W. Sierpiński (Warszawa)

O pewnych rozwinięciach liczb rzeczywistych w iloczyny nieskończone szybko zbieżne

1. E. B. Escott [3] podał następujące rozwinięcie liczby $\sqrt{(k+2)/(k-2)}$, gdzie $k > 2$, w iloczyn nieskończony

$$\sqrt{\frac{k+2}{k-2}} = \left(1+\frac{2}{k_1-1}\right)\left(1+\frac{2}{k_2-1}\right)\left(1+\frac{2}{k_3-1}\right)\ldots, \tag{1}$$

gdzie $k_1 = k$ oraz $k_{n+1} = k_n(k_n^2-3)$.

Niedawno dowiodłem (zob. [6]), że wzór ten jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego wzoru na rozwijanie liczb rzeczywistych $x > 1$ w iloczyn nieskończony szybko zbieżny, który można otrzymać w następujący prosty sposób:

Niech będzie dana liczba rzeczywista $x > 1$. Oznaczmy przez k_1 taką najmniejszą liczbę naturalną (oczywiście większą od 1), że $x > 1+2/(k_1-1)$ i przyjmijmy

$$x = \big(1+2/(k_1-1)\big)x_1.$$

Ponieważ $x_1 > 1$, więc z liczbą x_1 możemy postąpić jak z liczbą x itd. Powtarzając to postępowanie n razy (gdzie n jest liczbą naturalną), dochodzimy do wzoru

$$x = \left(1+\frac{2}{k_1-1}\right)\left(1+\frac{2}{k_2-1}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{k_n-1}\right)x_n, \quad \text{gdzie} \quad x_n > 1.$$

Łatwo dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 1$, tak że otrzymujemy rozwinięcie w iloczyn nieskończony

$$x = \left(1+\frac{2}{k_1-1}\right)\left(1+\frac{2}{k_2-1}\right)\left(1+\frac{2}{k_3-1}\right)\ldots, \tag{2}$$

przy czym można dowieść, że

$$k_{n+1} \geqslant k_n^2 - k_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Szczególnym przypadkiem tego rozwinięcia dla $x = \sqrt{(k+2)/(k-2)}$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od 2, jest właśnie rozwinięcie (1), podane przez E. B. Escotta (jak to wyprowadzimy dalej w § 4).

Udowodniłem nadto, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ istnieje tylko jedno rozwinięcie (2), gdzie k_n $(n = 1, 2, \ldots)$ są liczbami naturalnymi spełniającymi nierówności (3) oraz że x wtedy i tylko wtedy jest liczbą wymierną, gdy istnieje taka liczba naturalna s, że $k_{n+1} = k_n^2 - k_n$ dla $n \geqslant s$. Dowiodłem wreszcie, że jeżeli $1 < x < 3$, to $k_{n+2} > 10^{2^{n-1}}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, skąd wynika szybka zbieżność iloczynu (2).

2. Jednocześnie z moją pracą ukazała się praca A. Oppenheima, [4], w której autor zajmuje się nieco ogólniejszymi rozwinięciami.

Niech $n_1, n_2, \ldots$ oznacza ciąg nieskończony liczb naturalnych, x zaś daną liczbę rzeczywistą większą od 1. Oznaczmy przez d_1 najmniejszą taką liczbę naturalną, że $x > 1+n_1/d_1$ i przyjmijmy

$$x = (1+n_1/d_1)x_1.$$

Wówczas $x_1 > 1$. Oznaczmy dalej przez d_2 najmniejszą taką liczbę naturalną, że $x_1 > 1+n_2/d_2$ i przyjmijmy $x_1 = (1+n_2/d_2)x_2$. Ogólnie, mając liczbę $x_{k-1} > 1$ oznaczmy przez d_k taką najmniejszą liczbę naturalną, że

$$x_{k-1} > 1+n_k/d_k$$

przyjmijmy $x_{k-1} = (1+n_k/d_k)x_k$. Jest

$$x = (1+n_1/d_1)(1+n_2/d_1)\ldots(1+n_k/d_k)x_k. \tag{4}$$

Udowodnimy teraz (nieco krócej niż A. Oppenheim), że $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = 1$.

