ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XXI (1979)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XXI (1979)

В. П. Одинец (Ленинград)

Об одной лемме С. Банаха о функцях пика

Резуме. В работе обобщается результата С. Банаха о функциях пика и дается приложение к функциональной характеристике компактов, с 1-ой аксиомой счетности, в классе тихоновских пространств.

С. Банахом в его книге ([1], стр. 144) была дана характеристика вещественнозначных функций пика на метрическом компакте Q с помощью точек гладкости пространства $C(Q)$. При этом фактически им была доказана:

Лемма (Банаха). а) *Если Q — секвенциальный компакт* (1), *то функции пика из $C(Q)$ будут и точками гладкости. При этом, если функция пика x достигает нормы в точке $q_0 \in Q$, то*

$$(1) \qquad \lim_{t\to 0} t^{-1}(\|x+ty\|-\|x\|) = y(q_0)\operatorname{sign} x(q_0) \quad \text{для любого } y \in C(Q).$$

б) *Если Q — метрический компакт, то любая точка гладкости в $C(Q)$ будет и функцией пика.*

В работе [2] (следствие 3.7) удалось избавится от каких-либо требований на компакт. (Формула (1) не обобщалась.) Основным итогом настоящей статьи будет расширение этого результата на тихоновские счетно компактные пространства. В § 3 дается приложение этого результата к функциональной характеристике компактов, удовлетворяющих 1-ой аксиоме счетности, в классе тихоновских пространств. Отметим, что геометрическую интерпретацию функций пика на тихоновских пространствах впервые дал С. Эйленберг в работе [3] (см. ниже следствие 2). Другие в какой-то мере родственные результаты были получены Е. Бишопом при изучении границ Шоке функциональных алгебр (см., например, [14], [15]), а также целым рядом авторов, начиная с С. Эйленберга [3], занимавшихся обобщением теоремы Банаха–Стоуна (см., например, [16]).

§ 1. Терминология и обозначения. Пусть $C(X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций над полем $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел, определенных на топологическом хаусдорфовом пространстве X с обычной нормой $\|f\| = \sup_{q\in X}|f(q)|$. Точку $x \in C(X)\setminus[\theta]$, где θ — нулевой элемент в $C(X)$, называют точ-

(1) С. Банах формулировал лемму лишь для метрического компакта, однако в доказательстве п. а) им использовалось лишь свойство (ωc)-секвенциальной компактности.

кой гладкости, если для любого $y \in C(X)$ существует $g(x,y) = \lim_{t\to 0} t^{-1}(\|x+tg\| - \|x\|)$. Для функции $f \in C(X)$ обозначим через $\operatorname{crit} f = \{q \in X : \|f\| = |f(q)|\}$. Если crit f состоит из одной точки $q \in X$ $(X \neq \{q\})$, то функцию f называют функцией пика. Через Q — будем обозначать тихоновское пространство, т. е. по терминологии Келли [4] вполне регулярное T_1-пространство. Через $\hat{Q}$ будем обозначать компактификацию пространства Q, т.е. компакт $\hat{Q}$, такой что: а) $Q \subseteq \hat{Q}$; б) $\bar{Q} = \hat{Q}$.

Если для функции $f \in C(Q)$ существует расширение на Q, то его (а в силу п.б) такое расширение единственно) будем обозначать через $\hat{f}$. В частности, если $\hat{Q} = \beta Q$ — т.е. $\hat{Q}$ является стоунчеховской компактификацией, то для любого $f \in C(Q)$ существует $\hat{f} \in C(\hat{Q})$. Другие определения и термины, встречающиеся в работе, следует [4], [5], [17].

§ 2. **Обобщение леммы С. Банаха.** В этом параграфе Q — будет тихоновским пространством, не являющимся компактом (например, Q может быть локально компактным, или локально паракомпактным, или нормальным T_1 — пространством). Легко проверяется следующая

Лемма 1. *Пусть Q — тихоновское пространство, и $\hat{Q}$ — его некоторая компактификация. Тогда*

(i) $\|f\| = \|\hat{f}\|$ для любого $f \in C(Q)$, для которого определена $\hat{f}$.

