M. Fisz (Warszawa)

Konstrukcja populacji sztucznych i ich zastosowanie

Termin *populacja generalna* znany jest każdemu statystykowi. Populacją generalną jest zbiór wszystkich elementów badanej masy, np. zbiór wszystkich mieszkańców Polski, będących przedmiotem badań w spisie powszechnym ludności; zbiór wszystkich chorych, którzy korzystali z leczenia szpitalnego w 1951 r., w badaniu rozmiarów i zasięgu szpitalnictwa; zbiór wszystkich sztuk partii towaru, której jakość badamy.

Jak wiadomo, statystyka matematyczna bada metody, które pozwalają wnioskować o właściwościach populacji generalnej na podstawie obserwacji niektórych elementów tej populacji, wybranych w sposób losowy, tj. tak, że cecha będąca podstawą wyboru jest niezależna od cechy badanej. Zespół elementów populacji generalnej wybranych w sposób losowy nazywamy *próbą losową*.

Dla celów dydaktycznych i naukowych, o których będzie mowa później, dogodnie jest konstruować sztuczne populacje generalne i badać własności prób wylosowanych z tych populacji.

Najstarszą i najbardziej znaną populacją sztuczną jest urna z kulami białymi i czarnymi. Jest to zarazem najprostsza populacja sztuczna: zawiera ona w odpowiednich proporcjach elementy tylko dwóch rodzajów. Wiadomo, jaką rolę odgrywała ta populacja sztuczna w rachunku prawdopodobieństwa. Wystarczy wspomnieć schematy losowania Bernoulliego, Poissona i Pólyi oraz związane z tymi schematami rozkłady: dwumianowy, uogólniony dwumianowy i hipergeometryczny oraz inne rozkłady Pólyi.

Na przykładzie urny z kulami widać już, że przez *populację sztuczną* rozumiemy model populacji generalnej tak skonstruowany, że odpowiedniki elementów poszczególnych rodzajów populacji generalnej występują w modelu (populacji sztucznej) w takich samych proporcjach, w jakich elementy te występują w rozważanej populacji generalnej. Inaczej mówiąc, konstruujemy populację sztuczną tak, by miała dany rozkład.

Zanim szczegółowo omówimy zasady kosntruowania populacji sztucznych, zastanówmy się, z czego te populacje konstruować. Wyobraźmy sobie, że chcemy skonstruować populację sztuczną o danym rozkładzie typu ciągłego. Teoretycznie biorąc, w rozkładzie takim mamy nieskończony zbiór[1]) różnych elementów. Jest jasne, że potrafimy skonstruować jedynie populację sztuczną o skończonej ilości elementów, że więc populacja sztuczna będzie miała rozkład dany jedynie w przybliżeniu. Z tym niedostatkiem musimy się zgodzić, jednak o dokładności przybliżenia będzie decydowała ilość elementów różnych w populacji sztucznej. Im więcej ich będzie, tym lepiej. Można by tu podjąć próbę skonstruowania populacji sztucznej za pomocą ogromnej urny, zawierającej kule różnobarwne. W ogólnych zarysach postępowanie byłoby następujące: Niech zmienna losowa X ma rozkład dany. Rozbijemy oś x-ów na dużą, ale skończoną ilość przedziałów. Każdemu przedziałowi przyporządkujemy kule określonej barwy, w ilości, której stosunek do ogólnej ilości kul w urnie równa się prawdopodobieństwu przyjęcia przez zmienną losową X wartości należącej do przedziału, przyporządkowanego danej barwie. Wiadomo jednak, jak uciążliwe byłoby tasowanie takich kul w urnie, by proces wyciągania kul z urny był losowy. Stąd widać, że urna z kulami nie nadaje się na populację sztuczną o rozkładzie, w którym występują elementy wielu różnych rodzajów.

Shewhart zastosował na początku lat dwudziestych urnę z jednakowymi skrawkami papieru, na których były napisy liczbowe, a częstości występowania poszczególnych liczb były wyznaczone przez dany rozkład. Losowanie z takiej populacji sztucznej odbywało się przez wyciąganie skrawków papieru. Metoda Shewharta polega więc także na skonstruowaniu urny, w której kulę zastąpiono przez skrawki papieru. Obecnie jednak konstruujemy populacje sztuczne bez urny. Stało się to możliwe dzięki tablicom liczb losowych, a więc dzięki temu, że proces losowania nie polega na wyciąganiu elementu z urny, ale na odczytywaniu liczb w tablicach liczb losowych.