Gdyby nie było $\lim\limits_{k\to\infty}(n_k/d_k) = 0$, to istniałaby taka liczba dodatnia a, że $n_k/d_k \geqslant a$ dla nieskończenie wielu różnych k, na przykład dla $k = k_1, k_2, \ldots$ Dla dowolnej liczby naturalnej s byłoby więc wobec (4) (gdzie $x_k > 1$)

$$x > (1+n_{k_1}/d_{k_1})(1+n_{k_2}/d_{k_2})\ldots(1+n_{k_s}/d_{k_s}) > (1+a)^s,$$

co jest niemożliwe. Musi więc być $\lim\limits_{k\to\infty}(n_k/d_k) = 0$ i zatem $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \infty$, więc $\lim\limits_{k\to\infty}[n_k/(d_k-1)] = 0$. Natomiast z definicji liczby d_k wynika, że (w razie, gdy $d_k > 1$)

$$1+n_k/d_k < x_{k-1} \leqslant 1+n_k/(d_k-1). \tag{5}$$

Jest więc $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k-1} = 1$ i wzór (4) daje rozwinięcie liczby x w iloczyn nieskończony

$$x = (1+n_1/d_1)(1+n_2/d_2)(1+n_3/d_3)\ldots \tag{6}$$

Podany na początku tego paragrafu algorytm doprowadza więc do rozwinięcia każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ w iloczyn nieskończony (6). Wyprowadzimy teraz pewną nierówność, którą muszą spełniać uzyskane za pomocą tego algorytmu liczby d_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Niech k oznacza liczbę naturalną. Przyjmując $x_0 = x$ będziemy więc, w myśl naszego algorytmu, mieli dla $d_k > 1$ nierówności (5) i podobnie nierówność

$$1+n_{k+1}/d_{k+1} < x_k.$$

Wobec $x_{k-1} = (1+n_k/d_k)x_k$ znajdujemy stąd nierówność

$$(1+n_k/d_k)(1+n_{k+1}/d_{k+1}) < x_{k-1} \leqslant 1+n_k/(d_k-1),$$

a zatem

$$1+\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}} < \left(1+\frac{n_k}{d_k-1}\right)\bigg/\left(1+\frac{n_k}{d_k}\right) = 1+\frac{n_k}{(d_k-1)(d_k+n_k)},$$

co daje

$$d_{k+1} > (d_k-1)(d_k+n_k)n_{k+1}/n_k, \tag{7}$$

co jest też oczywiście prawdą i dla $d_k = 1$.

Wyznaczone za pomocą naszego algorytmu liczby $d_1, d_2, \ldots$ spełniają więc dla $k = 1, 2, \ldots$ nierówności (7).

Z (7) wynika bezpośrednio, że

$$d_{k+1}-(d_k-1) > (d_k-1)[(d_k+n_k)n_{k+1}-n_k]/n_k =$$
$$= (d_k-1)(d_k n_{k+1}/n_k+n_{k+1}-1) \geqslant 0,$$

więc $d_{k+1} > d_k-1$, czyli

$$d_{k+1} \geqslant d_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Udowodnimy teraz, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ i każdego ciągu nieskończonego liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots$ istnieje tylko jedno rozwinięcie (6), gdzie d_k $(k = 1, 2, \ldots)$ są liczbami naturalnymi, spełniającymi nierówności (7).

