



J. KRZYŻ (Lublin)

Twierdzenie Oliviera i jego uogólnienia

1. Jest rzeczą dobrze znaną z kursu analizy, że

I. Jeżeli $a_n \downarrow 0$ ⁽¹⁾ i szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny, to $na_n \rightarrow 0$.

Wynik ten został podany jeszcze w 1827 r. przez L. Oliviera [5].
Ch. J. de la Vallée Poussin ([8], zad. 10, str. 416) uogólnił wynik Oliviera jak następuje:

II. Jeżeli $b_n \downarrow 0$, a liczby $\mu_n \geq 0$ są tak dobrane, że szereg $\sum_n \mu_n b_n$ jest zbieżny, to

$$\lim_n (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) b_n = 0.$$

Autor zauważył ([3], lemat 2.3), że założenie $\mu_n \geq 0$ jest zbyt silne. Można mianowicie w dość prosty sposób wykazać, że

III. Jeżeli $b_n \downarrow 0$, a liczby zespolone μ_n są tak dobrane, że szereg $\sum_n \mu_n b_n$ jest zbieżny, to $\lim_n (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) b_n = 0$.

Rezultat powyższy jest zresztą równoważny (przynajmniej w niebanalnym przypadku $b_n > 0$) z następującym, dobrze znanym wynikiem Kroneckera ([2], str. 980):

IV. Jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny, a $p_n \uparrow \infty$ ($p_n \neq 0$), to

$$\lim_n (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n) / p_n = 0.$$

Twierdzenia tego można dowieść w prosty sposób, opierając się na twierdzeniu Toeplitza o przekształceniu ciągów (por. [1], str. 131).

W celu wykazania równoważności twierdzeń III i IV dla $b_n > 0$, wystarczy przyjąć $p_n a_n = \mu_n$ i $1/p_n = b_n$. Tak więc z twierdzenia III otrzymujemy I, II i IV. Ponadto, przyjmując w twierdzeniu III $\mu_n = \pm 1$, otrzymujemy pewien wynik E. Laskera ([7], zad. 139, str. 25).

⁽¹⁾ Symbol $a_n \downarrow 0$ oznacza, że $\{a_n\}$ jest ciągiem monotonicznym malejącym zbieżnym do zera, tzn.

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Innego rodzaju uogólnienie twierdzenia II zawdzięczamy A. Ostrowskiemu ([6], twierdzenie C', str. 165). Twierdzenie to przytoczymy tu w postaci nieco zmodyfikowanej:

V. Jeśli $\mu_n \geq 0$ oraz $b_n \downarrow 0$, to zbieżność jednego z szeregów

$$\sum_n \mu_n b_n, \quad \sum_n (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)(b_n - b_{n+1}) \quad (n \geq 1)$$

pociąga za sobą zbieżność drugiego i równość sum obu tych szeregów.

Stosując przekształcenie Abela otrzymujemy równość

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{m-1} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^m \mu_n b_n - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m)b_m.$$

Jest zatem rzeczą oczywistą, że twierdzenie V pociąga za sobą twierdzenie II. Jednocześnie, biorąc pod uwagę twierdzenie II, widzimy od razu, że zbieżność pierwszego szeregu (to jest $\sum_n \mu_n b_n$) pociąga za sobą zbieżność drugiego szeregu i równość obu sum. Niebanalną częścią twierdzenia jest, że ze zbieżności ciągu $\{\sum_{n=1}^m \mu_n b_n - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m)b_m\}$ wynika zbieżność szeregu $\sum_n \mu_n b_n$.

Jak łatwo zauważyć, że względu na twierdzenie III i równość (1), łatwiejszą część twierdzenia V możemy zaostrzyć w następujący sposób:

VI. Jeśli $b_n \downarrow 0$, a szereg $\sum_n \mu_n b_n$ dla zespolonych μ_n jest zbieżny, to szereg

$$(2) \quad \sum_n (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)(b_n - b_{n+1})$$

jest również zbieżny; zachodzi przy tym równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)(b_n - b_{n+1}).$$

Natomiast ze zbieżności szeregu (2) nie zawsze wynika zbieżność $\sum_n \mu_n b_n$. Łatwo podać przykład, gdzie sumy $M_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ mają stały znak, a mimo to szereg $\sum_n \mu_n b_n$ jest rozbieżny. Możemy przyjąć np.

$b_n = 1/n$ dla $n \neq 3k$ oraz $b_n = 1/(n+1)$ dla $n = 3k$, czyli

$$\{b_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \dots\};$$

niech ponadto będzie $M_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1/n$ dla $n \neq 3k$ oraz $M_n = n+1$ dla $n = 3k$, czyli

$$\{M_n\} = \{1, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 7, \frac{1}{7}, \dots\}.$$

Oczywiście szereg $\sum_n M_n(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie oraz jest

$$M_n b_n = (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) b_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 3k, \\ 1/n^2 & \text{dla } n \neq 3k, \end{cases}$$

skąd, po uwzględnieniu równości (1), wynika rozbieżność szeregu $\sum_n \mu_n b_n$.

