r+1} x^{r+1} & \dots & d^{r+1} x^{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{2r} x^1 & \dots & d^{2r} x^r & d^{2r} x^{r+1} & \dots & d^{2r} x^{2r} \end{array} \right\|,$$

gdzie zamiast pochodnych  $d^i x^j / ds^j$ , dla uproszczenia, zostały napisane różniczki  $d^i x^j$ . Macierzą z nią sprzężoną ([1], str. 79) jest macierz

$$\tilde{D} = \left\| \begin{array}{c|c} d^{r+1} x^{r+1} & \dots & d^{r+1} x^{2r} & -d^{r+1} x^1 & \dots & -d^{r+1} x^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{2r} x^{r+1} & \dots & d^{2r} x^{2r} & -d^{2r} x^1 & \dots & -d^{2r} x^r \\ \hline dx^{r+1} & \dots & dx^{2r} & -dx^1 & \dots & -dx^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^r x^{r+1} & \dots & d^r x^{2r} & -d^r x^1 & \dots & -d^r x^r \end{array} \right\|.$$

Wyznaczniki obu macierzy są sobie równe. Oznaczmy wspólną ich wartość przez  $\Delta$ . Jeżeli wykonamy mnożenie wierszami macierzy  $D$  i  $\tilde{D}$ , to wyznacznik iloczynu jest

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} K_{1|r+1} & K_{1|r+2} & \dots & K_{1|2r} & 0 & K_{1|2} & \dots & K_{1|r-1} & K_{1|r} \\ K_{2|r+1} & K_{2|r+2} & \dots & K_{2|2r} & -K_{1|2} & 0 & \dots & K_{2|r-1} & K_{2|r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{r|r+1} & K_{r|r+2} & \dots & K_{r|2r} & -K_{1|r} & -K_{2|r} & \dots & -K_{r-1|r} & 0 \\ 0 & K_{r+1|r+2} & \dots & K_{r+1|2r} & -K_{1|r+1} & -K_{2|r+1} & \dots & -K_{r-1|r+1} & -K_{r|r+1} \\ -K_{r+1|r+2} & 0 & \dots & K_{r+2|2r} & -K_{1|r+2} & -K_{2|r+2} & \dots & -K_{r-1|r+2} & -K_{r|r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -K_{r+1|2r} & -K_{r+2|2r} & \dots & 0 & -K_{1|2r} & -K_{2|2r} & \dots & -K_{r-1|2r} & -K_{r|2r} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik  $\Delta^2$  jest niezmiennikiem rzędu  $2r$ , o którym wspomnieliśmy wyżej.

Oprócz wymienionych poprzednio niezmienników będziemy rozważali także niezmienniki utworzone z wyznaczników stopnia  $2r$  macierzy

$$M(p) = \begin{vmatrix} dx^1 & \dots & dx^r & dx^{r+1} & \dots & dx^{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{2r}x^1 & \dots & d^{2r}x^r & d^{2r}x^{r+1} & \dots & d^{2r}x^{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{2r+p}x^1 & \dots & d^{2r+p}x^r & d^{2r+p}x^{r+1} & \dots & d^{2r+p}x^{2r} \end{vmatrix},$$

gdzie, jak poprzednio, pochodne zastąpiono różniczkami. Dla utworzonych w ten sposób niezmienników rzędu  $2r+1$  z macierzy  $M(1)$  przyjmujemy oznaczenia:  $\Delta_q$  ( $q = 1, 2, \dots, 2r$ ), gdzie  $q$  wskazuje na pominięcie  $q$ -tego wiersza w  $M(1)$ .

Przy założeniu, że  $\Delta \neq 0$ , pochodne rzędu  $2r+1$  współrzędnych punktu krzywej możemy wyrazić za pomocą pochodnych początkowych  $2r$  rzędów, a mianowicie:

$$(10) \quad \frac{d^{2r+1}x^e}{ds^{2r+1}} = t_1 \frac{dx^e}{ds} + t_2 \frac{d^2x^e}{ds^2} + \dots + t_{2r} \frac{d^{2r}x^e}{ds^{2r}}, \quad e = 1, 2, \dots, 2r.$$

Niezmienniki  $K_{h|2r+1}$  wyrażają się wzorami

$$K_{h|2r+1} = \sum_{i=1}^r \left[ \frac{d^h x^i}{ds^h} \frac{d^{2r+1} x^{r+i}}{ds^{2r+1}} \right], \quad h = 1, 2, \dots, 2r.$$

Jeżeli do tych wzorów wstawimy (10), otrzymamy niejednorodny układ



5. Udowodnimy, że niezmienniki podstawowe określają krzywą w  $G_{2r}$  z dokładnością do przekształceń grupy symplektycznej i translacji.

Niech będą dane niezmienniki podstawowe jako funkcje łuku  $s$  krzywej  $\mathcal{R}$

$$(13) \quad K_{1|2} = 1, K_{2|3}, \dots, K_{2r|2r+1}.$$

Układ równań różniczkowych

$$\frac{d^{2r+1}x^e}{ds^{2r+1}} = t_1 \frac{dx^e}{ds} + t_2 \frac{d^2x^e}{ds^2} + \dots + t_{2r} \frac{d^{2r}x^e}{ds^{2r}}$$

jest jednorodnym układem równań liniowych, w którym  $t$  są znanymi funkcjami niezmienników (13). Niech w ustalonym punkcie  $P$  będzie  $s = 0$ . Przez punkt  $P$  przechodzi nieskończenie wiele krzywych zależnych od dowolnych stałych  $c_\sigma^e$ , a mianowicie

$$(14) \quad x^e = x^e(s, c_1^e, c_2^e, \dots, c_{2r}^e).$$

Obierzmy wartości początkowe

$$\left( \frac{\partial^\sigma x^e}{\partial s^\sigma} \right)_{s=0} = a_\sigma^e$$

tak, by były spełnione następujące związki:

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{2r} [a_\alpha^i a_\beta^{r+i}] = K_{\alpha\beta}^0,$$

gdzie  $K_{\alpha\beta}^0$  oznaczają wartości niezmienników  $K_{\alpha\beta}$  w punkcie  $P$ , a  $a_\sigma^e$  są składowymi pewnych wektorów  $A_\alpha$ .