Zamiast ogólnego opisu metod konstruowania populacji sztucznych, stosowanych obecnie, podajemy szczegółowy opis populacji sztucznej przedstawionej w tablicy 1. Czytelnik będzie mógł po zapoznaniu się z zasadami konstrukcji wspomnianej populacji, konstruować populacje sztuczne o dowolnym rozkładzie.

W tablicy 1 przedstawiono populację $N(0,10)$, to znaczy sztuczną populację normalną o przeciętnej wartości 0 i odchyleniu standardowym 10. Elementów populacji jest 10 000. Elementami populacji są liczby całkowite, a więc punkty w odległości równej 0,1 odchylenia standardowego, co dla celów praktycznych jest zupełnie wystarczające.

Jak powiedziano wyżej, populacja sztuczna jest tylko w przybliżeniu normalna i w gruncie rzeczy jest populacją o rozkładzie skokowym.

[1]) Mocy continuum.

Przy konstrukcji populacji przedstawionej w tablicy 1 rozbito oś liczbową na przedziały $(k-0{,}5, k+0{,}5)$, gdzie k jest liczbą całkowitą $(k=0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$. Przyjęto, że liczba k występuje w populacji sztucznej n razy, gdzie n wyznacza się z równości

$$\frac{n}{10000} = \mathfrak{F}\left(\frac{k+0{,}5}{10}\right) - \mathfrak{F}\left(\frac{k-0{,}5}{10}\right). \tag{1}$$

We wzorze tym funkcja $\mathfrak{F}(x)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$ i wartość jej może być odczytana z tablic. Jedynie dwie wartości skrajne w populacji sztucznej $k=\mp 37$ występują z częstością n nie czyniącą zadość równości (1). Zauważmy bowiem, że n musi być liczbą naturalną, a więc n nie może być mniejsze od jedności. Ponieważ $\mathfrak{F}(-3{,}65)-\mathfrak{F}(-\infty)=0{,}0001$, więc liczby mniejsze od -37 nie występują wcale w populacji sztucznej, a $k=-37$ występuje jeden raz, przy czym $n=1$ wyznaczamy z równości

$$\frac{n}{10000} = \mathfrak{F}(-3{,}65) - \mathfrak{F}(-\infty). \tag{2}$$

Podobnie wskutek symetrii rozkładu normalnego względem jego wartości przeciętnej, prawostronną wartością skrajną w populacji sztucznej jest $k=37$ i wartość ta występuje także jeden raz.

W tablicy 1 są trzy rubryki. W pierwszej figurują wartości k. W drugiej (oznaczonej literą n) podano częstość występowania poszczególnych liczb k w populacji sztucznej. W ostatniej rubryce (oznaczonej literą N) podano kolejne numery, jakie zajmują w populacji sztucznej, uporządkowanej według wielkości, poszczególne wartości k. I tak dla przykładu, dla $k=-37$ mamy $n=1$ oraz $N=1$; dla $k=-36$ mamy $n=1$ oraz $N=2$; dla $k=-33$ mamy już $n=2$ oraz $N=5$ i $N=6$; dla $k=1$ jest $n=397$, a więc liczba 1 występuje 397 razy i ma numery kolejne począwszy od 5200 do 5596. Liczba 37 występuje raz i ma numer $N=10\,000$.

Do wylosowania prób ze sztucznej populacji posługujemy się tablicami liczb losowych. Przy losowaniu prób z populacji przedstawionej w tablicy 1 wylosowujemy z tablic liczby czterocyfrowe[2]). Sposób losowania pokażemy na przykładzie.

Przykład. Wylosujemy z tej populacji próbę liczącą 6 elementów. W tym celu wylosujemy z tablic liczb losowych 6 liczb czterocyfrowych. Niech to będą na przykład następujące liczby:

0527, 1763, 7427, 5599, 7091, 2239.

[2]) Liczbę „0000” w tablicach liczb losowych traktujemy jako 10000.

