J. GÓRSKI (Kraków)

O pewnym ciągu zbieżnym do rozwartości zbioru płaskiego

1. Wprowadzenie. Niech E będzie zbiorem ograniczonym i domkniętym na płaszczyźnie, $f(z)$ funkcją rzeczywistą określoną i ciągłą na zbiorze E, a $\omega(z,\zeta)$ funkcją dwóch punktów z i ζ określoną wzorem

$$\omega(z,\zeta) = |z-\zeta|/\exp\big(f(z)+f(\zeta)\big). \tag{1}$$

Niech $\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ będzie układem $n+1$ punktów różnych zbioru E; oznaczmy przez $U(\zeta^{(n)})$ następujący iloczyn

$$U(\zeta^{(n)}) = \prod_{0\leqslant j<k\leqslant n} \omega(\zeta_j, \zeta_k), \tag{2}$$

a przez

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\} \tag{3}$$

układ $n+1$ punktów zbioru E, dla którego iloczyn (2) osiąga maksimum

$$U(\eta^{(n)}) = \sup_{\zeta^{(n)}\in E} U(\zeta^{(n)}). \tag{4}$$

Układ punktów (3) spełniający warunek (4) nazywamy *układem ekstremalnym* względem zbioru E i funkcji (1). Punkty ekstremalne $\eta^{(n)}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ tworzą ciąg trójkątny. Oznaczmy przez E_ω zbiór punktów skupienia tego ciągu.

Wiadomo (zob. [1]), że ciąg

$$\left\{\sqrt[s]{U(\eta^{(n)})}\right\}, \quad \text{gdzie} \quad s = \binom{n+1}{2},$$

jest zbieżny do granicy skończonej

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[s]{U(\eta^{(n)})} = d(E,\omega), \quad \text{gdzie} \quad s = \binom{n+1}{2}, \tag{5}$$

zwanej *rozwartością* zbioru E względem funkcji (1). Utwórzmy następujące funkcje

$$\Phi_n^{(j)}(z, \eta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} \left[\frac{z-\eta_k}{\eta_j-\eta_k} \exp\big(f(\eta_j)\big)\right], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

i oznaczmy przez $\Delta_n^{(j)} = \Delta_n^{(j)}(E)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, następujące iloczyny:

(7) $$\Delta_n^{(j)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} |\eta_j - \eta_k| / \exp\big(f(\eta_j) + f(\eta_k)\big).$$

Załóżmy, że wskaźniki punktów (3) są tak wybrane, że

(8) $$\Delta_n^{(0)} \leqslant \Delta_n^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \Delta_n^{(n)}.$$

Niech będzie $d(E, \omega) > 0$. F. Leja [2] udowodnił następujące twierdzenia:

1. *W każdym punkcie* $z \operatorname{non} \epsilon E$ *istnieje granica*

(9) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Phi_n^{(0)}(z, \eta^{(n)})|} = \Phi(z, E),$$

przy czym zbieżność jest jednostajna w każdym zbiorze ograniczonym i domkniętym, zawartym w uzupełnieniu CE *zbioru* E.

2. *Jeżeli każdy punkt zbioru* E *należy do pewnego kontinuum należącego do zbioru* E, *to istnieje granica funkcji* $\Phi(z, E)$, *gdy punkt* $z \operatorname{non} \epsilon E$ *zmierza do jakiegokolwiek punktu* $z_0 \epsilon E$, *i wtedy*

(10) $$\lim_{z\to z_0} \Phi(z, E) \leqslant \exp\big(f(z_0)\big).$$

W przypadku jeżeli $z_0 \epsilon E_\omega$, *to* $\lim_{z\to z_0} \Phi(z, E) = \exp\big(f(z_0)\big)$.

W. Ottenbreit [4] dowiodła, że

(11) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}} = d(E, \omega).$$

F. Leja postawił następujące zagadnienie:

Czy istnieje granica ciągu $\{\sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}\}$?

2. Rozwiązanie zagadnienia. Niech D_∞ będzie obszarem nieograniczonym zawierającym wewnątrz punkt ∞. Oznaczmy przez F brzeg obszaru D_∞ i załóżmy, że każdy punkt $z \epsilon F$ leży na pewnym kontinuum $C \subset F$. Udowodnię następujący

LEMAT. *Jeżeli istnieje granica*

(12) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}(F)} = g,$$

to istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}(F)}$ *i jest równa* g.

