S. Knapowski (Poznań)

Kryterium nierozkładalności równań stopnia $p+1$

Niech $f(x) = 0$ będzie takim równaniem stopnia $p+1$ (p jest liczbą pierwszą) o współczynnikach z pewnego ciała K, że każdy jego pierwiastek wyraża się wymiernie przez dowolne dwa inne. O ciele K zakładamy, że jest komutatywne i że jest *doskonałe*, tzn. że każde równanie nierozkładalne w K ma pierwiastki pojedyncze (np. K może być ciałem liczb wymiernych lub dowolnym podciałem ciała liczb zespolonych). Oznaczmy przez m rząd grupy równania $f(x) = 0$ w ciele K.

Twierdzenie. *Na to, by równanie $f(x) = 0$ było nierozkładalne, potrzeba i wystarcza, by było $m \geqslant p+1$.*

Dowód. Konieczność wynika z przechodniości grupy. Dla dowodu dostateczności rozpatrzymy dwa przypadki:

1° Równanie nie jest normalne w ciele K (1). Wtedy istnieje pewien pierwiastek, np. x_1, dla którego

$$K \subsetneqq K(x_1) \subsetneqq K(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}), \tag{1}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ oznaczają pierwiastki równania $f(x) = 0$.

Z założenia twierdzenia wynika, że w ciele $K(x_1)$ równanie jest normalne. Jest $f(x) = (x-x_1)\varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest wielomianem stopnia p, o współczynnikach z ciała $K(x_1)$. Równanie $\varphi(x) = 0$ ma tę właściwość, że każdy jego pierwiastek wyraża się wymiernie przez każdy inny. Wobec tego jest to równanie nierozkładalne, gdyż w przeciwnym razie rozpadałoby się na czynniki tego samego stopnia, a więc liniowe, i mielibyśmy $K(x_1) = K(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$, wbrew (1). Stąd i z (1) wynika, że równanie $f(x) = 0$ jest nierozkładalne w ciele K.

2° Równanie jest normalne w ciele K. Wtedy $m \leqslant p+1$, więc wobec założeń twierdzenia jest $m = p+1$, co oczywiście pociąga za sobą nierozkładalności równania.

(1) Równanie rozkładalne (lub nie) nazywamy *normalnym*, jeśli ma pierwiastek, który przez dołączenie do K generuje ciało rozpadu.

С. Кнаповский (Познань)

ПРИЗНАК НЕПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СТЕПЕНИ $p+1$

РЕЗЮМЕ

Пусть $f(x)=0$ уравнение степени $p+1$ (p — простое число), коэффициенты которого рациональные числа. Пусть всякий корень уравнения выражается рационально через любые два другие. Обозначим через m ранг группы Галуа уравнения над полем R рациональных чисел.

ТЕОРЕМА. *Уравнение* $f(x)=0$ *неприводимо* b R *тогда и только тогда, когда* $m \geqslant p+1$.

S. Knapowski (Poznań)

A CRITERION OF IRREDUCIBILITY OF THE EQUATIONS OF DEGREE $p+1$

SUMMARY

Let $f(x)=0$ be an equation of degree $p+1$ (p — prime number) whose coefficients are rational numbers.

Suppose that each zero of the equation can be expressed rationally by each pair of the other zeros. Denote by m the order of the Galois group of the equation in the field R of rational numbers.

THEOREM. *The necessary and sufficient condition of the irreducibility of the equation* $f(x)=0$ *in* R *is* $m \geqslant p+1$.