TABLICA 1

k	n	N	k	n	N	k	n	N
−37	1	1	−12	194	1058-1251	13	171	8944-9114
−36	1	2	−11	218	1252-1469	14	150	9115-9264
−35	1	3	−10	242	1470-1711	15	130	9265-9394
−34	1	4	−9	266	1712-1977	16	111	9395-9505
−33	2	5-6	−8	290	1978-2267	17	94	9506-9599
−32	2	7-8	−7	312	2268-2579	18	79	9600-9678
−31	3	9-11	−6	333	2580-2912	19	66	9679-9744
−30	4	12-15	−5	352	2913-3264	20	54	9745-9798
−29	6	16-21	−4	368	3265-3632	21	44	9799-9842
−28	8	22-29	−3	381	3633-4013	22	36	9843-9878
−27	10	30-39	−2	391	4014-4404	23	28	9879-9906
−26	14	40-53	−1	397	4405-4801	24	23	9907-9929
−25	18	54-71	0	398	4802-5199	25	18	9930-9947
−24	23	72-94	1	397	5200-5596	26	14	9948-9961
−23	28	95-122	2	391	5597-5987	27	10	9962-9971
−22	36	123-158	3	381	5988-6368	28	8	9972-9979
−21	44	159-202	4	368	6369-6736	29	6	9980-9985
−20	54	203-256	5	352	6737-7088	30	4	9986-9989
−19	66	257-322	6	333	7089-7421	31	3	9990-9992
−18	79	323-401	7	312	7422-7733	32	2	9993-9994
−17	94	402-495	8	290	7734-8023	33	2	9995-9996
−16	111	496-606	9	266	8024-8289	34	1	9997
−15	130	607-736	10	242	8290-8531	35	1	9998
−14	150	737-886	11	218	8532-8749	36	1	9999
−13	171	887-1057	12	194	8750-8943	37	1	10000

Z tablicy 1 znajdujemy, że numer kolejny 527 ma liczba $k=-16$; numer kolejny 1763 — liczba $k=-9$. Postępując tak dalej, otrzymamy próbę złożoną z następujących elementów:

$$-16, \quad -9, \quad 7, \quad 2, \quad 6, \quad -8.$$

Przechodzimy obecnie do omówienia zastosowań populacji sztucznych.

Jak wspomniano, populacje sztuczne mogą mieć zastosowanie do celów dydaktycznych. Mamy tu na myśli przede wszystkim zastosowanie losowań z populacji sztucznych na wykładach z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej w wyższych szkołach ekonomicznych i rolniczych. Wiadomo, że przygotowanie matematyczne studentów tych uczelni nie jest specjalnie wysokie. Dla studentów tych znaczenie dowodu jako postępowania przekonującego o słuszności twierdzenia jest minimalne. Nieraz też trzeba zrezygnować z podania dowodu jakiegoś twierdzenia, ponieważ aparat matematyczny potrzebny do przeprowadzenia dowodu nie jest objęty programem wykładu z matematyki w tych uczelniach. Weźmy dla przykładu twierdzenie Lapunowa, że standardyzowana suma niezależnych zmiennych losowych ma — gdy spełnione są pewne dość ogólne warunki — rozkład asymptotycznie normalny. Twierdzenie to ma doniosłe znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa i w jego zastosowaniach; na wykładach nie przeznaczonych dla matematyków, podaje się je jednak zazwyczaj bez dowodu, gdyż jego dowód opiera się na teorii funkcji charakterystycznych i na twierdzeniach Helly'ego z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej. W takiej sytuacji za doskonałą i przekonującą ilustrację słuszności twierdzenia Lapunowa może służyć ćwiczenie, polegające na wylosowaniu dostatecznie dużej ilości prób z populacji sztucznej o rozkładzie wybitnie anormalnym (np. trójkątnym) i na stwierdzeniu, że rozkład sum wylosowanych liczb w próbach ma rozkład w przybliżeniu normalny. Jeżeli np. grupa słuchaczy liczy 50 osób i każdy słuchacz wybiera ze sztucznej populacji trójkątnej niezależne 2 próby po 10 elementów, okaże się, że rozkład 100 wartości sum elementów w poszczególnych próbach jest bardzo bliski normalnego.

