J. CZAJKOWSKI i T. TIETZ (Toruń)

O pewnym równaniu różniczkowym

Niniejsza praca dotyczy całek równania różniczkowego drugiego rzędu

$$xy'' + vy' + ay = 0 \tag{1}$$

dla pewnych wartości stałej v oraz $a \neq 0$.

Równanie (1) zostało rozwiązane w postaci zamkniętej dla wartości $v = n+1/2$ oraz $v = -2n$ [1]), gdzie $n = 1, 2, \ldots$ Okażemy, że można je również rozwiązać w postaci zamkniętej w przypadku, gdy $v = 2(n+1)$ i $a = -1$ oraz gdy $v = 3/2 - n$ i $a \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Rozumowanie nasze opiera się na następującej prostej uwadze, której dowód pozostawiamy czytelnikowi:

Równanie różniczkowe

$$xy'' + (2-\mu)y' + ay = 0 \tag{2}$$

przez podstawienie

$$y = ux^{\mu-1} \tag{3}$$

sprowadza się do równania różniczkowego

$$xu'' + \mu u' + au = 0. \tag{4}$$

I. Niech $v = 3/2 - n$ i $a \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Równanie (1) ma wówczas postać

$$xy'' + \left(\frac{3}{2} - n\right)y' + ay = 0 \qquad (a \neq 0), \tag{1'}$$

czyli jest to równanie typu (2), gdzie $\mu = n + 1/2$. Stosując podstawienie (3)

$$y = ux^{n-1/2} \tag{5}$$

[1]) Zob. [1], [2] i [3].

otrzymujemy równanie

$$2xu'' + (2n+1)u' + 2au = 0,$$

mające rozwiązania [2])

$$u = \begin{cases} c_1 \dfrac{d^n}{dx^n} \cosh 2\sqrt{-ax} + c_2 \dfrac{d^n}{dx^n} \sinh \sqrt{-ax}, & ax < 0; \\ c_1 \dfrac{d^n}{dx^n} \cos 2\sqrt{ax} + c_2 \dfrac{d^n}{dx^n} \sin \sqrt{ax}, & ax > 0. \end{cases}$$

Równanie (1′) ma więc dwie całki liniowo niezależne postaci (5).

II. Niech $v=2(n+1)$ i $a=-1$ $(n=1,2,\ldots)$. Równanie (1) ma wówczas postać

$$(1'') \qquad xy'' + 2(n+1)y' - y = 0,$$

czyli jest to równanie typu (2), gdzie $\mu=-2a$, $a=-1$. Stosując podstawienie (3) $y=ux^{-(2n+1)}$ otrzymujemy z (1″) równanie

$$xu'' - 2nu - u = 0$$

o znanych rozwiązaniach [3]), a tym samym rozwiązaliśmy równanie różniczkowe (1) w przypadku $v=2(n+1)$ i $a=-1$ $(n=1,2,\ldots)$.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA w TORUNIU

Prace cytowane

[1] A. R. Forsyth-Jacobsthal, *Differential-Gleichungen*, Braunschweig 1912.

[2] J. L. Burchnall and T. W. Chaundy, *A Note on the Hypergeometric and Bessel's Equations*, Quarterly Journal Oxford 1 (1930), str. 186-195.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1943.

Я. Чайковский и Т. Тиц (Торунь)

ЗАМЕТКА О ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

РЕЗЮМЕ

Работа касается дифференциального уравнения $xy''+vy'+ay=0$ $(a\neq 0)$. Подстановкой $y=ux^{v-1}$ расширяется класс решений этого уравнения на случай $v=2(n+1)$, $v=3/2-n$.

---

[2]) Zob. Forsyth-Jacobsthal [1], str. 204.

[3]) Zob. Burchnall and Chaundy [2], str. 190, i Kamke [3], str. 424-425.

J. Czajkowski and T. Tietz (Toruń)

A NOTE ON THE HYPERGEOMETRICAL DIFFERENTIAL EQUATION

SUMMARY

The paper concerns the differential equation $xy''+vy'+ay=0$ $(a\neq 0)$. By the substitution of $y=ux^{v-1}$ we extend the class of solutions of the above equation to the cases $v=2(n+1)$, $v=3/2-n$.