(ii) $g(f,h) = g(\hat{f},\hat{h})$ — *если определена хоть одна из частей равенства, и существуют $\hat{f}$ и $\hat{g}$.*

(iii) *Если f — точка гладкости в $C(Q)$, и существует $\hat{f} \in C(\hat{Q})$, то $\hat{f}$ — точка гладкости в $C(\hat{Q})$.*

(iiii) *Если $\hat{Q} = \beta Q$ и $\hat{f}$ — точка гладкости в $C(\hat{Q})$, то $f = \hat{f}|Q$ — точка гладкости в $C(Q)$.*

Лемма 2 (С. Эйленберг [3], лемма 3.2). *Пусть X — счетно компактное (не обязательно тихоновское) пространство, и пусть $f_1, f_2 \in C(X)$, $\|f_i\| = 1$ $(i = 1, 2)$. Тогда условие $\|f_1+f_2\| = 2$ равносильно существованию точки $q \in X$: $f_1(q) = f_2(q) = \pm 1$.*

Лемма 3. *Пусть Q — тихоновское счетно компактное пространство. Тогда любая функция $f \in C(Q)$ достигает нормы в Q.*

Доказательство. Предположим, что $f \in C(Q)$ и f не достигает нормы в Q. Положим $f_0 = (1/\|f\|)f$. Пусть $\hat{Q} = \beta Q$. В силу компактности $\hat{Q}$, учитывая лемму 1, существует $q_0 \in \hat{Q}$: $|\hat{f}_0(q_0)| = \|\hat{f}\| = 1$. По предположению $q_0 \in \hat{Q} \setminus Q$. Пусть $q_1 \in Q$. В силу леммы Урысона (о продолжении) существует $\hat{h} \in C(\hat{Q})$: $\hat{h}(q_0) = \hat{f}_0(q_0)$, $\hat{h}(q_1) = 0$ и $|\hat{h}(q)| \leqslant 1$ для любого $q \in \hat{Q}$. Очевидно, $\|\hat{h} + \hat{f}_0\| = 2$, и в силу леммы 1 $\|h+f_0\| = 2$, где $h = \hat{h}|Q$. Тогда из леммы 2 следует, что существует $q_* \in Q$: $|h(q_*)| = |f_0(q_*)| = 1$, и потому $\|f\| = |f(q_*)|$ — вопреки предположению.

Пример 1. Пусть N — множество всех неотрицательных целых чисел, наделенное дискретной топологией. Тогда любая функция пика на стоун-чеховской компактификации βN пространства N достигает нормы лишь в N.

Доказательство. Пусть $\hat{f} \in C(\beta N)$, и $\hat{f}$ — функция пика. Предположим, что существует $y \in \beta N \setminus N : |\hat{f}(y)| = \|\hat{f}\|$. Рассмотрим $Y = \beta N \setminus \{y\}$ — подпространство в βN. Пусть $f_1 = \hat{f} \mid Y$. Известно, что Y — счетно-компактное (но не компакт!, [13], стр. 239) пространство, и $\beta Y = \beta N$. Значит, в силу лемм 1 и 3 $\|f_1\| = \|\hat{f}\|$, и f_1 достигает нормы. Но тогда $\hat{f}$, будучи функцией пика, не может достигать нормы в y, т.е. получили противоречие.

Аналогично лемме 3 доказывается следующая

Лемма 4. *Пусть Q — тихоновское счетно компактное пространство, и $\hat{Q}$ — некоторая его компактификация. Пусть $f \in C(Q)$, и существует $\hat{f} \in C(\hat{Q})$. Тогда следующие условия равносильны*:

(j) *f — функция пика в $C(Q)$.*

(jj) *$\hat{f}$ — функция пика в $C(\hat{Q})$.*

Из леммы 4, обобщения леммы Банаха на компакты ([2], следствие 3.7), и леммы 1 непосредственно вытекает

Теорема 1. *Пусть Q — тихоновское счетно компактное пространство*(2). *Тогда следующие условия равносильны*:

1° *$f \in C(Q)$, f является точкой гладкости в $C(Q)$*;

2° *$f \in C(Q)$, f — функция пика в $C(Q)$.*

Замечание 1. Для тихоновского пространства, не являющегося счетно-компактным (хотя бы даже и метризуемого), условия 1° и 2°, вообще говоря, не равносильны. Действительно, пусть $Q = (0, 1]$, а $\hat{Q} = [0, 1]$. Пусть

$$\hat{f}(t) = (1-2t)^2, \qquad t \in [0, 1].$$

Очевидно, $f := \hat{f} \mid Q$ — функция пика в $C(Q)$. Если бы f была точкой гладкости в $C(Q)$, то, в силу леммы 1, и $\hat{f}$ — была бы точкой гладкости в $C(\hat{Q})$. Но $\operatorname{crit} f = \{0, 1\}$ — и потому, учитывая лемму Банаха, $\hat{f}$ — не точка гладкости в $C(\hat{Q})$.