Sądzę, że nawet na wykładzie dla matematyków celowe jest przeprowadzenie kilku takich doświadczeń, nie w celu zastąpienia dowodów, ale dla ilustracji twierdzeń.

Należy jednak ostrzec przed konstruowaniem populacji sztucznych rozkładów o nieskończonych momentach niskich rzędów (jak np. rozkład Cauchy'ego), gdyż to może prowadzić do fałszywych wyników.

Bardzo pouczające jest zastosowanie losowań z populacji sztucznych na wykładach statystyki matematycznej, w szczególności na wykładach teorii przedziałów ufności oraz teorii weryfikacji hipotez statystycznych. Ograniczymy się do szczegółowego omówienia zastosowań do teorii przedziałów ufności, gdyż postępowanie na wykładach teorii weryfikacji hipotez jest analogiczne.

Metoda przedziałów ufności polega, jak wiadomo, na tym, że przy oszacowaniu nieznanego parametru Q populacji generalnej znajdujemy z próby liczącej j elementów dwie takie funkcje obserwacji $\underline{A}(x_1, x_2, \ldots, x_j)$ i $\bar{A}(x_1, x_2, \ldots, x_j)$, czyniące zadość nierówności

$$\underline{A}(x_1, x_2, \ldots, x_j) \leqslant \bar{A}(x_1, x_2, \ldots, x_j),$$

że ze z góry danym prawdopodobieństwem α przedział $(\underline{A}, \bar{A})$ będzie pokrywał parametr nieznany Q. Inaczej mówiąc, gdy ilość prób będzie dostatecznie duża, to na 100 prób nieznany parametr Q będzie się zawierał w przybliżeniu 100α razy w przedziale losowym $(\underline{A}, \bar{A})$, a $100(1-\alpha)$ razy będzie leżał poza tym przedziałem. Otóż tę prawidłowość można sprawdzać za pomocą losowań z populacji sztucznych. Poniższy przykład ilustruje szczegółowo metodę postępowania.