Dowód. Niech δ będzie dowolną liczbą dodatnią i niech F_δ będzie rodziną takich analitycznych krzywych Jordana, że 1° każda składowa zbioru F jest zawarta w obszarze ograniczonym jedną z krzywych rodziny F_δ, 2° odległość dowolnego punktu $z \epsilon F$ od krzywych rodziny F_δ jest mniejsza od δ. Na przykład odpowiednio dobrane poziomnice funkcji Greena dla obszaru D_∞ z biegunem w punkcie ∞ mogą być obrane za krzywe rodziny F_δ.

Z równości (9) i (12) wynika, że do każdego $\varepsilon_1 > 0$ można dobrać takie $N(\varepsilon_1, \delta)$, że dla każdego $z \epsilon F_\delta$ i $n > N(\varepsilon_1, \delta)$

$$\sqrt[n]{|\Phi_n^{(0)}(z, \eta^{(n)})|\, \Delta_n^{(0)}} = \sqrt[n]{\frac{|z-\eta_1| \ldots |z-\eta_n|}{\exp\big(f(\eta_1)+\ldots+f(\eta_n)\big)}} < \Phi(z, F)g+\varepsilon_1,$$

a zatem dla $z \epsilon F_\delta$ i $n > N_1(\varepsilon_1, \delta)$ jest

$$\sqrt[n]{\frac{|z-\eta_0| \ldots |z-\eta_{n-1}|}{\exp\big(f(\eta_0)+\ldots+f(\eta_{n-1})\big)}} < \Phi(z, F)g+\varepsilon_1. \tag{13}$$

Oznaczmy przez $\varphi_n(z)$ lewą stronę tej nierówności. Jak wynika z (10), do każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $\delta(\varepsilon) > 0$, że dla każdego punktu $z \epsilon F_{\delta(\varepsilon)}$ istnieje punkt $z^* = z^*(z) \epsilon F$, spełniający warunki $|z^*-z| < \delta(\varepsilon)$ oraz

$$\Phi(z, F) < \exp\big(f(z^*)\big)+\varepsilon. \tag{14}$$

Jak wynika z (13) i (14), dla każdego $z \epsilon F_{\delta(\varepsilon)}$ i $n > N_1\big(\varepsilon_1, \delta(\varepsilon)\big)$ istnieje taki punkt $z^* \epsilon F$, że

$$\varphi_n(z) < \big(\exp(f(z^*))+\varepsilon\big)g+\varepsilon_1, \tag{15}$$

Z drugiej strony wiadomo (zob. [2]), że

$$\Delta_n^{(n)} = \max_{z\epsilon F} \prod_{k=0}^{n-1} |z-\eta_k|/\exp\big(f(z)+f(\eta_k)\big) = \max_{z\epsilon F}\big\{\varphi_n(z)^n \exp\big(-nf(z)\big)\big\}. \tag{16}$$

Skorzystamy obecnie z następującego twierdzenia Ławrentiewa [4]: *Każda funkcja rzeczywista, określona i ciągła na brzegu F obszaru D_∞, daje się przybliżać jednostajnie na F wielomianami harmonicznymi.*

Jak wynika z tego twierdzenia, do każdego $\varepsilon_2 > 0$ można dobrać taki wielomian harmoniczny $h_{\varepsilon_2}(z)$, że dla każdego $z \epsilon P$ zachodzi nierówność

$$|f(z)-h_{\varepsilon_2}(z)| < \varepsilon_2. \tag{17}$$

Niech $w_{\varepsilon_2}(z) = h_{\varepsilon_2}(z)+ig_{\varepsilon_2}(z)$ będzie wielomianem zmiennej z, którego częścią rzeczywistą jest wielomian harmoniczny $h_{\varepsilon_2}(z)$. Na zbiorze F jest

$$\big|\exp\big(-f(z)\big)-|\exp\big(-w_{\varepsilon_2}(z)\big)|\big| < M\varepsilon_2,$$

gdzie M oznacza pewną stałą, a zatem

$$\exp\big(-f(z)\big) < \big|\exp\big(-w_{\varepsilon_2}(z)\big)\big|+M\varepsilon_2. \tag{18}$$