Следствие 1. *Пусть Q — тихоновское секвенциально компактное пространство. Пусть $x \in C(Q)$ — точка гладкости в $C(Q)$, и пусть $q_0 \in \operatorname{crit} x$. Тогда*

(2) $$g(x, y) = y(q_0)\operatorname{sign} x(q_0) \quad \text{для любого } y \in C(Q).$$

Доказательство. В силу теоремы 1 $\operatorname{crit} x = q_0$. Далее можно повторить почти дословно доказательство леммы Банаха (п.а.), заметив лишь, что если

---

(2) Примером пространства, удовлетворяющего теореме 1 и не являющегося компактом, кроме пространства Y — указаного в примере 1, может служить и простанство Ω_0 — всех порядковых чисел меньших первого несчетного числа Ω ([4]), стр. 250). Пространство Ω_0 удовлетворяет также 1-ой аксиоме счетности.

$\lim_{n\to\infty} |x(q_n)| = |x(q_0)|$, где $\{q_n\} \subset Q$, то в силу секвенциальной компактности пространства Q, $\lim_{n\to\infty} q_n = q_0$.

Следствие 2. *Пусть Q — тихоновское счетно-компактное пространство. Для того, чтобы функция $f \in C(Q)$, $\|f\| = 1$ была точкой гладкости необходимо и достаточно, чтобы звезда точки f, т.е. множество* $\mathrm{St} f = \{h \in C(Q)\colon \|h\| \leqslant 1, \|f+h\| = 2\}$ *было выпуклым.*

Доказательство. Непосредственно из теоремы 8.1 в [3] и теоремы 1.

§ 3. Об одной характеристике компактов, удовлетворяющих 1-ой аксиоме счетности. Пусть Q — тихоновское пространство(3), а $\hat{Q}$ — некоторая его компактификация. Пусть U^* $(\hat{U}^*)$ единичный шар сопряженного пространства $C(Q)^*$ (соответственно $C(\hat{Q})^*$). Через $\operatorname{ext} U^*$ $(\operatorname{ext} \hat{U}^*)$ будем обозначать множество крайних точек в U^* (соответственно в $\hat{U}^*$). Пусть $i\colon Q \to \hat{Q}$ естественное вложение, π $(\hat{\pi})$ — отображение $Q(\hat{Q})$ в $C(Q)^*$ (соответственно в $C(\hat{Q})^*$) определенное формулой $\pi(q)y = y(q)$ для любого $y \in C(Q)$ и $q \in Q$. Напомним, что $\pi(Q) \subseteq \operatorname{ext} U^*$ ([6], стр. 478).

Пусть T — отображение $C(Q)^* \to C(\hat{Q})^*\colon T\psi(\hat{f}) = \psi(f)$ для любых $\psi \in C(Q)^*$ и $\hat{f} \in C(\hat{Q})$. (Здесь $f = \hat{f}|Q$). Если $\hat{Q} = \beta Q$, то определим $\hat{T}$ — отображение $C(\hat{Q})^* \to C(Q)^*\colon \hat{T}\hat{\varphi}(f) = \hat{\varphi}(\hat{f})$ для любых $\hat{\varphi} \in C(\hat{Q})^*$ и $f \in C(Q)$.

Легко проверяется следующая

Лемма 5. *Пусть Q — тихоновское пространство, и $\hat{Q}$ — некоторая его компактификация. Тогда*

1) *если $\hat{Q} = \beta Q$, то $T \circ \hat{T} = \mathrm{I}_{C(\hat{Q})^*}$, $\hat{T} \circ T = \mathrm{I}_{C(Q)}$, где I_X — тождественное отображение в пространстве X* (теорема Стоуна, [5], стр. 144);

2) *T — линейная изометрия;*

3) *диаграмма* (3) *коммутативна.*

$$\begin{array}{ccc} C(Q^*) & \xrightarrow{T} & C(\hat{Q})^* \\ \uparrow{\scriptstyle\pi} & & \uparrow{\scriptstyle\hat{\pi}} \\ Q & \xrightarrow{i} & \hat{Q} \end{array} \tag{3}$$

Предложение 1. *Пусть Q — тихоновское пространство. Тогда следующие условия равносильны:*

(а) $\operatorname{ext} U^* = \pi(Q) \cup (-\pi(Q))$;

(б) *Q — компакт.*

(3) В этом подраграфе везде предполагается, что Q состоит не из конечного числа точек.

