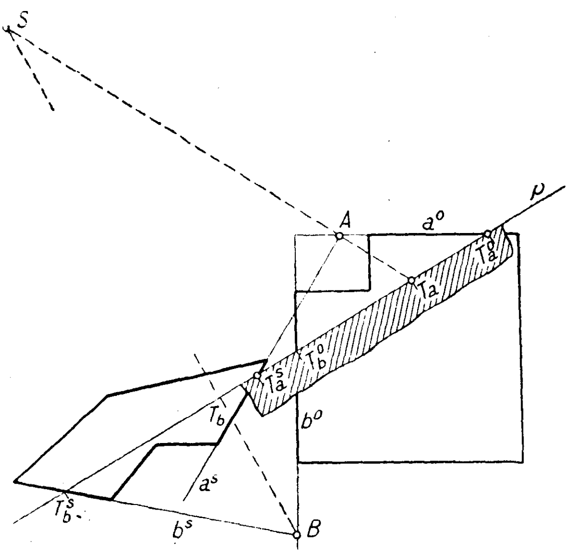
S. Szerszeń (Gliwice)

Perspektograf przesuwny

1. Cel rozważań

Będziemy rozważali zmechanizowane kreślenie perspektyw. Przyrząd mechanizujący pracę kreślarską, zwany *perspektografem przesuwnym*, składa się ze skrawka papieru; na jego krawędzi prostoliniowej oznaczamy trzy punkty T^s, T i T^0. Parę punktów T^s i T^0 obieramy dowolnie, a położenie punktu T względem obranych punktów T^s i T^0 jest zależne od kąta zawartego między płaszczyzną podstawy (na której stoi rysowany przedmiot) a płaszczyzną tła (na której rysujemy ów przedmiot) oraz od położenia oka względem obu tych płaszczyzn.



Rys. 1

Na wstępie narysujemy perspektywę τ^s dowolnej figury τ^0, np. kwadratu z wycięciem prostokątnym (rys. 1), i pominiemy warunki ustalające położenie punktu T na perspektografie.

Na arkusz rysunkowy kładziemy rysunek przedstawiający prawdziwy kształt figury τ^0, lub lepiej na ów rysunek kładziemy papier przezroczysty, na którym będziemy rysowali perspektywę τ^s.

Obieramy dowolnie stały punkt S (środek układów τ^0 i τ^s) oraz dowolnie stałą prostą p (linię podstawy), która nie przechodzi przez punkt S. Na perspektografie obieramy również dowolnie trójkę punktów T^s, T i T^0.

W celu narysowania perspektywy a^s prostej a^0 układamy perspektograf (na rysunku zakreskowany) tak, by jego krawędź prostoliniowa przylegała do prostej p i by jego punkt T^0 leżał na prostej a^0. W tym położeniu punkty T^s, T i T^0 perspektografu oznaczamy odpowiednio T^s_a, T_a i T^0_a. Prosta ST_a przecina prostą a^0 w punkcie wiążącym A (rysowanie prostej ST_a jest zbędne). Prosta AT^s_a jest szukaną perspektywą a^s.

Podobnie w celu narysowania perspektywy b^s prostej b^0 przesuwamy perspektograf wzdłuż prostej p tak, by jego punkt T^0 leżał na prostej b^0; w tym położeniu punkty T^s, T i T^0 oznaczamy T^s_b, T_b i T^0_b. Prosta ST_b wyznacza na prostej b^0 punkt wiążący B, a prosta BT^s_b jest perspektywą szukaną b^s, itd. Widzimy, że perspektywy a^s, $b^s, \ldots$ otrzymujemy bez kreślenia pomocniczych linii konstrukcyjnych.

