cm ptm 1955

R. WILNIEWCZYC (Wrocław)

Geometria grupy przekształceń afinicznych zachowujących parabolę

Wiadomo, że geometrię płaszczyzny Łobaczewskiego a w szczególności jej metrykę można rozwinąć w następujący sposób: Na płaszczyźnie rzutowej obieramy rzeczywistą właściwą stożkową S i ograniczamy grupę rzutową do jej podgrupy złożonej z przekształceń zachowujących stożkową S. Teoria niezmienników tej grupy tworów geometrycznych leżących wewnątrz stożkowej stanowi istotną treść geometrii Łobaczewskiego. Jeżeli zażądamy, żeby przekształcenia rzutowe zachowywały nie tylko stożkową S, ale także pewien jej punkt A, otrzymamy jeszcze węższą grupę, którą w dalszym ciągu oznaczać będziemy literą G. Geometria wnętrza stożkowej S, oparta na tej grupie, jest tematem niniejszej pracy.

Zauważmy, że przekształcenia grupy G zachowują nie tylko stożkową S i punkt A, ale także styczną t do S w punkcie A. Grupa G jest więc podgrupą grupy afinicznej. Jeżeli styczną t przyjmiemy za prostą w nieskończoności, to płaszczyzna rzutowa przejdzie w afiniczną, a stożkowa S w parabolę; dobierając odpowiednio układ współrzędnych możemy ją przedstawić równaniem $y = \frac{1}{2}x^2$. Parabolę tę nazywać będziemy *parabolą absolutną* albo *absolutem* badanej geometrii.

W § 1 wyznaczymy przekształcenia grupy G oraz najważniejsze ich własności. W następnym paragrafie określimy pojęcie miary łuku krzywej i jej krzywizny; wyznaczymy tu także krzywe o stałej krzywiźnie. Dalszy ciąg poświęcony jest równaniu naturalnemu krzywej (§ 3) oraz miarom pola i kąta (§ 4).

§ 1. Grupa G

1. Weźmy pod uwagę grupę przekształceń afinicznych

$$\bar{x} = a_1x+a_2y+a,\quad \bar{y} = b_1x+b_2y+b, \qquad \text{gdzie} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

i zażądajmy, by te przekształcenia zachowywały parabolę

$$\bar{x}^2-2\bar{y} = 0. \tag{2}$$

Podstawiając wyrażenia na $\bar{x}$ i $\bar{y}$ ze związków (1) do równania (2), otrzymamy po prostych przekształceniach warunki

$$a_2 = 0, \qquad b_2 = a_1^2, \qquad b_1 = a_1 a, \qquad b = \tfrac{1}{2}a_1^2.$$

Wszystkie współczynniki wyrażają się więc przez dwa parametry a_1 i a. Oznaczając dla przejrzystości parametry a_1 i a odpowiednio przez λ i k dostaniemy

$$(3) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x + k, \\ \bar{y} &= k\lambda x + \lambda^2 y + \tfrac{1}{2}k^2, \end{aligned} \qquad \text{gdzie} \quad \lambda \neq 0.$$

Przekształcenie tożsamościowe mamy dla $\lambda = 1$, $k = 0$; zatem, jeśli grupa G ma być ciągła, musimy przyjąć $\lambda > 0$. Podgrupa G jest więc rzędu drugiego.

Zauważmy, że grupa G nie zawiera wcale translacji i zachowuje rodzinę prostych $x = c$.

2. Jeśli punkt lub krzywą poddamy transformacji (3), to otrzymamy punkt odwzorowany lub krzywą odwzorowaną. To odwzorowanie nazwijmy *ruchem*. Krzywa poddana ruchowi przechodzi w krzywą kongruentną. Możemy powiedzieć, że na gruncie badanej geometrii jest to ta sama krzywa, lecz w innym położeniu.

Zbadajmy, czy za pomocą przekształcenia (3) da się przeprowadzić dowolny punkt płaszczyzny w każdy inny punkt płaszczyzny, czyli czy grupa (3) jest przechodnia względem punktów.

