ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XXIV (1984)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XXIV (1984)

. F. Jabłoński, A. Wesołowski (Lublin)

Sur quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions bornées à coefficients réels

I. W. Janowski [6] et d'autres auteurs, p. ex. [3], [5], ont étudié les classes des fonctions analytiques bornées dans $K_1 = \{z\colon |z| < 1\}$, entre autres les sous-classes de la classe P des fonctions de Carathéodory $p(z) = 1+p_1 z+ \ldots$, $z \in K_1$, qui satisfont à l'inégalité

$$|p(z)-M| < M, \qquad M \geqslant 1,\ z \in K_1. \tag{1.1}$$

Soit P_M la classe des fonctions représentée par la formule de Herglotz [4].

$$p(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+ze^{i\theta}}{1+aze^{i\theta}}\, d\mu(\theta), \qquad z \in K_1,\ a = 1/M-1 \tag{1.2}$$

où $\mu(\theta)$ est une fonction non décroissante dans l'intervalle $\langle -\pi, \pi\rangle$ et $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$. Le domaine $p(K_1)$ étant convexe, la relation (1.1) est satisfaite.

Désignons par $\bar{P}_M \subset P_M$ la classe des fonctions q telles que $q(z) = 1+ +q_1 z+ \ldots$, $z \in K_1$, $q_n = \bar{q}_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, et que

$$q(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+(1+a)z\cos\theta+az^2}{1+2az\cos\theta+a^2 z^2}\, d\mu(\theta), \qquad z \in K_1 \tag{1.3}$$

où $\mu(\theta)$ est une fonction non décroissante dans l'intervalle $\langle -\pi, \pi\rangle$, $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$, $a = 1/M-1$, $M \geqslant 1$. Observons que $\bar{P}_\infty = \bar{P}$, où $\bar{P}$ est la classe des fonctions q telles que $\operatorname{Re} q(z) > 0$, $z \in K_1$ et $q_n = \bar{q}_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Désignons enfin par $\bar{S}_M^*$ la classe des fonctions f telles que $f(z) = z+ +a_2 z^2+ \ldots$, $a_n = \bar{a}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, et que

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = q(z), \qquad z \in K_1,\ q(z) \in \bar{P}_M. \tag{1.4}$$

Dans la suite de ce travail nous allons déterminer le domaine de variation de $q(z) \in \bar{P}_M$, et nous établirons des limitations exactes pour $\arg q(z)$, $\operatorname{Re} g(z)$, $|q(z)|$ et $|f(z)|$ lorsque $f \in \bar{S}_M^*$.

II. THÉORÈME 2.1. *Si $q \in \bar{P}_M$ et z est fixé, $z \in K_1$, le domaine de variation de $q(z)$ est le domaine limité par l'arc de circonférence*

$$w = \frac{1+(1+a)zt+az^2}{1+2azt+a^2z^2}, \quad \textit{pour } t \in \langle -1, 1 \rangle \tag{2.1}$$

et par le segment de droite

$$w = t \cdot \frac{1-z}{1-az} + (1-t) \cdot \frac{1+z}{1+az}, \quad \textit{pour } t \in \langle 0, 1 \rangle \tag{2.2}$$

où $a = 1/M - 1$, $M \geqslant 1$.

Observons que dans le cas où $\operatorname{Im} z = 0$ *les formules* (2.1) *et* (2.2) *représentent le segment* $\left[\frac{1-r}{1-ar}, \frac{1+r}{1+ar}\right]$.