Доказательство. Импликация (б) $\Rightarrow$ (а) — это известный факт (см. [5], с. 144). Докажем импликацию (а) $\Rightarrow$ (б). Предположим, что Q — не компакт, и пусть $\hat{Q} = \beta Q$. Возьмем $q_0 \in \hat{Q} \setminus Q$. Так как $\hat{\pi}(q_0) \in \operatorname{ext} \hat{U}^*$, то из леммы 5 следует, что $\hat{T}\hat{\pi}(q_0) \in \operatorname{ext} U^*$. По условию существует $q_1 \in Q$: $\hat{T}\hat{\pi}(q_0) = a\pi(q_1)$, где $|a| = 1$. В силу коммутативности диаграммы (3) получаем: $\hat{\pi}(q_0) = a\hat{\pi}i(q_1) = a\hat{\pi}(q_1)$. Применив лемму Урысона (о продолжении) к равенству $\hat{\pi}(q_0) = a\hat{\pi}(q_1)$ легко придем к противоречию.

Справедлива следующая ([3], § 8):

Лемма 6. *Пусть Q — тихоновское пространство. Тогда равносильны условия*

(i) $q \in Q$, *q есть G_δ — множество*;

(ii) *существует функция пика $f \in C(Q)$*: $\operatorname{crit} f = q$.

Предложение 2. *Пусть Q — тихоновское пространство. Тогда нижеследующие условие* (iii) *влечет условие* (i) *из леммы* 6, *а когда Q — секвенциально компактное, то верно и обратное.*

(iii) *существует* $x \in C(O)$: $g(x, \cdot) = a\pi(q)$ ($|a| = 1$).

Доказательство. (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $q \in Q$ и $g(x, \cdot) = a\pi(q)$ ($|a| = 1$). Пусть $\hat{Q} = \beta Q$. В силу п. (ii) из леммы 1, $a\hat{\pi}(q) = g(\hat{x}, \cdot)$, и кроме того, $|\hat{x}(q)| = |\hat{\pi}(q)x| = |g(\hat{x}, \hat{x})| = \|\hat{x}\|$, т.е. $q \in \operatorname{crit} \hat{x}$. Так как Q — компакт, то в силу обобщения леммы Банаха ([2], следствие 3.7) $q = \operatorname{crit} \hat{x}$. Но тогда, очевидно, и x будет функцией пика в $C(Q)$. В силу леммы 6 $\{q\}$ есть G_δ множество.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Вытекает непосредственно из леммы 6, теоремы 1, а также следствия 1.

Из доказательства предложения 2 непосредственно получаем

Следствие 3. *Пусть Q — тихоновское пространство и пусть x — точка гладкости в $C(Q)$. Для того, чтобы x была функцией пика, достаточно, а когда Q секвенциально компактно, то и необходимо, чтобы*

$$g(x, \cdot) \in \pi(Q) \cup \left(-\pi(Q)\right). \tag{4}$$

Определение 1. Пусть X — топологическое хаусдорфово пространство. Функционал $\varphi \in C(X)^*$ будем называть *гладко порожденным*, если существует функция $x \in C(X)$: $\varphi = g(x, \cdot)$. Заметим, что $\|\varphi\| = \|g(x, \cdot)\| = 1$ (см., например, [2], стр. 431).

Множество гладко порожденных точек единичного шара U^* в $C(X)^*$ будем обозначать через gU^*, а через $g\operatorname{ext} U^*$ — множество $\operatorname{ext} U^* \cap gU^*$. Из леммы 3, следствия 1, а также леммы У.8.6. из [6] (стр. 475) непосредственно получаем:

Предложение 3. *Пусть Q — секвенциально компактное тихоновское пространство. Тогда*

$$g\operatorname{ext} U^* = gU^*. \tag{5}$$

Предложение 4. *Пусть Q — секвенциальный компакт. Тогда*

$$\overline{g\operatorname{ext} U^*} = \operatorname{ext} U^*. \tag{6}$$

Доказательство. Из результата А. В. Архангельского ([10], стр. 970 и [13], стр. 150) следует, что Q, как секвенциальный компакт, содержит всюду плотное множество Q_1, любая точка которого имеет счетный базис, и потому является G_δ — множеством. В силу предложения 2 для каждого $q \in Q_1$ существует $x \in C(Q)$: $g(x,\cdot) = \pi(q)$, т.е. $\pi(Q_1) \subseteq gU^*$. Из следствия 1 получаем также, что $(-\pi(Q_1)) \subseteq gU^*$.

В итоге из предложений 2 и 3 имеем:

$$\pi(Q_1) \cup (-\pi(Q_1)) \subseteq gU^* = g\operatorname{ext} U^* \subseteq \operatorname{ext} U^* = \pi(Q) \cup (-\pi(Q)).$$

Для доказательства предложения остается заметить, что отображение π для тихоновских пространств является гомеоморфизмом Q на $\pi(Q)$.