W układzie (15) występują wszystkie niezmienniki do rzędu  $2r$ ; na mocy twierdzenia I wyrażają się one za pomocą niezmienników podstawowych do rzędu  $2r$ . Niezmienniki rzędu  $2r+1$  występują we współczynnikach  $t_\sigma$  równań (10).

Niech w ustalonym punkcie  $Q$  drugiej krzywej będzie  $s = 0$ ; w punkcie  $Q$  obierzmy wartości początkowe

$$\left( \frac{\partial^\sigma x^e}{\partial s^\sigma} \right)_{s=0} = \bar{a}_\sigma^e$$

tak, by

$$(16) \quad \sum_{i=1}^{2r} [\bar{a}_\alpha^i \bar{a}_\beta^{r+i}] = K_{\alpha\beta}^0.$$

$\bar{a}_\sigma^e$  są składowymi pewnych wektorów  $\bar{A}_\alpha$ .

Z (15) i (16) wynika, że

$$\Omega[A_\alpha A_\beta] = \Omega[\bar{A}_\alpha \bar{A}_\beta].$$

Układ niezależnych wektorów  $A_a$  można więc przekształcić w układ wektorów  $\bar{A}_a$  za pomocą podstawienia symplektycznego i translacji. Stąd i z jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego wynika, że dwie krzywe określone równaniami (14) — jedna o wartościach początkowych  $a_a^e$ , druga o wartościach początkowych  $\bar{a}_a^e$  — są nakładalne.

**Praca cytowana**

[1] W. Ślebodziński, *Formes extérieures et leurs applications*, vol. I, Warszawa 1954.

P. KRASNOДЕМСКИЙ (Вроцлав)

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ КРИВОЙ  
В СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**РЕЗЮМЕ**

В статье найдены дифференциальные инварианты кривой в  $2r$ -мерном симплектическом пространстве  $G_{2r}$ . Пространство  $G_{2r}$  отнесено к симплектическому реперу, т. е. его фундаментальная форма имеет вид

$$\Omega = \sum_{i=1}^r [x^i x^{r+i}].$$

Вектор  $\{x^a(s)\}$  описывает кривую  $\mathfrak{K}(s)$ . Параметр  $s$  выбран так, чтобы было исполнено (2). Этот параметр называется дугой кривой  $\mathfrak{K}$ . С каждым пунктом кривой можно связать последовательность векторов  $\{dx^a/ds\}, \{d^2x^a/ds^2\}, \dots$ . Формулы (3) показывают, как строятся дифференциальные инварианты кривой.

**ТЕОРЕМА I.** Дифференциальные инварианты  $K_{h|k}$  ( $k \geq 3$ ) кривой  $\mathfrak{K}(s)$  выражаются через инварианты  $K_{q-1|q}$  ( $q < k$ ) и их производные формулой (4), причем  $k-h-2p+1$  степень производной.

Фундаментальными дифференциальными инвариантами кривой называются такие дифференциальные инварианты, из которых, при помощи дифференцирования и алгебраических операций, можно получить все другие инварианты.

**ТЕОРЕМА II.** Кривая  $\mathfrak{K}(s)$  имеет  $2r-1$  фундаментальных дифференциальных инвариантов  $K_{q-1|q}$ ,  $q = 3, 4, \dots, 2r+1$ .

Фундаментальные инварианты определяют кривую с точностью до преобразований группы симплектической и трансляции.

R. KRASNOДЕМСKI (Wrocław)

**THE DIFFERENTIAL INVARIANTS OF THE CURVE IN SYMPLECTIC SPACE**

**SUMMARY**

The aim of this paper is to find the differential invariants of a curve in  $2r$ -dimensional symplectic space  $G_{2r}$ . The space  $G_{2r}$  is related to repere symplectic. Thus its fundamental form has the shape

$$\Omega = \sum_{i=1}^r [x^i x^{r+i}].$$

The vector  $\{x^a(s)\}$  describes a curve  $\mathfrak{K}(s)$ . The parameter  $s$  is chosen in such a way as to fulfil (2). Such a parameter is called the *arc* of the curve. With every point of the curve a sequence of vectors  $\{dx^a/ds\}, \{d^2x^a/ds^2\}, \dots$  is bound. The expressions (3) are the differential invariants of the curve.

**THEOREM I.** *The differential invariants  $K_{hk}$  ( $k \geq 3$ ) of the curve  $\mathfrak{K}(s)$  are expressed by the differential invariants  $K_{q-1|q}$  ( $q < k$ ) and their derivatives by (4) where  $k-h-2p+1$  denotes the degree of derivatives.*

*The fundamental differential invariants of the curve* are what we call those invariants from which with the aid of differentiation and algebraical operations we can obtain all other differential invariants.

**THEOREM II.** *The curve  $\mathfrak{K}(s)$  has  $2r-1$  fundamental differential invariants  $K_{q-1|q}$ ,  $q = 3, 4, \dots, 2r+1$ .*

Two curves with the same differential invariants can be covered by transformation of symplectic group and translation.