Niech będą dane dwa punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Wyznaczymy transformację przeprowadzającą pierwszy punkt w drugi oraz określimy warunki, przy których taka transformacja istnieje.

W tym celu ze związków (3) obliczamy λ i k:

$$\lambda = \sqrt{(\bar{x}_1^2 - 2\bar{y}_1)/(x_1^2 - 2y_1)}, \qquad k = \bar{x}_1 - x_1\sqrt{(\bar{x}_1^2 - 2\bar{y}_1)/(x_1^2 - 2y_1)}.$$

Ze względu na to, że badania przeprowadzamy w dziedzinie rzeczywistej, jako warunek istnienia transformacji przeprowadzającej punkt $A(x_1, y_1)$ w punkt $B(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ dostajemy równość znaku wyrażenia $x^2 - 2y$ dla punktu A i dla punktu B. Wyrażenie to jest równe zeru dla punktów paraboli absolutnej, wewnątrz niej jest ujemne, zewnątrz dodatnie.

Parabola absolutna dzieli płaszczyznę na dwa obszary: wnętrze paraboli i zewnętrze. W każdym z tych obszarów z osobna grupa jest przechodnia względem punktów. Natomiast nie istnieje transformacja przeprowadzająca punkt jednego obszaru w punkt drugiego.

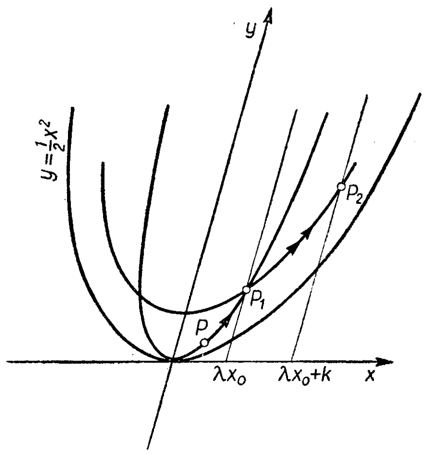
W dalszym ciągu ograniczamy się do wnętrza paraboli absolutnej; dla każdego punktu (x, y) tego obszaru jest $x^2 - 2y < 0$.

3. Dla wyznaczenia właściwych punktów stałych przekształcenia (3) ustalmy λ, k i zażądajmy, by punkt (x, y) przechodził w siebie; otrzymamy

$$x_0 = k/(1-\lambda), \quad y_0 = \tfrac{1}{2}(k/(1-\lambda))^2.$$

Dla transformacji o ustalonych parametrach λ, k (gdzie $\lambda \neq 1$) istnieje jeden i tylko jeden właściwy punkt stały; leży on na paraboli absolutnej i ma odciętą $x_0 = k/(1-\lambda)$. Punkt ten jest punk temstałym nie tylko tej jednej transformacji, lecz całej podgrupy przekształceń spełniających warunek

(4) $$k/(1-\lambda) = x_0.$$



Rys. 1

Przekształcenia spełniające warunek (4) tworzą pewną podgrupę grupy G; podgrupa ta zachowuje rodzinę prostych o równaniu $y = x_0 x + c$. Jeżeli $k = 0$, to $x_0 = 0$, a przekształcenie (3) przybiera postać

(T$_1$) $$\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{y} = \lambda^2 y.$$

Przekształcenia (T$_1$) tworzą jednoparametrową grupę g_1 ruchów zachowujących punkt O paraboli absolutnej. Trajektoriami punktów podczas ruchów tej podgrupy są parabole styczne do paraboli absolutnej w początku układu i mające wspólny z nią kierunek średnic.

Jeżeli we wzorach (3) przyjmiemy $\lambda = 1$:

(T$_2$) $$\bar{x} = x+k, \quad \bar{y} = kx+y+\tfrac{1}{2}k^2,$$

otrzymamy przekształcenia drugiej jednoparametrowej podgrupy g_2. Trajektoriami punktów podczas ruchów tej podgrupy są parabole, które otrzymuje się z paraboli absolutnej poddając ją translacji w kierunku osi y.