TABLICA 2

Nr próby	Wartości wylosowane (x_1, x_2, x_3, x_4)	$\bar{x}$	Nr próby	Wartości wylosowane (x_1, x_2, x_3, x_4)	$\bar{x}$
1	22, −10, −12, 14	3,50	33	−9, −19, −15, −16	−14,75
2	−8, −6, 15, 4	5,25	34	0, −15, −11, −14	−10,00
3	−8, −7, −13, 4	−6,00	35	13, −12, −13, 1	−2,75
4	−7, −9, 3, −3	−4,00	36	0, −12, 14, −8	−1,50
5	16, 11, 3, −1	7,25	37	2, −3, −15, 14	−0,50
6	6, 1, 4, −10	0,25	38	−1, 0, 23, 19	10,25
7	10, 3, −11, 5	1,75	39	2, −21, −27, −3	−12,25
8	4, 11, −9, 25	7,75	40	9, −4, 2, 4	2,75
9	−3, −3, 10, 6	2,50	41	−7, −7, −6, 10	−2,50
10	16, −1, 2, 6	5,75	42	0, 0, 17, −22	−1,25
11	−4, −29, −7, −20	−5,00	43	−20, −13, −10, 7	−9,00
12	20, −4, −3, 5	4,50	44	−3, 2, 12, 2	3,25
13	−9, 10, 10, −2	2,25	45	−2, −12, −25, 9	−7,50
14	−6, 1, 0, −15	−5,00	46	3, 10, 8, −7	3,50
15	13, 8, 1, −6	4,00	47	1, −16, 0, −9	−6,00
16	−7, 1, 4, 13	2,75	48	16, −1, −7, 1	2,25
17	−10, 6, 24, −3	4,25	49	4, −2, 16, −21	−0,75
18	12, −2, −14, −6	−2,50	50	8, 9, −6, 10	5,25
19	−9, −10, 7, −14	−6,50	51	7, −17, 3, 3	−1,00
20	−16, −16, −6, 3	−8,75	52	0, −3, 1,3	0,25
21	−1, −15, 1, 15	0,00	53	10, 13, 0, −9	3,50
22	−19, −15, −2, 7	−7,25	54	−21, 3, 19, −14	−3,25
23	−6, −12, 1, −3	−5,00	55	0, 6, −7, 16	3,75
24	6, −6, 5, 13	4,50	56	7, 15, −2, 0	5,00
25	−13, 4, −4, 13	0,00	57	12, 0, 12, −15	2,25
26	−2, 13, −3, −9	−0,25	58	3, 8, 5, 6	5,50
27	9, −11, 6, −7	−0,75	59	15, 14, 9, −5	8,25
28	2, 17, 22, 13	13,50	60	7, −4, 10, −1	3,00
29	−14, 16, −12, 8	−0,50	61	−2, −15, −7, −11	−8,75
30	−2, 4, 3, −10	−1,25	62	−12, −3, −21, 13	−5,75
31	9, −8, 2, −17	−2,00	63	−9, −13, −10, 8	−4,00
32	5, 9, 18, −9	5,75	64	11, −6, −10, −2	−1,75
65	5, 15, −2, 14	8,00	83	−28, 18, −1, 7	−1,00
66	−11, 5, 11, 14	4,75	84	12, 15, 0, −20	1,75
67	8, 10, 10, 11	9,75	85	−16, −3, −15, −15	−12,25
68	7, 14, 9, 2	8,00	86	36, −6, −8, 3	6,25
69	−1, −4, −1, −12	−4,50	87	−8, 6, −5, −3	−2,50
70	1, −11, 7, 1	−0,50	88	1, 15, 10, 8	8,50
71	−3, 1, 15, 2	3,75	89	16, 6, 0, −13	2,25
72	−3, −1, 2, −15	−4,25	90	24, −4, −2, 0	4,50
73	4, 13, −5, 10	5,50	91	8, 2, −3, 3	2,50
74	6, −11, 9, 17	5,25	92	−16, 13, −2, −11	−4,00
75	4, 0, 2, −10	−1,00	93	14, 5, −3, 16	8,00
76	18, 12, −9, −5	4,00	94	−1, −33, 2, 8	−6,00
77	4, −7, 5, 13	3,75	95	0, −6, 11, −12	−1,75
78	4, 2, 26, 0	8,00	96	11, −7, 11, 4	4,75
79	3, 24, 1, −8	5,00	97	−5, 3, −11, −2	−3,75
80	4, −8, 3, −6	−1,75	98	11, 3, −16, −1	−0,75
81	11, 2, −8, −3	0,50	99	−14, 1, −3, 4	−3,00
82	1, −3, −4, −7	−3,00	100	7, 2, 12, −2	4,75

PRZYKŁAD. Uważajmy chwilowo wartość przeciętną m populacji przedstawionej w tablicy 1 za nieznaną, a jej odchylenie standardowe za znane. Oszacujmy m ze 100 prób, po 4 elementy każda, wylosowanych z rozważanej populacji. Będziemy brali przedział ufności na poziomie $\alpha=0{,}95$. Jak wiadomo, po uwzględnieniu wielkości współczynnika ufności, mamy

$$\underline{A}=\bar{x}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{x}-1{,}96\frac{10}{\sqrt{4}}=\bar{x}-9{,}8,$$

$$\bar{A}=\bar{x}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{x}+9{,}8,$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną wartości x w próbie liczącej 4 elementy.

Spodziewamy się, że w przybliżeniu 95 razy prawdziwa przeciętna wartość, która wynosi tu 0, będzie zawarta w przedziale $(\bar{x}-9{,}8\,,\bar{x}+9{,}8)$, a więc, że w przybliżeniu 95 razy zaobserwujemy wartości $\bar{x}$ nie przekraczające co do wartości bezwzględnej 9,8.

W tablicy 2 przedstawiono wartości $\bar{x}$, otrzymane w rezultacie wylosowania 100 prób z rozważanej populacji. Do losowań użyto tablic liczb losowych Vielrosego, mianowicie fragment tych tablic, zawierający wiersze 26-50 na stronicy 11 oraz wiersze 1-15 na stronicy 12.

Z tablicy 2 znajdujemy, że przedział $(\bar{x}-9{,}8\,,\bar{x}+9{,}8)$ pokrywa wartość zero 95 razy, a w pięciu próbach wartość 0 leży poza tym przedziałem. Rzecz jasna, że na 100 przedziałów nie zawsze otrzymamy dokładnie 100α przedziałów pokrywających nieznaną wartość parametru. Zauważmy zresztą, że w próbie Nr 67 otrzymano $\bar{x}=9{,}75$, a więc wartość bliską krytycznej równej 9,8.