Przypuśćmy, że (6) jest takim rozwinięciem. Wobec (6) $x > 1+n_1/d_1$ i jeżeli $d_1 = 1$, to d_1 jest oczywiście najmniejszą liczbą naturalną spełniającą tę nierówność. Przypuśćmy dalej, że $d_1 > 1$, a zatem że $d_1 \geqslant 2$. Wobec (8) jest wówczas też $d_k \geqslant 2$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Wobec (7) mamy

$$1+\frac{n_1}{d_1-1} = \left(1+\frac{n_1}{d_1}\right)\left(1+\frac{n_1}{(d_1-1)(d_1+n_1)}\right) \geqslant \left(1+\frac{n_1}{d_1}\right)\left(1+\frac{n_2}{d_2-1}\right).$$

Podobnie znajdujemy

$$1+\frac{n_2}{d_2-1} \geqslant \left(1+\frac{n_2}{d_2}\right)\left(1+\frac{n_3}{d_3-1}\right)$$

itd., a zatem

$$1+\frac{n_1}{d_1-1} \geqslant \left(1+\frac{n_1}{d_1}\right)\left(1+\frac{n_2}{d_2}\right)\ldots\left(1+\frac{n_k}{d_k}\right) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

skąd wobec (6), $1+n_1/(d_1-1) \geqslant x$, co wobec $x > 1+n_1/d_1$ dowodzi, że d_1 jest najmniejszą taką liczbą naturalną, iż $x > 1+n_1/d_1$. Przyjmując $x = (1+n_1/d_1)x_1$ otrzymujemy wobec (6) rozwinięcie

$$x_1 = (1+n_2/d_2)(1+n_3/d_3)\ldots,$$

skąd podobnie jak wyżej dowodzimy, że d_2 jest najmniejszą taką liczbą naturalną, że $x_1 > 1+n_2/d_2$ itd. Liczby $d_1, d_2, \ldots$ są więc (przez liczbę x i ciąg liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots$) określone w zupełności.

Tak więc udowodniliśmy następujące twierdzenie (którego w tej postaci nie wypowiedział A. Oppenheim [4]; por. jego twierdzenia 1 i 2):

TWIERDZENIE 1. *Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ oraz każdego ciągu nieskończonego $n_1, n_2, \ldots$ liczb naturalnych istnieje jedyne rozwinięcie* (6), *gdzie $d_1, d_2, \ldots$ są liczbami naturalnymi, spełniającymi nierówności* (7) *dla $k = 1, 2, \ldots$*

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 2. *Na to, by liczba $x > 1$, dająca rozwinięcie* (6), *uzyskane za pomocą podanego wyżej algorytmu, była wymierna, potrzeba i wystarcza, żeby istniała taka liczba naturalna s, że*

$$n_k(d_{k+1}-1) = (d_k-1)(d_k+n_k)n_{k+1} \quad \textit{dla} \quad k \geqslant s. \tag{9}$$

(Twierdzenia tego w tej postaci nie wypowiedział A. Oppenheim; por. jego twierdzenia 3 i 4.)

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje liczba naturalna s, dla której mamy wzór (9). Możemy przy tym założyć, że $d_s > 1$, gdyż jak wiemy, nierówność ta zachodzi dla dostatecznie wielkich s. Wobec (8) będzie więc $d_k > 1$ dla $k \geqslant s$. Wobec (9) znajdujemy więc

$$1+\frac{n_k}{d_k-1} = \left(1+\frac{n_k}{d_k}\right)\left(1+\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}-1}\right) \quad \text{dla} \quad k = s, s+1, s+2, \ldots, \tag{10}$$

skąd, wobec $\lim\limits_{k\to\infty}[n_{k+1}/(d_{k+1}-1)] = 0$, znajdujemy od razu

$$1+\frac{n_s}{d_s-1} = \left(1+\frac{n_s}{d_s}\right)\left(1+\frac{n_{s+1}}{d_{s+1}}\right)\left(1+\frac{n_{s+2}}{d_{s+2}}\right)\ldots = x_{s-1},$$

co wobec (4) dowodzi, że x jest liczbą wymierną. Warunek twierdzenia 2 jest więc dostateczny.