Funkcja $\varphi_n(z)$ jest jednostajnie ograniczona na F, więc $\max\limits_{z\epsilon F}\varphi_n(z) < A$, gdzie A jest pewną stałą. Z wzorów (16) i (18) wynika, że

$$\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} = \max_{z\epsilon F}\{\varphi_n(z)\exp(-f(z))\} < \max_{z\epsilon F}\{\varphi_n(z)|\exp(-w_{\varepsilon_2}(z))|\} + \varepsilon_2 AM.$$

Ponieważ funkcja $\psi(z) = [\varphi_n(z)\exp(-w_{\varepsilon_2}(z))]^n$ jest analityczna w obszarach domkniętych, ograniczonych krzywymi należącymi do $F_{\delta(\varepsilon)}$, więc $\max\limits_{z\epsilon F}|\psi(z)| < \max\limits_{z\epsilon F_{\delta(\varepsilon)}}|\psi(z)|$, z czego wynika, że

$$\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} < \max_{z\epsilon F_{\delta(\varepsilon)}}\{\varphi_n(z)|\exp(-w_{\varepsilon_2}(z))|\} + \varepsilon_2 AM = \varphi_n(\xi)\exp(-h_{\varepsilon_2}(\xi)) + \varepsilon_2 AM,$$

gdzie punkt ξ leży na $F_{\delta(\varepsilon)}$. Z nierówności (15) otrzymujemy dla $n > N_1(\varepsilon_1, \delta(\varepsilon))$ nierówność

$$\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} < \{[\exp(f(\xi^*)) + \varepsilon]g + \varepsilon_1\}\exp(-h_{\varepsilon_2}(\xi)) + \varepsilon_2 AM, \tag{19}$$

gdzie $\xi^*\epsilon F$, $|\xi^* - \xi| < \delta(\varepsilon)$.

Niech ε_3 będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ jest

$$|f(\xi^*) - f(\xi)| \leqslant |f(\xi^*) - h_{\varepsilon_2}(\xi^*)| + |h_{\varepsilon_2}(\xi^*) - h_{\varepsilon_2}(\xi)|,$$

więc z nierówności (17) i z ciągłości funkcji $h_{\varepsilon_2}(z)$ wynika, że dla $|\xi^* - \xi| < \delta_1(\varepsilon_3)$ i $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$, zachodzą nierówności

$$|f(\xi^*) - h_{\varepsilon_2}(\xi^*)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_3, \qquad |h_{\varepsilon_2}(\xi^*) - h_{\varepsilon_2}(\xi)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_3,$$

skąd

$$|f(\xi^*) - h_{\varepsilon_2}(\xi)| < \varepsilon_3. \tag{20}$$

Przyjmijmy $\delta_2 = \min[\delta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon_3)]$. Dla n dostatecznie wielkich otrzymamy wobec (19) i (20) nierówność

$$\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}(F)} < g\exp(\varepsilon_3) + \varepsilon B + \varepsilon_1 C + \varepsilon_2 AM,$$

gdzie B i C są pewnymi stałymi.

Dla $n\to\infty$ otrzymamy

$$g = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} \leqslant g\exp(\varepsilon_3) + \varepsilon B + \varepsilon_1 C + \varepsilon_2 AM,$$

a wobec tego, że $\varepsilon_1, \varepsilon, \varepsilon_2$ i ε_3 są dowolnie małe, istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} = g$.

TWIERDZENIE. *Jeżeli F jest brzegiem obszaru D_∞ i każdy punkt $z\epsilon F$ należy do pewnego kontinuum $C\subset F$, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}}$ i jest ona równa rozwartości $d(F, \omega)$.*

Dowód. Rozważmy ciąg $\{\sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}\}$. Niech $\{\sqrt[n_k]{\Delta_{n_k}^{(0)}}\}$ będzie takim ciągiem wybranym, że

$$\varliminf_{k\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{\Delta_{n_k}^{(0)}}=g.$$

Z lematu wynika, że

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{\Delta_{n_k}^{(n_k)}}=g.$$

Ponieważ

$$U(\eta^{(n_k)})^{2/n_k(n_k+1)}=\sqrt[n_k+1]{[\Delta_{n_k}^{(0)}]^{1/n_k}\ldots[\Delta_{n_k}^{(n_k)}]^{1/n_k}},$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[s]{U(\eta^{(n_k)})}=d(F,\omega),\qquad \text{gdzie}\qquad s=\binom{n_k+1}{2},$$

więc $d(F,\omega)=g$. Postępując podobnie z ciągiem wybranym $\{\sqrt[n_k']{\Delta_{n_k'}^{(0)}}\}$, takim że

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k']{\Delta_{n_k'}^{(0)}}=G,$$

otrzymamy $G=d(F,\omega)$. Twierdzenie zostało dowiedzione.