Для дальнейшего нам понадобится следующий факт, неявно сформулированный С. Эйленбергом в работе [3] (см. § 8).

Лемма 7 (С. Эйленберг). *Пусть X — топологическое счетно компактное хаусдорфово пространство. Для того, чтобы для любой точки $q \in X$ существовала функция $f \in C(X)$, такая, что $\operatorname{crit} f = q$ необходимо и достаточно, чтобы X было тихоновским пространством, удовлетворяющим 1-ой аксиоме счетности.*

Теорема 2. *Пусть Q — тихоновское пространство. Тогда следующие условия равносильны:*

1° $g\operatorname{ext} U^* = \operatorname{ext} U^*$;

2° *Q — компакт, с 1-ой аксиомой счетности*

Доказательство 1° $\Rightarrow$ 2°. Пусть g — произвольная точка в стоун-чеховской компактификации $\hat{Q} = \beta Q$. В силу леммы 5 функционал $\hat{T}\hat{\pi}(q) \in \operatorname{ext} U^*$, и значит, по условию существует $x \in C(Q)$: $\hat{T}\hat{\pi}(q) = g(x, \cdot)$. Из п. (ii) в лемме 1 получаем: $\hat{\pi}(q) = g(\hat{x}, \cdot)$, и потому $\{q\}$ является в силу предложения 2, G_δ — множеством или, что равносильно в компактах, q имеет счетный базис окрестностей (см. лемму 7). Так как Q и βQ удовлетворяют 1-ой аксиоме счетности, то в силу результата([4]) Чеха ([8], стр. 835) они гомеоморфны.

2° $\Rightarrow$ 1°. Эта импликация следует непосредственно из того факта, что компакт, удовлетворяющий 1-ой аксиоме счетности, будет секвенциальным компактом, а также из предложений 1 и 2.

Следствие 4. *Пусть тихоновское пространство Q удовлетворяет условию 1° теоремы 2. Если мощность пространства Q не равна мощности континуума, то*

([4]) Пусть Q_1 и Q_2 удовлетворяют 1-ой аксиоме счетности. Если $\beta Q_1 = \beta Q_2$, то Q_1 и Q_2 гомеоморфны.

(а) $C(Q)$ — *сепарабельно*;

(б) *слабое* замыкание множества* $\operatorname{ext} U^*$ *не более, чем счетно.*

Доказательство. Из теоремы 2, а также результатов о мощности компакта с 1-ой аксиомой счетности ([9], стр. 53; [10]) следует, что Q — счетно, а потому метризуемо. Следовательно, в силу теоремы М. Г. и С. Г. Крейнов [11] $C(Q)$ — сепарабельно. С другой стороны из теоремы 2 в [12] имеем: слабое* замыкание множества ext U^* не более, чем счетно.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за внимание к работе.

Литература

[1] С. Банах, *Курс фукціонального аналізу*, Київ 1948.
[2] В. П. Одинец, *О подпространствах гладкости, нормальных базисах и единственности проекций с нормой равной*, 1 Rev. Rumaine Math. Pure Appl. 20 (1975), p. 429–437.
[3] S. Eilenberg, *Banach space methods in topology*, Ann. Math. 43. 3 (1942), p. 568–579.
[4] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, М., Наука. 1968.
[5] М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, М., ИИЛ., 1961.
[6] Н. Данфорд, Дж. Т, Шварц, *Линейные операторы*, Общая теория., М., 1962.
[7] К. Куратовский, *Топология*, т. I., М., Мир, 1966.
[8] E. Čech, *On biocompact spaces*, Ann. Math. 38 (1937), p. 823–844.
[9] П. С. Александров, П. С. Урысон, *Мемуар о компактных топологических пространствах*, М., Наука, 1971.
[10] А. В. Архангельский, *О мощности бикомпактов с 1-ой аксиомой счетности*, ДАН СССР, т. 187, № 5, (1969), стр. 967–970.
[11] М. Г. Крейн, С. Г. Крейн, *Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном пространстве.* ДАН СССР, т. 27, № 5 (1940), стр. 427–431.
[12] М. И. Кадец, Е. В. Токарев, *О сопряженных банаховых пространствах со счетным множеством крайних точек на единичной сфере*, Изв. вузов. Математика № 4 (1975), стр. 98–99.
[13] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, М., Наука, 1974.
[14] E. Bishop, *A minimal boundary for function algebras*, Pacific. J. Math. 9 (1959), p. 629–642.
[15] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, М., Мир, 1968.
[16] W. P. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous function*, Studia Math. 13 (1975), p. 273–276.
[17] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, vol. 1, Warszawa 1971.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. Н. А. ВОЗНЕНСКОГО