Przypuśćmy teraz, że $x > 1$ jest liczbą wymierną. Wobec (4) liczby x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ są więc też wymierne i wobec $x_k > 1$ możemy przyjąć $x_{k-1} = 1+l_k/m_k$, gdzie l_k i m_k są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. Wobec $x_{k-1} = (1+n_k/d_k)x_k$, znajdujemy

$$l_{k+1}/m_{k+1} = (l_k d_k - m_k n_k)/[m_k(d_k+n_k)],$$

co z uwagi na to, że ułamek l_{k+1}/m_{k+1} jest nierozkładalny, daje

$$l_{k+1} \leqslant l_k d_k - m_k n_k. \tag{11}$$

Lecz d_k oznacza najmniejszą taką liczbę naturalną, że $x_{k+1} = 1+l_k/m_k > 1+n_k/d_k$, a więc taką najmniejszą liczbę naturalną, że $l_k d_k > m_k n_k$, skąd wynika, że $l_k(d_k-1) \leqslant m_k n_k$, czyli $l_k d_k - m_k n_k \leqslant l_k$. Wobec (11) znajdujemy więc

$$l_{k+1} \leqslant l_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ciąg nieskończony liczb naturalnych $l_1, l_2, \ldots$ jest więc nierosnący, skąd wynika, że poczynając od pewnego miejsca wszystkie wyrazy jego muszą być równe. Istnieje więc taka liczba naturalna s, że $l_{k+1} = l_k$ dla $k \geqslant s$. Wzór (11), wobec $l_k d_k - m_k n_k \leqslant l_k$, daje zatem

$$l_k d_k - m_k n_k = l_k \quad \text{dla} \quad k \geqslant s,$$

czyli $l_k(d_k-1) = m_k n_k$ dla $k \geqslant s$, skąd $d_k \neq 1$ oraz $x_{k-1} = 1+l_k/m_k = 1+n_k/(d_k-1)$, jak też $x_k = 1+n_{k+1}/(d_{k+1}-1)$ dla $k \geqslant s$. Wobec $x_{k-1} = (1+n_k/d_k)x_k$ znajdujemy więc wzór (10), z którego wynika wzór (9). Warunek twierdzenia 2 jest zatem konieczny.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 2.

3. Przyjmijmy teraz w szczególności $n_k = 1$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ Z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy od razu

TWIERDZENIE 3. *Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ istnieje jedyne rozwinięcie w iloczyn nieskończony*

$$x = (1+1/d_1)(1+1/d_2)(1+1/d_3)\ldots, \tag{12}$$

gdzie d_k $(k = 1, 2, \ldots)$ są takimi liczbami naturalnymi, że $d_{k+1} \geqslant d_k^2$ dla $k = 1, 2, \ldots$, przy tym na to, by liczba x była wymierna, potrzeba i wystarcza, żeby istniała taka liczba naturalna s, iż $d_{k+1} = d_k^2$ dla $k \geqslant s$.

Rozwinięcie (12) *otrzymujemy za pomocą następującego algorytmu: Wyznaczamy najmniejszą taką liczbę naturalną d_1, że $x > 1+1/d_1$, przyjmujemy $x = (1+1/d_1)x_1$ i z liczbą x_1 postępujemy tak, jak postąpiliśmy z liczbą x itd.*

Twierdzenie to podałem w pracy [5], w 1909 r., przy czym punktem wyjścia moich rozważań był prosty algorytm, określający rozwinięcie liczby x. Z pracy A. Oppenheima dowiedziałem się, że twierdzenie 3 podał już G. Cantor [1] w 1869 r.