Ponieważ każde przekształcenie grupy G otrzymuje się jako iloczyn przekształceń podgrupy g_1 i podgrupy g_2, przeto położenie, w które przechodzi punkt $P(x_0, y_0)$ przez transformację (3), możemy otrzymać za pomocą następującej konstrukcji (rys. 1): Przez punkt P i początek układu kreślimy parabolę, której osią jest oś y, oraz prostą $x = \lambda x_0$. Punkt przecięcia się tej paraboli z prostą oznaczmy przez P_1 (wyznacza on położenie punktu P po transformacji (T_1)). Przez punkt P_1 prowadzimy parabolę równoległą do paraboli absolutnej oraz prostą $x = \lambda x_0 + k$. Punkt ich przecięcia się P_2 wyznacza położenie punktu P po transformacji (3).

§ 2. Element łuku i krzywizna krzywej

4. Załóżmy, że krzywa K dana jest równaniem $y = y(x)$, gdzie $y(x)$ jest funkcją klasy C^1; będziemy poszukiwali niezmiennika różniczkowego tej krzywej kształtu $F(x,y)dx$ dla grupy G.

Ze związków (3) wynika, że

$$d\bar{x} = \lambda\,dx, \qquad \lambda = \sqrt{(\bar{x}^2-2\bar{y})/(x^2-2y)},$$

a stąd

$$d\bar{x}/\sqrt{2\bar{y}-\bar{x}^2} = dx/\sqrt{2y-x^2}.$$

Otrzymaliśmy niezmiennik różniczkowy, który nazwiemy *elementem łuku* krzywej:

$$ds = dx/\sqrt{2y-x^2}.$$

Długość łuku krzywej K obliczać będziemy z wzoru

$$s = \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{2y-x^2})^{-1}dx.$$

Będziemy z kolei szukali niezmiennika krzywej kształtu $F_1(x,y,y')$. Przedłużamy w tym celu przekształcenie (3) na pochodną y', a mianowicie

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x + k, \\ \bar{y} &= k\lambda x + \lambda^2 y + \tfrac{1}{2}k^2, \qquad (5) \\ \bar{y}' &= \lambda y' + k. \end{aligned}$$

Jest to grupa przekształceń trójek (x,y,y'), które nazywać będziemy *współrzędnymi* elementu liniowego złożonego z punktu (x,y) i z prostej o kierunku y', przechodzącej przez ten punkt; oznaczmy ten element literą e.

Wyznaczmy transformacje infinitezymalne tak przedłużonej grupy.

Przy transformacji tożsamościowej $\lambda = 1$, $k = 0$ element e przejdzie w siebie; nadając parametrom przyrosty $\delta\lambda$ i δk otrzymamy transformację o parametrach $1+\delta\lambda$, δk, która element e przeprowadza w nieskończenie bliski mu element $\bar{e}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1+\delta\lambda)x + \delta k, \\ \bar{y} &= \delta k(1+\delta\lambda)x + (1+\delta\lambda)^2 y + \tfrac{1}{2}\delta k^2, \\ \bar{y}' &= (1+\delta\lambda)y' + \delta k; \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned} \bar{x}-x &= x\delta\lambda + \delta k, \\ \bar{y}-y &= 2y\delta\lambda + x\delta k + y\delta\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\delta k^2 + x\delta k\delta\lambda, \\ \bar{y}'-y' &= y'\delta\lambda + \delta k. \end{aligned}$$

Pomijając nieskończenie małe przyrosty parametrów wyższych rzędów dostajemy transformację infinitezymalną

$$\delta x = x\delta\lambda + \delta k,$$
$$\delta y = 2y\delta\lambda + x\delta k,$$
$$\delta y' = y'\delta\lambda + \delta k,$$

gdzie $\delta x = \bar{x} - x$, $\delta y = \bar{y} - y$, $\delta y' = \bar{y}' - y'$.