Opierając się na twierdzeniu III i na równości (1) możemy sformułować następującą oczywistą uwagę:

Jeżeli $b_n \downarrow 0$ i szereg (2) jest zbieżny, to warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu $\sum_n \mu_n b_n$ jest, by $\lim_n (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) b_n = 0$.

Podamy teraz prosty dowód drugiej części twierdzenia Ostrowskiego.

Jeśli ciąg $\{\sum_{k=1}^n \mu_k b_k - b_n \sum_{k=1}^n \mu_k\}$ jest zbieżny, to jest ograniczony; stąd

$$\mu_1(b_1 - b_n) + \mu_2(b_2 - b_n) + \dots + \mu_{n-1}(b_{n-1} - b_n) \leq K.$$

Dla $\nu < n$ tym bardziej jest

$$\mu_1(b_1 - b_n) + \mu_2(b_2 - b_n) + \dots + \mu_\nu(b_\nu - b_n) \leq K.$$

Przechodząc z n do granicy, przy ν ustalonym, otrzymujemy $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_\nu b_\nu \leq K$, skąd wobec dowolności ν , wynika zbieżność szeregu $\sum_n \mu_k b_k$.

2. Zastosowania. Każdemu ciągowi zero-jedynkowemu $\{\eta_n\}$ można przyporządkować jednoznacznie punkt x z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ przyjmując $x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n / 2^n$. Można więc mówić o mierze Lebesgue'a pewnych zbiorów ciągów zero-jedynkowych, a w szczególności o prawie wszystkich ciągach zero-jedynkowych. Znany rezultat Borela głosi, że dla prawie wszystkich ciągów zero-jedynkowych jest $(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) / n \rightarrow 1/2$. Z drugiej strony, każdy ciąg zero-jedynkowy określa pewien szereg, utworzony z szeregu harmonicznego przez wykreślenie pewnych wyrazów: $\sum_n \eta_n / n$. Na mocy twierdzenia III (lub II), w przypadku gdy szereg $\sum_n \eta_n / n$ jest zbieżny, mamy $(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) / n \rightarrow 0$. Uwzględniając rezultat Borela widzimy, że prawie wszystkie szeregi częściowe, utworzone z wyrazów szeregu harmonicznego są rozbieżne. Uwaga ta pochodzi od W. Orlicza.

Zajmiemy się teraz bardziej szczegółowym zbadaniem szeregów kształtu $\sum_n \eta_n / n$, gdzie $\eta_n = 0, 1$. Jest rzeczą jasną, że szereg $\sum_n 1/2^n$ jest dlatego zbieżny, że w ciągu zero-jedynkowym $\{\eta_n\}$, gdzie

$$\eta_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq 2^k, \\ 1 & \text{dla } n = 2^k, \end{cases}$$

jedynek występują rzadko. Nasuwa się więc wprowadzenie funkcji $\varphi(n) = (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n)/n$ określającej częstość występowania jedynek w ciągu $\{\eta_n\}$. Z twierdzenia II wynika od razu, że warunkiem koniecznym zbieżności szeregu $\sum_n \eta_n/n$ jest równość $\lim_n \varphi(n) = 0$. Stosując twierdzenie V otrzymamy

VII. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by szereg $\sum_n \eta_n/n$ był zbieżny, jest zbieżność szeregu $\sum_n \varphi(n)/(n+1)$, przy czym sumy obu szeregów są równe.*

Istotnie, przyjmując w twierdzeniu V $b_n = 1/n$ i $\mu_n = \eta_n$ widzimy, że

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{n}. \end{aligned}$$

Podamy teraz dwa przykłady na zastosowanie twierdzenia VII.

1° Szereg $\sum_n 1/p_n$, gdzie p_n jest n -tą z kolei liczbą pierwszą, jest rozbieżny.

Szereg $\sum_n 1/p_n$ jest postaci

$$\sum_n \eta_n/n, \quad \text{gdzie} \quad \eta_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq p_r, \\ 1 & \text{dla } n = p_r. \end{cases}$$

Oczywiście mamy $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n = \pi(n)$, gdzie $\pi(n)$ oznacza ilość liczb pierwszych, nie większych od n . Na mocy znanego, dającego się wyprowadzić elementarnie rezultatu Czebyszewa (por. [4], twierdzenie 112, str. 66), dla $n \geq 2$ jest

$$An/\log n < \pi(n) \quad (A - \text{stała dodatnia})$$

skąd

$$\varphi(n)/(n+1) = \pi(n)/n(n+1) > A/(n+1)\log n,$$

co dowodzi rozbieżności szeregu $\sum_n \varphi(n)/(n+1)$, a więc i szeregu $\sum_n 1/p_n$.

2° Jeżeli wykreślimy z szeregu harmonicznego wszystkie wyrazy, których mianowniki zawierają w rozwinięciu dziesiętnym cyfrę 9, to szereg utworzony z pozostałych wyrazów będzie zbieżny (por. [7], zad. 124, str. 22).

