



S. KNAPOWSKI (Poznań)

Twierdzenie z teorii grup skończonych

Niech K będzie ciałem złożonym z liczb zespolonych, a $f(x) = 0$ równaniem stopnia n , którego grupa w ciele K ma rząd m .

Twierdzenie 1. *Jeżeli n nie jest dzielnikiem m i jeżeli najmniejszy dzielnik pierwszy m jest większy od $n/2$, to równanie $f(x) = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek należący do ciała K .*

Dowód. Oznaczmy pierwiastki równania $f(x) = 0$ przez x_1, x_2, \dots, x_n , a ciało rozpadu przez Σ . Przypuśćmy — wbrew tezie — że dla każdego s jest $K \not\subseteq K(x_s)$. Grupa ciała Σ względem $K(x_s)$ jest więc rzędu $r_s < m$, gdzie $r_s | m$. Oczywiście $e_s = m/r_s$ jest stopniem ciała $K(x_s)$ względem K . A zatem

(1) x_s spełnia równanie nierozkładalne w K stopnia e_s ($e_s > 1, e_s | m$).¹

Oznaczmy przez $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}$ stopnie czynników nierozkładalności równania $f(x) = 0$. Wobec (1) mamy

$$e^{(i)} | m, \quad e^{(i)} > 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Na podstawie założenia jest więc $e^{(i)} > n/2$.

Z drugiej strony, $e^{(1)} + e^{(2)} + \dots + e^{(k)} = n$, skąd $n > kn/2$, więc $k = 1$. Równanie $f(x) = 0$ okazuje się zatem nierozkładalne, a więc jego grupa jest przechodnia, skąd wynika, że n dzieli m , wbrew założeniu.

Twierdzenie 2. *Jeżeli $m = p$ (p jest liczbą pierwszą) i p nie dzieli n , to równanie $f(x) = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek należący do K .*

Dowód. Przypuśćmy, że teza nie jest spełniona. Zachowując poprzednie oznaczenia stwierdzamy, że ciału $K(x_s)$ odpowiada grupa rzędu p^{α_s} ($\alpha_s < d$), a zatem x_s spełnia równanie nierozkładalne stopnia $p^{d-\alpha_s}$. A więc całe równanie tak się rozkłada, że $n = \sum_s p^{d-\alpha_s}$, skąd wynika, że p dzieli n , wbrew założeniu.

Uwaga. Jeżeli n jest liczbą złożoną, to w twierdzeniu 1 nie trzeba zakładać osobno, że n nie dzieli m . Gdyby bowiem było $n|m$, to $n = k_1 k_2$, $k_1 \leq n/2$, a z drugiej strony $k_1 > n/2$ (bo $k_1 | m$).

Lemat. Założenie: *Niech grupa G będzie podgrupą grupy symetrycznej S ($n \geq 2$). Istnieje równanie $g(x) = 0$ stopnia n , którego grupą w pewnym ciele liczb zespolonych Δ jest G i które ma pierwiastek należący do Δ .*

Teza: Grupa S_{n-1} ma taką podgrupę Γ , że $\Gamma \simeq G$.

Dowód. Jeżeli pierwiastek x_s równania $g(x) = 0$ należy do Δ , to grupa G składa się z podstawień zachowujących x_s , może więc być uważana za grupę permutacji $n-1$ elementów. Jest to szukana grupa Γ .

TWIERDZENIE 3. Jeżeli liczby $n \geq 2$, m spełniają założenia twierdzenia 1 lub twierdzenia 2 i G jest podgrupą rzędu m grupy S_n , to grupa S_{n-1} ma podgrupę Γ izomorficzną z grupą G .

Dowód. Tworzymy równanie $g(x) = 0$ stopnia n o grupie symetrycznej np. w ciele liczb wymiernych (co zawsze można zrealizować). Na podstawie zasadniczego twierdzenia teorii Galois istnieje takie ciało Δ , w którym grupą równania $g(x) = 0$ jest G . Dla zakończenia dowodu wystarczy zastosować twierdzenie 1 lub odpowiednio 2 i lemat.

WNIOSEK. Na to, by grupa S_n miała podgrupę rzędu m dla $n \geq 2$ oraz m spełniających założenia twierdzenia 1 lub 2, potrzeba i wystarcza, by grupa S_{n-1} miała podgrupę rzędu m .

С. КНАПОВСКИЙ (Познань)

ТЕОРЕМА ИЗ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

РЕЗЮМЕ

Обозначим через S_n группу всех подстановок n элементов. Пусть для целых положительных $n \geq 2$ и m выполняется одно из двух следующих условий:

- 1° $n \nmid m$, всякий простой делитель m больше $n/2$;
- 2° $m = p^a$ (p — простое число), $p \nmid n$.

Если существует группа $G \subset S_n$, $\bar{G} = m$, то существует группа $\Gamma \subset S_{n-1}$, изоморфная G .

S. Knapowski (Poznań)

A THEOREM OF THE THEORY OF FINITE GROUPS

SUMMARY

Denote by S_n the group of all the substitutions of n elements. Let positive integers $n \geq 2$, m satisfy one of the following two conditions:

- 1° $n \nmid m$, each prime divisor of m is greater than $n/2$;
- 2° $m = p^a$ (p — prime number), $p \nmid n$.

If there exists a group $G_n \subset S_n$, $\bar{G} = m$, then there exists a group $\Gamma_n \subset S_{n-1}$, isomorphic with G .