Dla napisania transformacji infinitezymalnych grupy w postaci liniowych operatorów różniczkowych weźmy funkcję różniczkowalną trzech zmiennych $f(x, y, y')$ i wyznaczmy jej różniczkę zupełną

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'.$$

Jeżeli różniczki δx, δy, $\delta y'$ zastąpimy wyrażeniami określonymi z ostatnich wzorów, to otrzymamy

$$\delta f = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta\lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta k.$$

Transformacje infinitezymalne grupy w postaci operatorów różniczkowych mają więc kształt

$$X_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Jeśli funkcja $f(x, y, y')$ jest niezmiennikiem przekształceń grupy (5), to jej różniczka zupełna powinna być tożsamościowo zerem przy wszelkich przyrostach parametrów λ i k, musi więc być

$$X_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

(6)

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Otrzymaliśmy układ dwóch równań różniczkowych liniowych jednorodnych o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Układ ten, jak wynika z ogólnej teorii Liego i jak łatwo zresztą sprawdzić bezpośrednio, jest układem zupełnym, ma więc tylko jedno rozwiązanie niezależne.

Napiszmy układ równań różniczkowych zwyczajnych odpowiadający drugiemu z równań (6)

$$dx = dy/x = dy'.$$

Całki pierwsze tego układu są x^2-2y, $x-y'$. Całka układu (6) musi więc być funkcją postaci $\Phi(u,v)$, gdzie $u = x^2-2y$, $v = x-y'$. Obliczmy pochodne funkcji Φ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y'} = -\frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Jeżeli te wyrażenia podstawimy do pierwszego z równań (6), otrzymamy

$$2(x^2-2y)\partial\Phi/\partial u+(x-y')\partial\Phi/\partial v = 0,$$

czyli

$$2u\frac{\partial\Phi}{\partial u}+v\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0.$$

Całką tego równania jest funkcja $v/\sqrt{u}$, a więc całką układu (6) jest $(x-y')/\sqrt{2y-x^2}$. W ten sposób dostajemy niezmiennik grupy przekształceń (5), którego bezwzględną wartość nazwijmy *krzywizną krzywej* i oznaczmy literą K:

(7) $$K = |x-y'|/\sqrt{2y-x^2}.$$

Warto zauważyć, że wtedy krzywizna prostej o równaniu $y = mx+n$ nie jest stała.

5. Przyjmując $K = 0$ w równaniu (7), wyznaczamy krzywe o krzywiźnie równej 0. Jest to jednoparametrowa rodzina przystających parabol $y = \frac{1}{2}x^2+c$, gdzie $c \neq 0$. Krzywe o stałej krzywiźnie K różnej od zera określa równanie różniczkowe

$$(x-y')/\sqrt{2y-x^2} = K.$$

Stąd

(8) $$y = \tfrac{1}{2}(1+K^2)x^2+K^2cx+\tfrac{1}{2}K^2c^2.$$

Są to parabole styczne do paraboli absolutnej w punkcie właściwym $(-c, \frac{1}{2}c^2)$, leżącym na paraboli absolutnej, i w punkcie w nieskończoności. Parabole te są przystające.

Jeśli krzywizna paraboli $y = \frac{1}{2}px^2+qx+r$ jest stała, to współczynnik p jest niezmiennikiem przekształceń (3) i jego treść geometryczną określa równość $p = 1+K^2$.

Biorąc transformację (3), gdzie $k = -c$, przenosimy parabolę (7) do położenia, w którym jej równanie ma kształt

(9) $$y = \tfrac{1}{2}(1+K^2)x^2.$$

To równanie nazwijmy *równaniem kanonicznym* paraboli o stałej krzywiźnie $K \neq 0$.

6. Pisząc równanie kanoniczne (9) paraboli o stałej krzywiźnie K w postaci $y/x^2 = \frac{1}{2}(1+K^2)$ widzimy, że stosunek y/x^2 jest stały dla każdego punktu tej paraboli.