Démonstration. En vertu du théorème de Aschnievitsch et Ulina [2] et de (1.3) l'ensemble des valeurs de la fonction $q(z)$ pour z fixé, $z \in K_1$, est l'enveloppe convexe de la courbe

$$w = \frac{1+(1+a)zt+az^2}{1+2azt+a^2z^2}, \quad \text{où } t = \cos\theta,\ t \in \langle -1, 1 \rangle. \tag{2.3}$$

Pour $t \in (-\infty, +\infty)$ l'équation (2.3) représente la circonférence

$$\left| w - \tfrac{1}{4}\left(\frac{1+3a-3a^2r^2-a^3r^2}{a(1-a^2r^2)} + i\frac{a-1}{a} \operatorname{ctg} \varphi \right) \right| = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{\sqrt{(1+a^2r^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\varphi}}{(1-a^2r^2)\,|\sin\varphi|} \tag{2.4}$$

où $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, elle coupe l'axe réel aux points

$$u_1 = \frac{1+a}{2a}, \quad u_2 = \frac{1-ar^2}{1-a^2r^2} \tag{2.5}$$

et passe par les points

$$w_1 = \frac{1-z}{1-az}, \quad w_2 = \frac{1+z}{1+az}. \tag{2.6}$$

Comme $t \in \langle -1, 1 \rangle$, nous choisissons l'arc de la circonférence (2.4), qui est compris entre les points w_1 et w_2 et contient le point u_2. Par conséquent l'enveloppe convexe de la courbe (2.3) est le domaine limité par l'arc de circonférence (24) et par le segment de droite joignant les points w_1 et w_2, que nous appellerons sommets de l'enveloppe. La démonstration du thèorème est donc achevée.

THÉORÈME 2.2. *Si $q(z) \in \bar{P}_M$, on a pour z fixé, $z \in K_1$, la limitation exacte*

$$(2.7) \qquad -\operatorname{arc\,tg} \frac{(1-a)|\operatorname{Im} z|}{1-(1+a)\operatorname{Re} z + a|z|^2} \leqslant \arg q(z) \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{(1-a)|\operatorname{Im} z|}{1+(1+a)\operatorname{Re} z + a|z|^2}.$$

L'égalité a lieu pour la fonction $q(z) = \dfrac{1+z}{1+az}$, *et pour la fonction* $q_1(z) = q(-z)$, $z \in K_1$.

La démonstration du théorème résulte directement de l'interprétation géométrique du théorème 2.1. Il suffit de remarquer que l'ensemble des valeurs de $q(z) \in \bar{P}_M$ est contenu dans l'angle limité par les demi-droites qui joignenu l'origine aux sommets w_1 et w_2.

THÉORÈME 2.3. *Si $q(z) \in \bar{P}_M$, on a pour z fixé, $z \in K_1$, les limitations exactes*

$$(2.8) \qquad \operatorname{Re} \frac{1-z}{1-az} \leqslant \operatorname{Re} q(z) \leqslant \operatorname{Re} \frac{1+z}{1+az}$$

$$\text{si} \quad -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{az}+az\right) \geqslant \frac{4|z|^2-(z-\bar{z})^2}{2|z|^2},$$

$$(2.9) \qquad \min\left(\operatorname{Re}\frac{1-z}{1-az}, \operatorname{Re}\frac{1+z}{1+az}\right) \leqslant \operatorname{Re} q(z) \leqslant \frac{1+3a-(3-a)a^2|z|^2}{4a(1-a^2|z|^2)} + \frac{a-1}{4a}\,\frac{|az-1/az|}{|\operatorname{Im}(az+1/az)|}$$

$$\text{si} \quad \left|\operatorname{Re}\left(az+\frac{1}{az}\right)\right| \leqslant \frac{4|z|^2-(z-\bar{z})^2}{2|z|^2},$$

$$(2.10) \qquad \operatorname{Re} \frac{1+z}{1+az} \leqslant \operatorname{Re} q(z) \leqslant \operatorname{Re} \frac{1-z}{1-az}$$

$$\text{si} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{az}+az\right) \geqslant \frac{4|z|^2-(z-\bar{z})^2}{2|z|^2}.$$

La fonction extrémale est la fonction

$$(2.11) \qquad q(z) = \frac{1+(1+a)zt+az^2}{1+2azt+a^2z^2}, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