Jeśli jest $10^{m-1} \leq n < 10^m$, to pozostanie niewykreślonych co najwyżej tyle wyrazów szeregu większych od $1/n$, ilu sposobami można pokryć $m-1$ miejsc 9-ciomą cyframi, to jest 9^{m-1} . Tak więc mamy

$$n\varphi(n) \leq 9^{m-1} \leq 9^{\log n / \log 10} = \exp\left(\frac{\log 9 \log n}{\log 10}\right) = n^a,$$

gdzie $0 < q = \log 9 / \log 10 < 1$. Stąd

$$\varphi(n) \leq n^q/n, \quad \varphi(n)/(n+1) < n^q/n^2 = 1/n^{2-q},$$

co dowodzi zbieżności rozważanego szeregu. Całkiem podobnie można wykazać, że jeśli z szeregu harmonicznego usuniemy wszystkie wyrazy, których mianowniki w systemie p ($p > 2$), niekoniecznie dziesiętnym, zawierają pewną określoną cyfrę, to otrzymamy szereg zbieżny.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia III (lub IV) jest twierdzenie następujące:

Jeśli szereg $\sum_n a_n/n^\sigma$ jest zbieżny ($\sigma > 0$), to $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n^\sigma \rightarrow 0$

(por. [7], zad. 75, str. 12).

Podamy teraz przykład na zastosowanie twierdzenia VI.

Niech będzie $r_n > 0$, $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n \geq \dots$ i niech szereg $r_1 + r_2 + \dots + r_n + \dots$ będzie rozbieżny, a szereg $\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots + \varepsilon_n r_n + \dots$, gdzie $\varepsilon_n = \pm 1$, będzie zbieżny; wówczas (por. [6], zad. 138, str. 25).

$$\lim_n (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)/n \leq 0 \leq \overline{\lim}_n (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)/n.$$

Gdyby $\lim_n (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)/n > 0$, to dla $n > n_0$ byłoby

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)/n \geq \delta > 0.$$

Na mocy zaś twierdzenia VI byłoby

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n r_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)(r_n - r_{n+1}),$$

czyli dla $n > n_0$ byłoby

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)(r_n - r_{n+1}) \geq \delta n(r_n - r_{n+1}),$$

co dowodzi zbieżności szeregu $\sum_n n(r_n - r_{n+1})$. Lecz wtedy na mocy VII ($b_n = r_n$, $\mu_n = 1$) musiałyby być zbieżny także i szereg $\sum_n r_n$, co prowadzi do sprzeczności. Całkiem podobnie prowadzi do sprzeczności założenie $\overline{\lim}_n (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)/n < 0$. Stąd wnioskujemy, że jeżeli w szeregu $\sum_n \varepsilon_n r_n$ stosunek ilości wyrazów dodatnich do ilości wyrazów ujemnych o wskaźniku $\leq n$ dąży dla $n \rightarrow \infty$ do określonej granicy, to granica ta musi być równa 1.

Prace cytowane

- [1] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin u. Heidelberg 1947.
 [2] L. Kronecker, *Comptes Rendus* 103 (1886), str. 980.
 [3] J. Krzyż, *On monotonicity-preserving transformations*, *Ann. UMCS A*, 6 (1952), str. 91-111.
 [4] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Band. I, Leipzig 1927.
 [5] L. Olivier, *Remarques sur les séries infinies et leur convergence*, *Crelles Journ. f. reine u. angew. Math.* 2 (1827), str. 31-44.
 [6] A. Ostrowski, *Über die Nullstellen gewisser im Einheitskreis regulärer Funktionen und einige Sätze zur Konvergenz unendlicher Reihen*, *Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver.* 34 (1925), str. 161-171.
 [7] G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Berlin 1925.
 [8] Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse Infinitésimale I*, 8 éd., Dover, New York 1946.

И. Кржиж (Льблин)

ТЕОРЕМА ОЛИВЬЕ И ЕЁ ОБОБЩЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В 1827 г. Л. Оливье доказал, что если ряд $\sum_n a_n$ сходится и $a_n \downarrow 0$, то $na_n \rightarrow 0$

Валле-Пуссен, Ласкер, Кронекер и Островский доказали разные обобщения этой теоремы. В статье доказано, что результаты Ласкера и Валле-Пуссена являются частными случаями раньше опубликованного результата Кронекера. Приводятся тоже простое доказательство результата, полученного Островским, и некоторые применения к теории рядов.

J. KRZYŻ (Lublin)

OLIVIER'S THEOREM AND ITS GENERALIZATIONS

SUMMARY

In 1827 L. Olivier showed that if a series $\sum_n a_n$ is convergent and $a_n \downarrow 0$, then $na_n \rightarrow 0$. Later de la Vallée-Poussin, Lasker, Kronecker and Ostrowski gave various generalizations of this theorem. The author proves that the results of Lasker and of de la Vallée-Poussin are particular cases of Kronecker's result published earlier. The paper contains a simple proof of Ostrowski's result and a few applications to the theory of series.