Wyraźmy krzywiznę jako funkcję tego stosunku:

$$K = \sqrt{2y/x^2-1}.$$

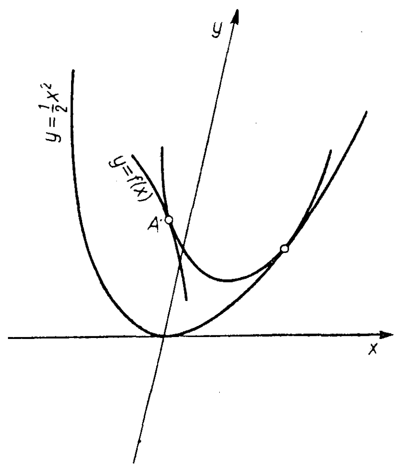
WNIOSEK. *Jeżeli weźmiemy parabolę o stałej krzywiźnie w układzie, którego początek leży na tej paraboli, a osiami są jej styczna i średnica, to krzywizna oznacza funkcję $\sqrt{2\tau-1}$, której argumentem τ jest stały dla danej paraboli stosunek rzędnej do kwadratu odciętej dowolnego punktu tej paraboli (pomijając punkt leżący w początku układu).*

TWIERDZENIE 1. *Jeśli $y = f(x)$ przedstawia krzywą przechodzącą przez punkt $A(x_0, y_0)$, funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu A i ma w tym punkcie krzywiznę równą K_0, to istnieje jedna i tylko jedna parabola o stałej krzywiźnie równej K_0, przechodząca przez punkt A i styczna w tym punkcie do krzywej* (rys. 2).

Dowód. Jeśli $K_0 = 0$, to przez punkt A przechodzi parabola o krzywiźnie zero

$$y = \tfrac{1}{2}x^2+(y_0-\tfrac{1}{2}x_0^2),$$

której styczna, podobnie jak styczna do krzywej $y = f(x)$, ma w punkcie A współczynnik kierunkowy równy x_0.



Rys. 2

Załóżmy teraz, że $K_0 \neq 0$, i wyznaczmy parabolę o stałej krzywiźnie K_0, przechodzącą przez punkt $A(x_0, y_0)$; wstawiając do równania (8) współrzędne punktu A, dostaniemy

$$C_{1,2} = -x_0 \pm \frac{1}{K_0}\sqrt{2y_0-x_0^2}.$$

Z tych dwóch parabol tylko parabola o parametrze C_2 jest styczna do krzywej w punkcie A, c. b. d. o.

Udowodnione twierdzenie pozwala sformułować następujący

WNIOSEK. *Krzywizna krzywej w danym jej punkcie (x, y) jest równa wyrażeniu $\sqrt{2y_0/x_0^2-1}$, gdzie x_0, y_0 są współrzędnymi punktu (x, y) w układzie, którego początek leży w punkcie styczności paraboli absolutnej z parabolą o stałej krzywiźnie, styczną w punkcie (x, y) do krzywej.*

Zauważmy jeszcze, że krzywizna krzywej w punkcie (x, y):

$$K = |x-y'|/\sqrt{2y-x^2},$$

wyraża się wyłącznie przez współrzędne punktu (x, y) oraz pierwszą pochodną y. Wynika stąd, że krzywe styczne do siebie w punkcie (x, y) mają w tym punkcie jednakową krzywiznę.

7. Mając element łuku wyznaczamy długość łuku paraboli o krzywiźnie zero $y = \frac{1}{2}x^2 + c$, $c \neq 0$:

$$s - s_0 = \frac{1}{\sqrt{2c}}(x - x_0).$$

Z tego wzoru wynikają następujące wnioski:

Na paraboli o krzywiźnie zero długości łuków są równe, jeśli różnice odciętych końców są równe.

Na różnych parabolach o krzywiźnie zero długości łuków, dla których różnice odciętych końców są równe, są proporcjonalne.

Na paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ *długość łuku mierzy się różnicą odciętych jego końców.*

8. Podgrupa, określona warunkiem $k/(1-\lambda) = \text{const}$, zachowuje punkt na krzywej absolutnej o odciętej $k/(1-\lambda)$. Parabole o stałej krzywiźnie przechodzące przez ten punkt są krzywymi niezmiennymi. Tworzą one pęk parabol niezmiennych.

