E. MARCZEWSKI (Wrocław)

O przesunięciach zbiorów i o pewnym twierdzeniu Steinhausa

H. Steinhaus udowodnił w roku 1920 następujące dwa twierdzenia o zbiorach położonych na prostej [16]:

TWIERDZENIE I. *Dla każdego zbioru mierzalnego miary dodatniej zbiór odległości między punktami tego zbioru zawiera pewien odcinek o końcu* 0.

TWIERDZENIE II. *Dla każdej pary zbiorów mierzalnych A i B miary dodatniej zbiór odległości między punktami zbioru A a punktami zbioru B zawiera pewien odcinek.*

Oba twierdzenia Steinhausa znajdują często zastosowania; wygodnie na przykład opierać się na nich w rozważaniach związanych z twierdzeniami ergodycznymi[1]).

Twierdzenie II, jak zauważył A. Zięba, można łatwo wyprowadzić z twierdzenia I opierając się na istnieniu takiego przesunięcia B^* zbioru B, które ma ze zbiorem A część wspólną AB^* miary dodatniej; wystarczy wówczas zastosować twierdzenie I do zbioru AB^*. Wobec tego w dalszym ciągu będziemy się zajmowali tylko twierdzeniem I.

Dla wielowymiarowej przestrzeni euklidesowej możemy stosując zwykłe pojęcia i oznaczenia sformułować taki odpowiednik twierdzenia I (Rademacher [10]):

TWIERDZENIE I'. *Dla każdego zbioru mierzalnego E miary dodatniej zbiór wszystkich różnic $x-y$, gdzie $x,y \in E$, zawiera pewną kulę o środku w punkcie zerowym.*

Celem tego artykułu, który zresztą nie zawiera żadnych nowych twierdzeń[2]), jest systematyczne ujęcie pewnych naturalnych uogólnień twierdzenia I' i przedyskutowanie kilku zagadnień pokrewnych.

Najprostszym ze znanych dowodów twierdzenia I' jest chyba dowód Kestelmana[3]); uogólniając go nieco otrzymujemy lemat podany dalej.

---

[1]) Por. Hartman, Marczewski i Ryll-Nardzewski [4], str. 111.

[2]) Twierdzenia 4 i 5 podane zostały bez dowodu w komunikacie [9].

[3]) Kestelman [6], str. 145.

1. Definicje i równoważności. Będziemy rozważali jedynie punkty i zbiory położone w przestrzeni euklidesowej o ustalonej, zresztą dowolnej, liczbie wymiarów k. Przez *sumę* $x+y$ punktów $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ i $y=(y_1,y_2,\ldots,y_k)$ tej przestrzeni będziemy rozumieli punkt $(x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_k+y_k)$. Analogicznie określamy *różnicę* punktów.

Przesunięcie zbioru E o wektor (*punkt*) a, czyli zbiór wszystkich punktów $x+a$, gdzie $x\in E$, będziemy oznaczali przez E^a.

Odległość punktu x od punktu zerowego oznaczymy przez $|x|$.

Miarę Lebesgue'a (k-wymiarową) zbioru mierzalnego E oznaczymy przez $|E|$, a *średnicę zbioru* E (czyli kres górny liczb $|x-y|$, gdzie $x,y\in E$) przez $\delta(E)$.

Rozpatrzmy następujące własności zbioru E:

(S_n) *Istnieje taka liczba $\eta>0$, że dla każdego zbioru A, złożonego z co najwyżej n punktów i mającego średnicę mniejszą od η, istnieje przesunięcie zbioru A zawarte w E.*

(S) *Istnieje taka liczba $\eta>0$, że dla każdego zbioru A, co najwyżej przeliczalnego i mającego średnicę mniejszą od η, istnieje przesunięcie zbioru A zawarte w E.*

(T) *Dla każdego zbioru A co najwyżej przeliczalnego istnieje przesunięcie zbioru A zawarte w E.*

