K. URBANIK (Wrocław)

O pewnym nieskończonym układzie równań

Ciągi różnych liczb naturalnych $\{m_k\}$ i $\{n_l\}$ nazywamy *rozłącznymi*, jeżeli $n_l \neq m_k$ dla wszystkich l i k.

Lemat. *Dla każdej pary ciągów rozłącznych $\{m_k\}$ i $\{n_l\}$ i dla każdego l zachodzi nierówność*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|n_l^2 - m_k^2|} < 1.$$

Dowód. Ustawiamy w ciąg rosnący elementy ciągu $\{m_k\}$ większe od n_l

$$m_1^{(1)} < m_2^{(1)} < \ldots < m_n^{(1)} < \ldots \tag{1}$$

Pozostałe elementy ciągu $\{m_k\}$, które na podstawie rozłączności ciągów $\{m_k\}$ i $\{n_l\}$ są mniejsze od n_l, ustawiamy w ciąg malejący

$$m_1^{(2)} > m_2^{(2)} > \ldots > m_s^{(2)}, \tag{2}$$

gdzie

$$s \leqslant n_l - 1. \tag{3}$$

Z definicji ciągów (1) i (2) wynika, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|n_l^2 - m_k^2|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(m_k^{(1)})^2 - n_l^2} + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{n_l^2 - (m_k^{(2)})^2} \tag{4}$$

oraz

$$m_k^{(1)} \geqslant n_l + k \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$n_l \geqslant m_k^{(2)} + k \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

a dla nieskończenie wielu k zachodzi nierówność

$$m_k^{(1)} > n_l + k.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} (m_k^{(1)})^2 - n_l^2 &\geqslant 2kn_l + k^2 \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, \\ n_l^2 - (m_k^{(2)})^2 &\geqslant 2k + k^2 \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, s, \end{aligned} \tag{5}$$

a dla nieskończenie wielu k

$$(m_k^{(1)})^2 - n_l^2 > 2kn_l + k^2. \tag{6}$$

Na podstawie (3), (4), (5) i (6) otrzymujemy

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|n_l^2-m_k^2|}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2n_lk+k^2}+\sum_{k=1}^{n_l-1}\frac{1}{2k+k^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_l}\sum_{k=2}^{2n_l}\frac{1}{k}-\frac{1}{n_l+1}+\frac{3}{2}\right).$$

Dowód przez indukcję, że

$$(8)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_l}\sum_{k=2}^{2n_l}\frac{1}{k}-\frac{1}{n_l+1}+\frac{3}{2}\right)\leqslant 1,$$

nie nastręcza trudności.

Z (7) i (8) wynika teza lematu.

TWIERDZENIE. *Dla każdej pary ciągów rozłącznych* $\{m_k\}$ *i* $\{n_l\}$ *i dla każdego* A *takiego, że* $|A|>1$, *układ równań*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{n_l^2-m_k^2}=Ax_l\qquad (l=1,2,\ldots)$$

ma w dziedzinie ciągów ograniczonych tylko zerowe rozwiązanie[1]).

Dowód. Niech X będzie przestrzenią ciągów ograniczonych $x=\{x_n\}$ z normą $\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$. Przestrzeń X jest przestrzenią Banacha.

Określamy w przestrzeni X operator liniowy

$$L(x)=y=\{y_l\},\qquad \text{gdzie}\quad y_l=\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{n_l^2-m_k^2}\qquad \text{dla}\quad l=1,2,\ldots$$

Operator L jest ograniczony. Istotnie,

$$\|L(x)\|\leqslant\frac{1}{|A|}\left(\sup_l\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|n_l^2-m_k^2|}\right)\|x\|.$$

Stąd na podstawie lematu otrzymujemy

$$(9)\qquad \|L(x)\|\leqslant\frac{1}{|A|}\cdot\|x\|,$$

co dowodzi, że operator L jest ograniczony.

Udowodnimy, że operator L jest *zmniejszający*, tzn. że istnieje taka stała $a<1$, że dla wszystkich $x,x'\epsilon X$ zachodzi nierówność

$$\|L(x)-L(x')\|\leqslant a\|x-x'\|.$$

---

[1]) Twierdzenie to wiąże się z wynikiem W. Wolibnera, opublikowanym w pracy *Sur certains corollaires du théorème de Titchmarsh*, Studia Math. XIV. 1 (1953), str. 107-110.

Z definicji operatora L i z (9) wynika, że

$$\|L(x)-L(x')\| = \|L(x-x')\| \leqslant \frac{1}{|A|}\cdot\|x-x'\|.$$

Ponieważ $|A|>1$, więc można przyjąć $\alpha=1/|A|$, co dowodzi, że operator L jest zmniejszający.

Na podstawie twierdzenia Banacha[2]) istnieje jeden i tylko jeden taki punkt $x_0\in X$, że $L(x_0)=x_0$. Łatwo spostrzec, że $x_0=(0,0,\ldots,0,\ldots)$, co dowodzi twierdzenia.

К. Урбаник (Вроцлав)

ОБ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Для каждой пары последовательностей натуральных чисел $\{m_k\}$ и $\{n_l\}$ таких, что $m_k\neq n_l$ $(k,l=1,2,\ldots)$ и для каждого A такого, что $|A|>1$, система уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{n_l^2-m_k^2}=Ax_l \qquad (l=1,2,\ldots)$$

имеет в области ограниченных последовательностей лишь нулевое решение.

K. Urbanik (Wrocław)

ON A CERTAIN INFINITE SYSTEM OF EQUATIONS

SUMMARY

For every pair of sequences of positive integers $\{m_k\}$ and $\{n_l\}$ such that $m_k\neq n_l$ $(k,l=1,2,\ldots)$ and for every A such that $|A|>1$ the system of equations

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{n_l^2-m_k^2}=Ax_l \qquad (l=1,2,\ldots)$$

has, among the bounded sequences, only the zero solution.

---

[2]) S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application uax équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), str. 133-180.