TWIERDZENIE 2. *Styczne, poprowadzone do parabol pęku parabol niezmiennych w punktach ich przecięcia z prostą przechodzącą przez wierzchołek pęku, są do siebie równoległe.*

Twierdzenie dowodzimy prostym rachunkiem.

§ 3. Równanie naturalne krzywej

9. W poprzednich badaniach wyznaczyliśmy dwa niezmienniki krzywej: krzywiznę K i element łuku ds. Ponieważ $\bar{K} = K$ (kreska oznacza krzywiznę krzywej po transformacji (3)), więc $d\bar{K} = dK$, a ponieważ $d\bar{s} = ds$, więc $d\bar{K}/d\bar{s} = dK/ds$. Zatem dK/ds jest również niezmiennikiem krzywej.

Stąd wynika, że d^2K/ds^2, d^3K/ds^3, ... są także niezmiennikami. d/ds jest operatorem, za pomocą którego możemy z każdego niezmiennika utworzyć nieskończony ciąg niezmienników różniczkowych krzywej.

Zagadnienie wyznaczenia niezmienników różniczkowych krzywej uważamy za rozwiązane, jeśli możemy podać pełny układ niezmienników, to znaczy taki układ, że niezmiennik dowolnego rzędu nie należący do układu jest funkcją niezmienników układu.

TWIERDZENIE 3. *Układ niezmienników krzywej*

$$K,\ dK/ds,\ d^2K/ds^2,\ \ldots \tag{10}$$

jest zupełny.

Dowód. Niezmienniki układu (10) są niezależne, bo każdy następny zawiera pochodną wyższego rzędu niż poprzedni. Weźmy dowolny niezmiennik I rzędu n nie należący do naszego układu. I jako niezmiennik rzędu n jest funkcją $n+2$ zmiennych, $I = I(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$. Jest on całką układu dwóch równań różniczkowych liniowych jednorodnych o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu otrzymanych po przyrównaniu do zera transformacji infinitezymalnych, przedłużonych na pochodną rzędu n.

Układ takich dwóch równań o $n+2$ zmiennych ma n całek niezależnych, a ponieważ mamy już n niezmienników niezależnych (a więc i całek układu)

$$K,\ dK/ds,\ d^2K/ds^2, \ldots, d^{n-1}K/ds^{n-1},$$

więc każdy inny niezmiennik jest już od nich zależny.

Zauważmy, że wszystkie niezmienniki tego ciągu otrzymuje się z pierwszego różniczkując go względem łuku s.

10. Weźmy dwa niezmienniki krzywej, K i dK/ds, i przyjmijmy $dK/ds = \Phi(K)$; zakładamy, że funkcja Φ nie jest identycznie zerem i jest różniczkowalna.

Równanie to nazywamy *równaniem naturalnym krzywej*. Jest oczywiste, że krzywe przystające spełniają to samo równanie naturalne.

Udowodnimy, że jest słuszne twierdzenie odwrotne:

TWIERDZENIE 3′. *Jeśli krzywe spełniają to samo równanie naturalne, to są przystające.*

Dowód. Równanie naturalne krzywej ma postać

$$1-y''-(x-y')^2/(x^2-2y) = \Phi\big((x-y')/\sqrt{2y-x^2}\big). \tag{11}$$

Niech $y = f(x)$ będzie całką szczególną tego równania. Poddając ją transformacji grupy (3) przedłużonej na pochodną y (patrz wzór (5)) otrzymujemy wzory

$$\bar{x} = \lambda x + k,$$
$$\bar{y} = k\lambda x + \lambda^2 f(x) + \tfrac{1}{2}k^2,$$
$$\bar{y}' = \lambda f'(x) + k.$$

Pierwsze dwa z nich są równaniami parametrycznymi krzywej przekształconej; parametrem jest x. Jeżeli krzywa nie jest parabolą o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, to z pierwszego i z trzeciego z tych równań możemy wyrazić k i λ za pomocą wielkości $\bar{x}$, x, $\bar{y}'$ i $f'(x)$. Podstawiając te wyrażenia do drugiego ze wzorów otrzymamy równanie, które w ogólności można rozwiązać względem x w zależności od $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{y}'$. Przekształcone równanie krzywej przedstawia zatem całkę ogólną równania (11), co dowodzi, że krzywe całkowe są przystające, c. b. d. o.