Zachodzą oczywiście następujące wynikania:

$$(T)\to(S)\to\ldots\to(S_3)\to(S_2).$$

Ponieważ dla każdego zbioru A i każdego punktu b relacje

$$A^b\subset E \quad \text{i} \quad b\in\prod_{a\in A}E^{-a}$$

są równoważne, więc własności (S_n), (S) i (T) są odpowiednio równoważne z następującymi:

(s_n) *Istnieje taka liczba $\eta>0$, że jeżeli $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ i $\delta(A)<\eta$, to $E^{a_1}E^{a_2}\ldots E^{a_n}\neq 0$.*

(s) *Istnieje taka liczba $\eta>0$, że jeżeli $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$ i $\delta(A)<\eta$, to $E^{a_1}E^{a_2}\ldots\neq 0$.*

(t) *Dla każdego ciągu punktów $a_1,a_2,\ldots$ jest $E^{a_1}E^{a_2}\ldots\neq 0$.*

Twierdzenie I' można teraz wysłowić w następujący sposób:

TWIERDZENIE I''. *Każdy zbiór mierzalny miary dodatniej ma własność* (S_2) (*lub inaczej*: (s_2)).

2. Własność (S_n). Udowodnimy natępujący

Lemat[4]. *Dla każdego zbioru mierzalnego* E, *dla każdej liczby* $\varepsilon>0$ *i dla każdej liczby naturalnej* n *istnieje taka liczba* $\eta>0$, *że jeżeli* $|a_j|<\eta$ *dla* $j=1,2,\ldots,n$, *to*

$$|E-E^{a_1}E^{a_2}\ldots E^{a_n}|<\varepsilon. \tag{1}$$

Dowód. Istnieje taki zbiór domknięty i ograniczony $F\subset E$, że

$$|E-F|<\varepsilon/2 \tag{2}$$

oraz taki zbiór otwarty G zawierający F, że

$$|G-F|<\varepsilon/2n. \tag{3}$$

Odległość η między F a dopełnieniem zbioru G jest oczywiście dodatnia. Jeżeli $|a_j|<\eta$, to $F^{a_j}\subset G$, skąd wobec (3) otrzymujemy

$$|G-F^{a_j}|=|G|-|F^{a_j}|=|G|-|F|=|G-F|<\varepsilon/2n. \tag{4}$$

Zatem

$$E-E^{a_1}E^{a_2}\ldots E^{a_n}\subset(E-F)+(F-E^{a_1}E^{a_2}\ldots E^{a_n})\subset$$

$$\subset(E-F)+(G-F^{a_1}F^{a_2}\ldots F^{a_n})=(E-F)+\sum_{j=1}^{n}(G-F^{a_j}),$$

co, łącznie z nierównościami (2) i (4), pociąga za sobą nierówność (1).

Z lematu łatwo wyprowadzimy następujące twierdzenie Ruziewicza[5]), ogólniejsze od twierdzenia Steinhausa:

TWIERDZENIE 1. *Każdy zbiór mierzalny* E *miary dodatniej ma własność* (S_n) *dla* $n=1,2,\ldots$

Dowód polega na podstawieniu w lemacie zbioru E^{a_1}, liczby $|E|/2$ i ciągu punktów $0,a_2-a_1,a_3-a_1,\ldots,a_n-a_1$ zamiast zbioru E, liczby ε i ciągu $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Okazuje się w ten sposób, że zbiór E ma własność (s_n), czyli (S_n), c. b. d. o.

Ponieważ każdy zbiór o własności (S) jest gęsty na pewnym odcinku, a istnieją zbiory miary dodatniej rzadkie[6]), więc w twierdzeniu 1 nie można zastąpić własności (S_n) przez własność (S).

Steinhaus udowodnił, że na prostej istnieje zbiór doskonały miary zero, mianowicie zbiór Cantora, który ma własność (S_2)[7]), a Ryll-Nardzewski zauważył, że zbiór ten nie ma własności (S_3). Zagadnienie, czy istnieje zbiór doskonały miary zero o własności (S_3), jest otwarte.

---

[4]) Por. Hadwiger [2].