L'égalité dans les cas (2.8), (2.10) *et dans celui du premier membre de* (2.9) *est atteinte par la fonction* (2.11), *respectivement pour* $t = \pm 1$. *Dans le second* *membre de* (2.9) *l'égalité est atteinte par la fonction* (2.11) *pour* t *donné par la formule*

$$(2.12) \qquad t = \frac{-(1+a^2|z|^2)+|1-a^2z^2|\,|z-\bar{z}|/a|z|}{2a \operatorname{Re} z}, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Si $z \in K_1$ *et* $\operatorname{Im} z = 0$, *on a*

$$(2.13) \qquad \frac{1-|z|}{1-a|z|} \leqslant \operatorname{Re} q(z) \leqslant \frac{1+|z|}{1+a|z|}.$$

Démonstration. Posons

$$(2.14) \qquad \operatorname{Im} S_0 = \operatorname{Im} w$$

où S_0 est le centre de la circonférence (2.4) et w est défini par la formule (2.1). A partir de l'équation (2.14) on détermine le paramètre t

$$(2.15) \qquad t = \frac{-(1+a^2r^2)+|\sin\varphi|\sqrt{(1+a^2r^2)^2-4a^2r^2\cos^2\varphi}}{2ar\cos\varphi}$$

où $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $z \in K_1$, $a = 1/M-1$, $M \geqslant 1$.

Un calcul facile montre que t, donné par la formule (2.15), appartient à l'intervalle $\langle -1, 1\rangle$ si la condition suivante est vérifiée

$$(2.16) \qquad \left|\frac{1+a^2r^2}{2ar}\cos\varphi\right| \leqslant 1+\sin^2\varphi.$$

En tenant compte de la définition du *domaine de variation de la fonction* $q(z) \in \bar{P}_M$ (théorème 2.1) et des relations (2.15) et (2.16) on constate que

1° $\operatorname{Re} w_1 \leqslant \operatorname{Re} q(z) \leqslant \operatorname{Re} w_2$ *si* $-\dfrac{1+a^2r^2}{2ar}\cos\varphi \geqslant 1+\sin^2\varphi$,

2° $\min(\operatorname{Re} w_1, \operatorname{Re} w_2) \leqslant \operatorname{Re} q(z) \leqslant \operatorname{Re} S_0 + R$ *si* $\left|\dfrac{1+a^2r^2}{2ar}\cos\varphi\right| \leqslant 1$ $+\sin^2\varphi$,

3° $\operatorname{Re} w_2 \leqslant \operatorname{Re} q(z) \leqslant \operatorname{Re} w_1$ *si* $\dfrac{1+a^2r^2}{2ar}\cos\varphi \geqslant 1+\sin^2\varphi$,

où w_1 et w_2 sont donnés par les formules (2.6), S_0 et R sont respectivement le centre et le rayon de la circonférence (2.4). Les conditions 1°, 2° et 3°, exprimées au moyen de z, fournissent la conclusion du théorème dans le cas où $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Si $\operatorname{Im} z = 0$, le domaine de variation de $q(z)$ se réduit au segment $\left[\dfrac{1-r}{1-ar}, \dfrac{1+r}{1+ar}\right]$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 2.4. *Si* $q(z) \in \bar{P}_M$, *on a pour* z *fixé*, $z \in K_1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, *les* *limitations exactes*

$$(2.17)\qquad \left|\frac{1-z}{1-az}\right| \leqslant |q(z)| \leqslant \left|\frac{1+z}{1+az}\right|$$

$$\text{si}\qquad -\frac{(1-a^2|z|^2\,\mathrm{Re}\,z}{(1+3a-3a^2|z|^2-a^3|z|^2)\,\mathrm{Im}\,z} \geqslant \frac{|\mathrm{Im}\,z|}{1+(1+a)\,\mathrm{Re}\,z+a|z|^2},$$

$$(2.18)\qquad \frac{|\mathrm{Im}\,(1/az-z)|}{|az-1/az|} \leqslant |q(z)|$$

$$\leqslant \frac{1}{4|a|}\left[\sqrt{\frac{(1+3a-3a^2|z|^2-a^3|z|^2)^2}{(1-a^2|z|^2)^2}+(1-a)^2\left(\frac{\mathrm{Re}\,z}{\mathrm{Im}\,z}\right)^2}\right.$$