§ 4. Miara pola i kąta

11. Przejdziemy teraz do wyznaczenia elementu pola i obliczenia pól niektórych obszarów.

Dla grupy przekształceń (3) wyznaczymy niezmiennicze różniczkowe formy liniowe. Różniczkując wzory (3) otrzymujemy

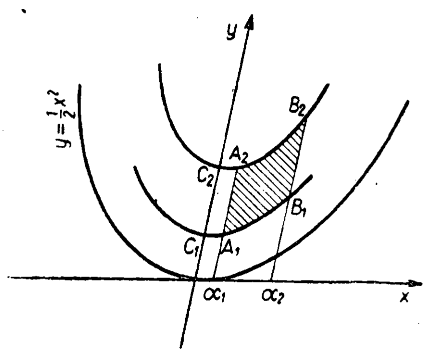
$$d\bar{x} = \lambda dx, \tag{12}$$

$$d\bar{y} = k\lambda dx + \lambda^2 dy. \tag{13}$$

Jeżeli z tych samych wzorów obliczymy λ i k i otrzymane wyrażenia podstawimy do równości (12) i (13), to po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{d\bar{x}}{\sqrt{2\bar{y}-\bar{x}^2}} = \frac{dx}{\sqrt{2y-x^2}},$$

$$\frac{\bar{x}\,d\bar{x}-d\bar{y}}{2\bar{y}-\bar{x}^2} = \frac{x\,dx-dy}{2y-x^2}.$$



Rys. 3

Uzyskaliśmy dwie niezmiennicze różniczkowe formy liniowe

$$\omega^1 = dx/\sqrt{2y-x^2},$$

$$\omega^2 = (x dx - dy)/(2y-x^2).$$

Dla określenia elementu pola tworzymy iloczyn zewnętrzny tych form:

$$[\omega^1, \omega^2] = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{\sqrt{2y-x^2}}, & \dfrac{x dx}{2y-x^2} - \dfrac{dy}{2y-x^2} \end{bmatrix} = -\frac{[dx, dy]}{(2y-x^2)^{3/2}}.$$

Wyrażenie $d\sigma = -dxdy/\sqrt{(2y-x^2)^3}$ przyjmijmy za miarę elementu pola.

Zastosujemy ten wzór do pewnego prostego przykładu.

TWIERDZENIE 4. *Pole obszaru ograniczonego dwiema parabolami o krzywiźnie zero i dwiema średnicami paraboli absolutnej mierzy się różnicą długości łuków parabol ograniczających obszar* (rys. 3).

D o w ó d. Obliczmy pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1, \quad y = \tfrac{1}{2}x^2 + c_2, \quad c_2 > c_1 > 0,$$

i prostymi

$$x = a_1, \quad x = a_2, \quad a_2 > a_1.$$

Pole $\Omega = -\iint_{\Omega} \dfrac{dxdy}{\sqrt{(2y-x)^3}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2c_2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2c_1}}\right)(a_2-a_1) = s(A_2B_2) - s(A_1B_1),$

c. b. d. o.

Zauważmy jeszcze, że jeśli przy ustalonej paraboli p_2 parabola p_1 zmierza do paraboli absolutnej, to pole obszaru zmierza bezwzględnie do nieskończoności.

12. Przez *kąt* będziemy rozumieli parę prostych przecinających się w punkcie właściwym nie leżącym na paraboli absolutnej.