[5]) Ruziewicz [12] i Hadwiger [3].

[6]) Czyli tzw. nigdzie gęste.

[7]) Steinhaus [15]; por. także Kestelman [5], str. 145 i Piccard [10], str. 86.

3. Własność (S). Jak wiadomo, istnieje wiele analogii między zbiorami miary zero oraz zbiorami mierzalnymi z jednej, a zbiorami pierwszej kategorii oraz zbiorami o własności Baire'a z drugiej strony. Przypomnijmy, że zbiór E jest *pierwszej kategorii*, gdy jest sumą ciągu zbiorów nigdzie gęstych, jest *drugiej kategorii*, gdy nie jest pierwszej, i wreszcie, że zbiór ma *własność Baire'a*, gdy istnieje taki zbiór otwarty G, że zbiór $(G-E)+(E-G)$ jest pierwszej kategorii[8]).

Twierdzenie 1 nasuwa myśl, że zbiory drugiej kategorii o własności Baire'a mają własność (S_n). Okazuje się nawet, że zachodzi mocniejsze

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli zbiór E ma własność Baire'a i jest drugiej kategorii, to E ma własność* (S).

Dowód. Udowodnimy, że E ma własność (s). Istnieje taka kula K — oznaczmy jej promień przez η — że $K-E$ jest pierwszej kategorii. Niech

$$A=\{a_1,a_2,\ldots\},\qquad \delta(A)<\eta.$$

Zatem zbiór A jest zawarty w kuli Q o promieniu $\eta_1<\eta$. Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że punkt zerowy 0 jest środkiem kul K i Q.

Niech K_0 oznacza kulę $|x|<\eta-\eta_1$; mamy wówczas

$$K^{-a_j}\subset K \quad \text{dla} \quad j=1,2,\ldots \tag{5}$$

Rzeczywiście, jeżeli $x\in K^{-a_j}$, to $|x+a_j|<\eta-\eta_1$, skąd

$$|x|<|x-a_j|+|a_j|<(\eta-\eta_1)+\eta_1=\eta,$$

czyli $x\in K$.

Ponieważ $K-E$ jest zbiorem pierwszej kategorii, więc z (5) wynika, że zbiór $K_0^{-a_j}-E$, a więc także $K_0-E^{a_j}$ jest pierwszej kategorii. Zatem zbiór

$$K_0-E^{a_1}E^{a_2}\ldots=\sum_{j=1}^{\infty}(K_0-E^{a_j})$$

jest pierwszej kategorii, wobec czego $E^{a_1}E^{a_2}\ldots\neq 0$, c. b. d. o.

4. Własność (T). W podobny sposób, jak twierdzenie 2, lecz jeszcze prościej otrzymujemy

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli dopełnienie zbioru E jest miary zero lub pierwszej kategorii, to zbiór E ma własność* (T)[9]).

---

[8]) Por. np. Kuratowski [8], str. 48 i 54. Informacje o analogii między miarą i kategorią można znaleźć w książkach Kuratowskiego [8] (np. str. 49 i 63) oraz Sierpińskiego [14] (chapt. III, oraz chapt. IV, § 3).

[9]) Por. Kestelman [7], str. 133.

Dowód. Dla każdego ciągu punktów $a_1, a_2, \ldots$ dopełnieniem zbioru $E^{a_1}E^{a_2}\ldots$ jest suma dopełnień zbiorów E^{a_j}, a więc zbiór miary zero lub pierwszej kategorii. Zatem $E^{a_1}E^{a_2}\ldots \neq 0$. Zbiór E ma więc własność (t), c. b. d. o.

Z twierdzenia 3 można uzyskać dowody istnienia różnych „małych" zbiorów, które jednak mają własność (T).

Ponieważ prostą można rozłożyć na zbiór G_δ miary zero i zbiór F_σ pierwszej kategorii, więc — jak zauważył W. Sierpiński — z twierdzenia 3 wynika istnienie zbioru G_δ miary zero, który ma własność (T). Pytanie, czy istnieje zbiór F_σ miary zero o własności (T), jest otwarte.