$$\left.+(1-a)\frac{|az-1/az|}{|\mathrm{Im}\,(az+1/az)|}\right],$$

$$\text{si}\qquad -\frac{|\mathrm{Im}\,z|}{1+(1+a)\,\mathrm{Re}\,z+a|z|^2} \leqslant -\frac{(1-a^2|z|^2)\,\mathrm{Re}\,z}{(1+3a-3a^2|z|^2-a^3|z|^2)\,\mathrm{Im}\,z}$$

$$\leqslant \frac{|\mathrm{Im}\,z|}{1+(1+a)\,\mathrm{Re}\,z+a|z|^2},$$

$$(2.19)\qquad \left|\frac{1+z}{1+az}\right| \leqslant |q(z)| \leqslant \left|\frac{1-z}{1-az}\right|$$

$$\text{si}\qquad \frac{(1-a^2|z|^2)\,\mathrm{Re}\,z}{(1+3a-3a^2|z|^2-a^3|z|^2)\,\mathrm{Im}\,z} \geqslant \frac{|\mathrm{Im}\,z|}{1+(1+a)\,\mathrm{Re}\,z+a|z|^2}.$$

Si $\mathrm{Im}\,z = 0$, $z \in K_1$, *on a*

$$(2.20)\qquad \frac{1-|z|}{1-a|z|} \leqslant |q(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1+a|z|}.$$

Dans les cas (2.17), (2.19), (2.20) *et dans celui du second membre de l'inégalité* (2.18), *la fonction extrémale est la fonction donnée par la formule* (2.11) *pour* $t = \pm 1$ *et pour la valeur correspondante* $t \in (-1, 1)$. *L'égalité dans le premier membre de l'inégalité* (2.18) *est réalisée par la fonction*

$$(2.21)\qquad q(z) = \frac{1-z}{1-az}t+(1-t)\frac{1+z}{1+az}, \qquad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Démonstration. Les valeurs extrémales de $|q(z)|$ résultent directement de l'interprétation géométrique de l'ensemble des valeurs de la fonction $q(z) \in \bar{P}_M$. Nous aurons donc à considérer les cas suivants:

1° si $\arg S_0 \geqslant \arg w_2$, on a $|w_1| \leqslant |q(z)| \leqslant |w_2|$,

2° si $\arg w_1 \leqslant \arg S_0 \leqslant \arg w_2$, on a $d \leqslant |q(z)| \leqslant |S_0|+R$,

3° si $\arg S_0 \leqslant \arg w_1$, on a $|w_2| \leqslant |q(z)| \leqslant |w_1|$, où w_1 et w_2 sont définis par les formules (2.6), S_0 et R sont respectivement le centre et le rayon de la circonférence (2.4) et d est la distance de l'origine au segment de droite donné par l'équation (2.2). Dans le cas où $\operatorname{Im} z = 0$, $z \in K_1$, l'ensemble des valeurs de la fonction $q(z)$ se réduit, comme on le sait, au segment de droite $\left[\frac{1-r}{1-ar}, \frac{1+r}{1+ar}\right]$. La démonstration du théorème est ainsi achevée.

III. Soit $f \in \bar{S}_M^*$, $z \in K_1$. De l'égalité (1.4) il résulte que l'ensemble des valeurs de la fonctionelle $zf'(z)/f(z)$ se confond avec l'ensemble des valeurs de la fonction $q(z) \in \bar{P}_M$. Par conséquent les limitations auxquelles satisfont les grandeurs $\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}$, $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ et $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ se confondent avec celles que vérifient $\arg q(z)$, $\operatorname{Re} q(z)$ et $|q(z)|$.

Nous avons encore à trouver une limitation exacte pour $|f(z)|$.