DEFINICJA. Za *miarę kąta* przyjmiemy różnicę krzywizn jego ramion w wierzchołku kąta, a więc wyrażenie $(m_1-m)/\sqrt{2b-a^2}$, gdzie m_1 i m oznaczają współczynniki kierunkowe ramion, a (a, b) współrzędne wierzchołka.

Wyrażenie to jest oczywiście niezmiennikiem przekształceń (3).

TWIERDZENIE 5. *Kąt przecięcia się dwóch krzywych jest równy różnicy ich krzywizn w punkcie przecięcia.*

Dowód wynika z uwagi, że krzywe styczne do prostej w danym punkcie mają krzywiznę równą krzywiźnie prostej w tym punkcie (ust. 6).

Z kształtu wyrażenia przyjętego za miarę kąta łatwo wysnuć

WNIOSEK. *Największy kąt trójkąta, którego wierzchołki leżą na paraboli o krzywiźnie zero, jest równy sumie pozostałych kątów.*

13. Szczególną analogię między geometrią grupy G a geometrią płaszczyzny Łobaczewskiego wykazują właściwości paraboli o stałej krzywiźnie. Tworzą one pęk parabol o wierzchołku w punkcie w nieskończoności na krzywej absolutnej i są odpowiednikami pęku horycykli na płaszczyźnie Łobaczewskiego. Wiadomo, że proste na płaszczyźnie Łobaczewskiego, poprowadzone z wierzchołka pęku, przecinają horycykle pod stałym kątem. W geometrii grupy G krzywe o krzywiźnie zero przecinają parabole o stałej krzywiźnie również pod stałym kątem. Wynika to z uwagi, że kąt między krzywymi jest równy różnicy ich krzywizn w punkcie przecięcia.

Р. Вильневчиц (Вроцлав)

ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ АФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СОХРАНЯЮЩИХ ПАРАБОЛУ

РЕЗЮМЕ

Содержание статьи — внутренная геометрия невырожденной действительной конической S на проективной плоскости, основанная на подгруппе G сохраняющей коническую S и некоторую её точку A. Если как касательную к S в точке A принимается прямую в бесконечности, тогда проективная плоскость переходит в афинную, коническая же S — в параболу (абсолют изучаемой геометрии). В статье определено преобразование группы G, элемент дуги кривой и кривизну кривой, натуральное уравнение кривой, полную систему инвариантов кривой, элемент поля и меру угла.

Доказано, что:

1. Кривыми имеющими постоянную кривизну являются параболы соприкасающиеся абсолютной параболы в неособой точке и в точке в бесконечности.

2. Поле области, ограниченной двумя параболами, кривизна которых нуль, и двумя диаметрами абсолютной параболы, измеряется разностью длины дуг парабол ограничивающих область.

3. Угол пересечения двух кривых равен разности их кривизн в точке пересечения.

4. Кривые, кривизна которых равна нулю, пересекают параболы, имеющие постоянную кривизну, под постоянным углом.

R. Wilniewczyc (Wrocław)

GEOMETRY OF A GROUP OF AFFINE TRANSFORMATIONS FOR WHICH A PARABOLA REMAINS INVARIANT

SUMMARY

The subject of the paper is the geometry of the interior of a proper real conic S on the projective plane based on a subgroup G for which the conic S and a certain point of it, A, remain invariant. If the tangent t to S at A is assumed to be a straight line in infinity, then the projective plane will become affine and the conic S will become a parabola (the absolute of the geometry in question). In the paper are determined the transformations of the group G, the arc element and the curvature of the curve, the natural equation of the curve, the complete system of the invariants of the curve, the element of the field and the angle measure.

It is proved that:

1. The curves of constant curvature are parabolas tangent to the absolute parabola at the proper point and at a point in infinity.

2. The area of the region bounded by two parabolas with curvature zero and two diameters of the absolute parabola are measured by the difference between the lengths of the parabolas bounding the region.

3. The angle of intersection of two curvatures is equal to the difference of their curvatures at the intersection point.

4. The curves with curvature zero intersect the parabolas with constant curvatures at a constant angle.