Uwaga Sierpińskiego może być zaostrzona. Niech φ oznacza taką niemalejącą funkcję rzeczywistą, że $\varphi(0)=0$. Mówimy, że zbiór E ma miarę zero względem funkcji φ[10]), gdy do każdego $\eta>0$ istnieje taki rozkład $E=E_1+E_2+\ldots$, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi[\delta(E_j)] < \eta.$$

Piszemy wówczas $L^\varphi(E)=0$ (warunek ten jest dla zbiorów położonych w k-wymiarowej przestrzeni euklidesowej i dla funkcji $\varphi(t)=t^k$ równoważny z warunkiem $|E|=0$).

Łatwo stwierdzić, że dla każdego zbioru E miary zero względem φ istnieje nadzbiór H o tej samej własności, będący zbiorem G_δ. Wobec tego, jeżeli E jest dowolnym zbiorem przeliczalnym gęstym w przestrzeni, to dopełnienie zbioru H jest zbiorem F_σ pierwszej kategorii. Tak więc z twierdzenia 3 otrzymujemy

TWIERDZENIE 4. *Dla każdej funkcji φ istnieje zbiór G_δ o własności* (T), *który ma miarę zero względem φ.*

Twierdzenie 4 i zagadnienie postawione na końcu punktu 2 wiążą się z pracą H. G. Egglestona [1].

Zbiór E nazywa się *zbiorem wymiaru zero* (nie należy identyfikować tego pojęcia z wymiarem w sensie topologicznym), gdy jest miary zero względem każdej funkcji φ kształtu $\varphi(t)=t^a$ (gdzie $a>0$). Oczywiście, jeżeli $L_\psi(E)=0$ dla funkcji ψ, która dąży do 0 gdy $t\to 0$ wolniej niż każda funkcja kształtu wyżej podanego, to E ma wymiar zero.

Oznaczmy przez (T_2) własność zbioru E polegającą na tym, że dla każdego dwupunktowego zbioru A istnieje przesunięcie zbioru A zawarte w E. Oczywiście (T) pociąga za sobą (T_2).

Z twierdzenia 4 otrzymuje się więc następujący wynik Egglestona: *Istnieje zbiór zerowymiarowy o własności* (T). W rzeczywistości jednak wynik Egglestona jest nieporównywalny z twierdzeniem 4, ponieważ skonstruowany przezeń zbiór jest doskonały.

[10]) Por. Hausdorff [5] oraz Saks [13], str. 53.

A. Krzywicki zmodyfikował konstrukcję Egglestona otrzymując dla każdej funkcji φ zbiór doskonały o własności (T_2), który ma względem φ miarę zero.

Istnienie zbioru nieprzeliczalnego, który ma miarę zero względem każdej funkcji φ, jest udowodnione jedynie za pomocą hipotezy continuum. W szczególności mają tę własność pewne zbiory osobliwe Łuzina. Przez *zbiór Łuzina* będziemy rozumieli każdy taki zbiór L, że dla każdego zbioru N pierwszej kategorii zbiór LN jest co najwyżej przeliczalny[11]). Zastępując w tej definicji pierwszą kategorię przez miarę (Lebesgue'a) zero otrzymujemy zbiór zwany *zbiorem Sierpińskiego*. Każdy zbiór Sierpińskiego jest pierwszej kategorii na każdym zbiorze doskonałym[12]).

Z hipotezy continuum wyprowadzimy

TWIERDZENIE 5. *Istnieje nieprzeliczalny zbiór Łuzina i nieprzeliczalny zbiór Sierpińskiego, oba mające własność* (T).