Punkt wyjścia G. Cantora był inny. Był nim mianowicie znany wzór Eulera

$$1/(1-t) = (1+t)(1+t^2)(1+t^4)\ldots(1+t^{2^k})\ldots \quad \text{dla} \quad |t| < 1.$$

Dla $t = 1/k$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od 1, daje on rozwinięcie (12) liczby $x = k/(k-1)$, gdzie $d_1 = k$ oraz $d_{i+1} = d_i^2$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Stąd łatwy wniosek, że jeżeli w rozwinięciu (12) mamy, dla pewnej liczby naturalnej s, $d_{i+1} = d_i^2$ dla $i \geqslant s$, to x jest liczbą wymierną. G. Cantor dowodzi następnie, że każda liczba rzeczywista $x > 1$ daje jedyne rozwinięcie (12), gdzie d_i $(i = 1, 2, \ldots)$ są liczbami naturalnymi oraz $d_{i+1} \geqslant d_i^2$ dla $i = 1, 2, \ldots$, i wyprowadza algorytm dla otrzymywania tego rozwinięcia.

4. Przyjmijmy teraz $n_k = 2$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Z twierdzeń 1 i 2, zakładając $k_i = d_i + 1$ dla $i = 1, 2, \ldots$, otrzymujemy od razu

TWIERDZENIE 4. *Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ istnieje jedyne rozwinięcie na iloczyn nieskończony* (2), *gdzie k_n $(n = 1, 2, \ldots)$ są liczbami naturalnymi, spełniającymi nierówności* (3), *przy czym na to, by liczba x była wymierna, potrzeba i wystarcza, żeby istniała taka liczba naturalna s, że $k_{n+1} = k_n^2 - k_n$ dla $n \geqslant s$.*

Rozwinięcie (2) *otrzymujemy wyznaczając taką najmniejszą liczbę naturalną k_1, że $x > 1 + 2/(k_1 - 1)$, przyjmując $x = [1 + 2/(k_1 - 1)]x_1$ i postępując z liczbą x_1 jak z liczbą x itd.*

Jest to właśnie moje twierdzenie, o którym wspomniałem na początku tej pracy.

Pokażemy teraz, jak z twierdzenia 4 można wyprowadzić rozwinięcie (1) E. B. Escotta.

Niech k oznacza daną liczbę naturalną większą od 2. Załóżmy, że $x = \sqrt{(k+2)/(k-2)}$ i wyznaczmy najmniejszą taką liczbę naturalną k_1, że $x > 1 + 2/(k_1 - 1)$. Ponieważ, jak łatwo sprawdzić,

$$[k/(k-2)]^2 > (k+2)/(k-2) > [(k+1)/(k-1)]^2,$$

więc

$$1 + 2/(k-2) = k/(k-2) > \sqrt{(k+2)/(k-2)} > (k+1)/(k-1) = 1 + 2/(k-1),$$

co dowodzi, że $k_1 = k$, a ponieważ

$$(k+2)/(k-2) = [1 + 2/(k-1)]^2 (k^3 - 3k + 2)/(k^3 - 3k - 2),$$

więc znajdujemy

$$\sqrt{(k+2)/(k-2)} = [1 + 2/(k_1 - 1)] \sqrt{(k_2 + 2)/(k_2 - 2)}, \tag{13}$$

gdzie $k_2 = k_1^3 - 3k_1$. Przez łatwą indukcję znajdujemy stąd

$$k_1 = k, \quad k_{n+1} = k_n^3 - 3k_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

co właśnie daje wzór (1). Ponieważ wzór (13), gdzie $k = k_1$, jest prawdziwy dla każdej liczby rzeczywistej $k > 2$, więc wzór (1), gdzie $k_1 = k$ oraz $k_{n+1} = k_n^3 - 3k_n$, jest prawdziwy dla każdej liczby rzeczywistej k większej od 2.

Prace cytowane

[1] G. Cantor, *Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte,* Zeitschrift für Math. u. Phys. 14 (1869), str. 152-158.

[2] — *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts herausgegeben von Ernst Zermelo,* Berlin 1932, str. 43-50.

[3] E. B. Escott, *Rapid method for extracting a square root,* Amer. Math. Monthly 44 (1937), str. 644-646.

[4] A. Oppenheim, *On the representation of real numbers by products of rational numbers,* Quarterly Journal of Math. Oxford Second Series 4 (1953), str. 303-307.