THÉORÈME 3.1. *Si $f(z) \in \bar{S}_M^*$, $M \geqslant 1$, $a = 1/M-1$, on a, pour z fixé, $z \in K_1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, les limitations exactes*

$$\frac{|z|}{|1-az|^{(a-1)/a}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{|1+az|^{(a-1)/a}} \tag{3.1}$$

$$si \quad -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{az}+az\right) \geqslant \frac{4|z|^2-(z-\bar{z})^2}{2|z|^2},$$

$$\min\left(\frac{|z|}{|1-az|^{(a-1)/a}}, \frac{|z|}{|1+az|^{(a-1)/a}}\right) \leqslant |f(z)| \tag{3.2}$$

$$\leqslant \frac{|z|}{|1+2azt+a^2 z^2|^{(a-1)/a}}$$

$$si \quad \left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{az}+az\right)\right| \leqslant \frac{4|z|^2-(z-\bar{z})^2}{2|z|^2},$$

t étant donné par la formule (2.12),

$$\frac{|z|}{|1+az|^{(a-1)/a}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{|1-az|^{(a-1)/a}} \tag{3.3}$$

$$si \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{az}+az\right) \geqslant \frac{4|z|^2-(z-\bar{z})^2}{2|z|^2}.$$

Si $\operatorname{Im} z = 0$, *on a*

$$\frac{|z|}{(1-a|z|)^{(a-1)/a}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1+a|z|)^{(a-1)/a}}. \tag{3.4}$$

La fonction extrémale est la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(1+2azt+a^2 z^2)^{(a-1)/a}} \tag{3.5}$$

respectivement pour $t = \pm 1$ *et* t *donné par la formule* (2.12).

Démonstration. Soit $z = re^{i\varphi}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $r \in \langle 0, 1)$. En dérivant par rapport à la variable r membre à membre l'identité bien connue

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right| + i \arg \frac{f(z)}{z}, \qquad |z| = 1,$$

on obtient

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right| + ir \frac{\partial}{\partial r} \arg \frac{f(z)}{z},$$

d'où

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right|. \tag{3.6}$$

De cette égalité et de la relation (1.4) on tire:

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{1}{r} \left(\operatorname{Re} q(z) - 1 \right). \tag{3.7}$$

En tenant compte des inégalités (2.8), (2.9), (2.10) et en intégrant la dernière égalité dans l'intervalle de 0 à r on obtient la conclusion du théorème. Signalons encore que le second membre de l'inégalité (2.9) est atteint par $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)}$ où la fonction $f(z)$ est donnée par la formule (2.11), t est défini par la formule (2.12) et z satisfait à la condition

$$\left| \operatorname{Re} \left(az + \frac{1}{az} \right) \right| \leqslant \frac{4|z|^2 - (z - \bar{z})^2}{2|z|^2}.$$

Si $\operatorname{Im} z = 0$, le résultat est immédiat, puisque

$$-\frac{1-a}{1-ar} \leqslant \frac{\partial}{\partial r} \ln \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leqslant \frac{1-a}{1+ar}.$$

La démonstration du théorème est donc achevée.

Si $M \to \infty$, les résultats obtenus se confondent avec ceux du travail [1] pour $k = 1$.

Travaux cités

[1] I. A. Aleksandrov et V.V. Černikov, *Propriétés extrémales des représentations étoilées* (en russe), Sib. Mat. Žurn. T. I No 2 (1963), 241–267.
[2] I. Ya. Ašnievič et G. V. Ulina, *Sur les domaines de valeurs des fonctions analytiques représentées par une intégrale de Stieltjes* (en russe), Vestnik L. G. U. 11 (1955), 31–42.
[3] J. Clunie, *On meromorphic schlicht functions*, J. London Math. Soc. 34 (1959), 215–155.
[4] G. M. Goluzin, *Théorie géométrique de la variable complexe* (en russe), Moscou 1966.
[5] Z. Jakubowski, *On some applications of the Clunie method*, Ann. Polon. Math. 26 (1972), 211–216.
[6] W. Janowski, *Extremal problems for a family of functions with positive, real parts and for some related families*, Bull. Acad. Sci, Ser. Sci. math. astr. et phys. 17 (1969), 129–155.

ZAKŁAD MATEMATYKI STOSOWANEJ POLITECHNIKI LUBELSKIEJ
ZAKŁAD ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI, UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
LUBLIN, POLOGNE