Dowód. Niech $\boldsymbol{N}$ będzie klasą wszystkich zbiorów miary zero (lub odpowiednio: pierwszej kategorii). Z hipotezy continuum wynika istnienie ciągu pozaskończonego typu Ω, złożonego ze wszystkich zbiorów borelowskich należących do $\boldsymbol{N}$:

$$N_0, N_1, N_2, \ldots, N_\xi, \ldots, \qquad 0 \leqslant \xi < \Omega$$

oraz ciągu — tego samego typu — złożonego ze wszystkich zbiorów co najwyżej przeliczalnych:

$$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_\xi, \ldots, \qquad \xi < \Omega.$$

Z twierdzenia 3 wynika istnienie dla każdego ξ takiego przesunięcia D_ξ^* zbioru D_ξ, że

$$D_\xi^* \cdot \sum_{\eta<\xi} N_\eta = 0. \tag{6}$$

Zbiór $Z = \sum_{\xi<\Omega} D_\xi^*$ spełnia warunki tezy. Oczywiście ma on własność (T). Z drugiej strony, dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ istnieje takie $\eta < \Omega$, że $N \subset N_\eta$, a zatem

$$ZN \subset ZN_\eta = \sum_{\xi\leqslant\eta} D_\xi^* N_\eta + \sum_{\eta<\xi<\Omega} D_\xi^* N_\eta;$$

pierwszy składnik tej sumy jest co najwyżej przeliczalny a drugi pusty wskutek równości (6).

Twierdzenie 5 jest więc udowodnione.

---

[11]) Każdy zbiór Łuzina ma tzw. *własność* (C) (por. np. Sierpiński [14], str. 39), a każdy zbiór o własności (C) ma — jak łatwo sprawdzić — miarę zero względem każdej funkcji φ. Różne własności zbiorów Łuzina są omówione także w monografii Kuratowskiego [8], str. 432-440.

[12]) Por. np. Sierpiński [14], str. 85.

Prace cytowane

[1] H. G. Eggleston, *Note on certain s-dimensional sets*, Fund. Math. 36 (1949), str. 40-43.

[2] H. Hadwiger, *Ein Translationssatz für Mengen positiven Masses*, Portugaliae Mathematica 5 (1946), str. 143-144.

[3] — *Eine Erweiterung eines Theorems von Steinhaus-Rademacher*, Comm. Math. Helv. 19 (1946-7), str. 236-239.

[4] S. Hartman, E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Coll. Math. 2 (1951), str. 109-123.

[5] F. Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, Math. Ann. 79 (1919), str. 157-179.

[6] H. Kestelman, *On the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$*, Fund. Math. 34 (1947), str. 144-147.

[7] — *The convergent sequences belonging to a set*, Jour. of the London Math. Soc. 22 (1947), str. 130-136.

[8] C. Kuratowski, *Topologie I*, drugie wydanie, Monografie Matematyczne 20, Warszawa-Wrocław 1948.

[9] E. Marczewski, *Sur les translations des ensembles* (streszczenie), Coll. Math. 2 (1951), str. 309.

[10] S. Piccard, *Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien*, Paris 1939.

[11] H. Rademacher, *Über eine Eigenschaft von messbaren Mengen*, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 30 (1921), str. 130-132.

[12] S. Ruziewicz, *Contributions à l'étude des ensembles de distances de points*, Fund. Math. 7 (1925), str. 141-143.

[13] S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne 7, Warszawa-Lwów 1937.

[14] W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne 4, Warszawa-Lwów 1934.

[15] H. Steinhaus, *Nowa własność mnogości Cantora*, Wektor 6 (1917), str. 105-107.

[16] — *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, Fund. Math. 1 (1920, nowe wyd. 1937), str. 93-104, oraz Annexe (w nowym wydaniu), str. 232-233.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
IM. BOLESŁAWA BIERUTA

Э. МАРЧЕВСКИЙ (Вроцлав)

О СДВИГАХ МНОЖЕСТВ И ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ШТЕЙНХАУЗА

РЕЗЮМЕ

Систематическое изложение известных обобщений теоремы Штейнхауза [16] о расстояниях. Доказательства теорем сформулированных в [9].

E. MARCZEWSKI (Wrocław)

ON TRANSLATIONS OF SETS AND A THEOREM OF STEINHAUS

SUMMARY

A systematic treatement of some known generalizations of Steinhaus' theorem on distances [16]. Proofs of propositions formulated in [9].