Uwaga. Wynik powyższy daje się uogólnić. Jeśli dany zbiór E jest np. brzegiem obszaru ograniczonego n-spójnego, którego żadna składowa nie redukuje się do punktu, to funkcja ciągła $f(z)$ daje się na każdej składowej brzegowej przybliżać jednostajnie funkcjami harmonicznymi. Funkcja $\exp(-f(z))$ daje się zatem przybliżać na E jednostajnie modułami pewnych funkcji analitycznych.

Prace cytowane

[1] F. Leja, *Une généralisation de l'écart et du diamètre transfini d'un ensemble*, Ann. Soc. Pol. Math. 22 (1950), str. 35-42.

[2] — *Une méthode élémentaire de résolution du problème de Dirichlet dans le plan*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), str. 230-245.

[3] M. A. Ławrentiew, *Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes*, Actualités Sc. et Ind. 441 (1936), str. 1-60. W szczególności stronice od 37 od 39.

[4] W. Ottenbreit, *Monotoniczność rozwartości zbioru ze względu na pewną klasę funkcji tworzących* (praca nie opublikowana).

Е. Гурский (Краков)

О НЕКОТОРОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СХОДЯЩЕЙСЯ К ОБОБЩЁННОМУ ТРАНСФИНИТНОМУ ДИАМЕТРУ ПЛОСКОГО МНОЖЕСТВА

РЕЗЮМЕ

Пусть E ограниченное замкнутое плоское множество, $f(z)$ непрерывная вещественная функция определённая на E, и $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\} = \zeta$ различные точки из E. Положим, что

$$U(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{n\leqslant j<k\leqslant n} |\zeta_j - \zeta_k| / \exp\big(f(\zeta_j)+f(\zeta_k)\big).$$

Известно, что если $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ есть система точек множества E, для которой $U(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \sup\limits_{\zeta\epsilon E} U(\zeta)$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[s]{U(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)} = d(E) \geqslant 0, \quad \text{где} \quad s = \binom{n+1}{2},$$

который называется *обобщённым трансфинитным диаметром* множества E.

Положим, что

$$\Delta_n^{(j)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} |\eta_j - \eta_k| / \exp\big(f(\eta_j)+f(\eta_k)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

и пусть $\Delta_n^{(0)} \leqslant \Delta_n^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Возникает вопрос: существует ли предел

(1) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}$$

и равняется ли он $d(E)$?

Доказано, что если 1° множество E есть границей области, содержащей точку $z = \infty$, и 2° E есть сумма континуумов, то существует предел (1), равный $d(E)$.

J. Górski (Kraków)

ON A CERTAIN SEQUENCE WHICH CONVERGES TO THE GENERALIZED TRANSFINITE DIAMETER OF A PLANE SET

SUMMARY

Let E be a bounded and closed plane set and $f(z)$ a real continuous function defined on E. Let $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\} = \zeta$ be a set of $n+1$ different points of E. We form the expression

$$U(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0\leqslant j<k\leqslant n} |\zeta_j - \mu_k| / \exp\big(f(\zeta_j)+f(\zeta_k)\big)$$

and denote by $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ a set of $n+1$ points of E such that $U(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \sup_{\zeta \in E} U(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. It is known that the limit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[s]{U(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)} = d(E) \geqslant 0, \qquad \text{where} \qquad s = \binom{n+1}{2},$$

exists; it is called the *generalized transfinite diameter* of E. We consider the product

$$\Delta_n^{(j)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}} |\eta_j - \eta_n| / \exp(f(\eta_j) + f(\eta_k)), \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Let $\Delta_n^{(0)} \leqslant \Delta_n^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. The question arises whether the limit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}} \tag{1}$$

exists and is equal to $d(E)$?

In this note we prove that if 1° E is a boundary of a domain which contains the point $z = \infty$ in its interior and 2° E is a sum of continua, then the limit (1) exists and is equal to $d(E)$.