[5] W. Sierpiński, *O systematycznych rozwinięciach liczb na iloczyny nieskończone,* Prace Mat.-Fiz. 20 (1909), str. 215-230.

[6] — *Généralisation d'une formule de E. B. Escott pour les racines carrées,* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 22 (1953), str. 520-529.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

В. Серпинский (Варшава)

О НЕКОТОРЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В БЫСТРО СХОДЯЩИЕЕСЯ БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В статье доказано (теорема 4), что всякое действительное число $x>1$ разлагается единственным образом в бесконечное произведение

$$x = \big(1+2/(k_1-1)\big)\big(1+2/(k_2-1)\big)\big(1+2/(k_3-1)\big)\ldots, \tag{1}$$

где k_n натуральные числа, для которых

$$k_{n+1} \geqslant k^2-k_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Число x рациональное тогда и только тогда, когда для достаточно больших n в формуле (2) имеетса равенство.

Для всякого $n \geqslant 1$ число k_n в разложении (1) является наименьшим натуральным числом, для которого

$$\frac{x}{\big(1+2/(k_1-1)\big)\ldots\big(1+2/(k_{n-1}-1)\big)} > 1+\frac{2}{k_n-1} \qquad (k_0 = \infty).$$

Теорему эту получил Э. В. Эскотт для частного случая, когда $x = \sqrt{(k+2)/(k-2)}$. В этом случае $k_1 = k$, $k_{n+1} = k_n(k_n^2-3)$.

Кроме того доказано (теорема 1), усиливая результаты А. Оппенгейма и упрощая его рассуждения, что для всякого действительного числа $x > 1$ и всякой бесконечной последовательности $n_1, n_2, \ldots$ натуральных чисел имеется единственное разложение

$$x = (1+n_1/d_1)(1+n_2/d_2)(1+n_3/d_3)\ldots,$$

причем d_k натуральные числа, для которых

$$d_{k+1} > (d_k-1)(d_k+n_k)n_{k+1}/n_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Приводится тоже достаточное и необходимое условие, которому должны удовлетворять числа d_k, чтобы число x было рациональное (теорема 2).

W. Sierpiński (Warszawa)

ON CERTAIN EXPANSIONS OF REAL NUMBERS INTO INFINITE FASTCONVERGING PRODUCTS

SUMMARY

The author proves (theorem 4) that for every real number $x > 1$ there exists a unique expansion into an infinite product

$$x = \big(1+2/(k_1-1)\big)\big(1+2/(k_2-1)\big)\big(1+2/(k_3-1)\big)\ldots, \tag{1}$$

where k_n are natural numbers satisfying the inequalities

$$k_{n+1} \geqslant k_n^2 - k_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

The number x is rational if and only if for sufficiently large n we have equality in (2).

For every $n \geqslant 1$ the number k_n in the expansion (1) is the least natural number for which

$$\frac{x}{\big(1+2/(k_1-1)\big)\ldots\big(1+2/(k_{n-1}-1)\big)} > 1+\frac{2}{k_n-1} \qquad (k_0 = \infty).$$

This theorem has been obtained by E. B. Escott in the particular case of $x = \sqrt{(k+2)/(k-2)}$. Then $k_1 = k$, $k_{n+1} = k_n(k_n^2-3)$.

Moreover, strengthening A. Oppenheim's results and simplifying his argumentation, the author proves (theorem 1), that for every real number $x > 1$ and every infinite sequence of natural numbers $n_1, n_2, \ldots$ there exists a unique expansion

$$x = (1+n_1/d_1)(1+n_2/d_2)(1+n_3/d_3)\ldots$$

where d_k are natural numbers satisfying the inequalities

$$d_{k+1} > (d_k-1)(d_k+n_k)n_{k+1}/n_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

The author gives also the necessary and sufficient condition which must be satisfied by the numbers d_k in order that the number x be rational (theorem 2).