Jeżeli w rezultacie K prób ilość przedziałów ufności — obliczonych na poziomie α — które pokrywają parametr badany Q, jest różna od $100K\alpha$, to wskazane jest obliczać prawdopodobieństwo otrzymania zaobserwowanej ilości sukcesów w K doświadczeniach dokonywanych według schematu Bernoulliego, gdy prawdopodobieństwo sukcesu $p=\alpha$.

Na zakończenie wskażemy pokrótce na zastosowanie populacji sztucznych do celów badawczo-naukowych.

Wiadomo, że podstawą zastosowania rachunku prawdopodobieństwa do statystyki matematycznej stanowią rozkłady statystyk, tj. rozkłady zmiennych losowych będących funkcjami j obserwacji dokonanych na elementach wylosowanych z badanej populacji. Jednak znalezienie rozkładów statystyk dla poszczególnych liczebności prób j jest nieraz bardzo trudne, wobec czego trzeba szukać przybliżonego rozkładu statystyki w drodze empirycznej, tj. przez bardzo dużą ilość losowań z populacji sztucznej. W statystyce ostatniach lat spotykamy nieraz to zjawisko. Zacytujemy następujący przykład:

Gęstość rozstępu w próbach z populacji często spotykanych w zastosowaniach — między innymi z populacji normalnej — jest bardzo skomplikowana, zawiera całki w różnych potęgach, skutkiem czego obliczenie dystrybuanty rozstępu przez wycałkowanie gęstości jest uciążliwe i w praktyce nie stosowane. Dopiero w ostatnich latach ukazują się prace, które mają na celu ułatwić potrzebne obliczenia. Jednak rozkład rozstępu w próbach ma bardzo duże znaczenie w zastosowaniach, szczególnie wskutek tego, że wciąż wzrasta tendencja, aby zastępować odchylenie standardowe, jako miarę rozproszenia, przez rozstęp. Znaleziono więc różne charakterystyki rozkładu rozstępu na drodze empirycznej[3]).

Przykład ten, bynajmniej nie wyjątkowy, świadczy o możliwości zastosowania losowań z populacji sztucznych jako aparatu naukowo-badawczego.

М. Фиш (Варшава)

ПОСТРОЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Р Е З Ю М Е

В работе описан метод построения искусственных численных совокупностей, распределенных по данному закону. Указана возможность применения этих совокупностей в качестве наглядного пособия в преподавании теории вероятностей и математической статистики.

В таблице 1 представлена совокупность 10000 элементов, распределенных приблизительно по нормальному закону $N(0;10)$.

В таблице 2 приведены данные следующего опыта: Из 100 выборок по 4 элемента, случайно извлеченных из совокупности, приведенной в таблице 1, получено средние значения $\bar{x}$. Учитывались случаи, когда доверительный интервал на уровне 0,95 — т. е. интервал $(\bar{x}-9{,}8\,,\bar{x}+9{,}8)$ — покрывает известное среднее значение равное 0. Результаты опыта находятся в хорошим согласии с ожидаемыми результатами.

---

[3]) Zob. K. Pearson, *Tables for Statisticians and Biometricians*, Part. II, Cambridge 1914, tablice XXIII i XXIV.

M. Fisz (Warszawa)

THE CONSTRUCTION OF ARTIFICIAL POPULATIONS AND THEIR APPLICATION

SUMMARY

A method of constructing artificial populations having a given distribution and consisting of numbers is given. The possibility of the application of such populations by lecturers in the theory of probability and in mathematical statistics is considered.

A population numbering 10 000 elements having approximately a normal distribution $N(0;10)$ is presented in table 1.

The following experiment is shown in table 2: The mean values $\bar{x}$ in 100 random samples containing 4 elements, chosen from the population presented in table 1, have been found. The number of cases where the confidence interval at the level 0,95, *i. e.* then interval $(x-9{,}8\ ,\ \bar{x}+9{,}8)$, covers the known mean value equal to 0 has been counted. The result of the experiment agrees very well with the expected one.