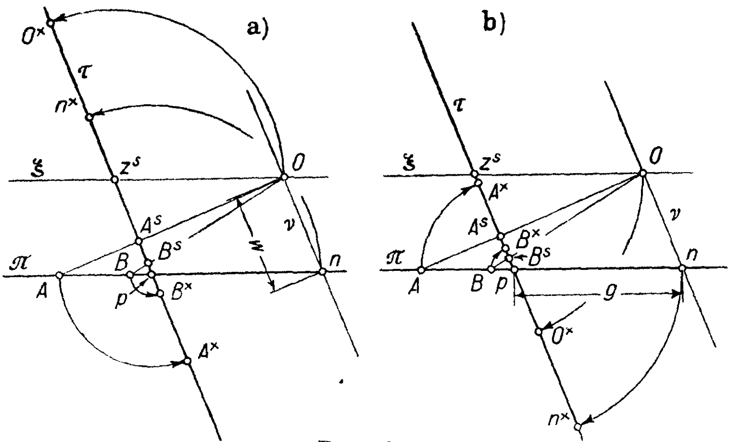
W dalszym ciągu zajmiemy się uzasadnieniem koncepcji perspektografu przesuwnego oraz ustaleniem warunków pozwalających konstruować perspektywę dla ściśle określonego położenia oka i tła względem obserwowanego przedmiotu.

2. Wiadomości wstępne

Obierzmy płaszczyznę poziomą π (rys. 2a i 2b) i nachyloną do niej (lub pionową) płaszczyznę τ; ich linię przecięcia oznaczamy literą p. Wymienione elementy π, τ i p są prostopadłe do płaszczyzny rysunku i przechodzą przez odpowiednie elementy podane na rysunkach 2a i 2b. Obierzmy dowolnie położony punkt O, nie leżący na żadnej z płaszczyzn π i τ. Punkt O niech będzie *środkiem rzutów* (*okiem*), a płaszczyzny π i τ niech będą odpowiednio płaszczyznami *podstawy* i *tła*; prostą p nazwiemy *śladem tłowym płaszczyzny* π lub krótko *linią podstawy*.

Dowolny układ punktów $A, B, \ldots$ i prostych $a, b, \ldots$ leżących na płaszczyźnie podstawy π, rzućmy z oka O na tło τ. Promienie widzenia OA, $OB, \ldots$ przebijają tło τ w odpowiednich punktach $A^s, B^s, \ldots$, podobnie płaszczyzny promienne $\alpha, \beta, \ldots$, wyznaczone przez punkt O i przez kolejne proste $a, b, \ldots$, przecinają tło τ w odpowiednich prostych $a^s, b^s, \ldots$ W wyniku rzutu otrzymaliśmy na tle τ *perspektywy* $A^s, B^s, \ldots$ $a^s, b^s, \ldots$ odpowiednich punktów $A, B, \ldots$ i prostych $a, b, \ldots$ płaszczyzny podstawy π.

Przez punkt O poprowadźmy płaszczyzny $\xi \| \pi$ oraz $\nu \| \tau$ i oznaczmy ich linie przecięcia: $z^s = \xi \times \tau$ i $n = \nu \times \pi$; prostą z^s nazywamy *śladem zbiegu* lub *linią horyzontu*, a prostą n nazywamy *śladem zniknienia*. O prostych z^s



Rys. 2

i n mówimy, że są *prostymi granicznymi* odpowiednich układów τ i π. Gdy bowiem punkt A^s zbliża się do prostej z^s i w granicy prostą tę osiąga, wówczas odpowiedni punkt A (który jest punktem przebicia promienia OA^s z płaszczyzną π) oddala się i w granicy staje się punktem niewłaściwym płaszczyzny π. Gdy zaś punkt A zbliża się do prostej n i w granicy tę prostą osiąga, wówczas odpowiedni punkt A^s (który jest punktem przebicia promienia OA z płaszczyzną τ) oddala się i w granicy staje się punktem niewłaściwym tła τ.

Wiadomo, iż między układami płaskimi $\pi(A, B, \ldots, a, b, \ldots)$ oraz $\tau^s(A^s, B^s, \ldots, a^s, b^s, \ldots)$ zachodzi *kolineacja środkowa*, czyli związek perspektywiczny. W związku tym punkt O jest *środkiem kolineacji*, prosta p jest *osią kolineacji*, a proste n i z^s są *prostymi granicznymi* rozważanych środkowo kolineacyjnych układów π i τ.

Oddalenie prostej p od prostej z^s, równe oddaleniu prostej n od oka O, oznaczamy literą w. Oddalenie prostej n od prostej p, równe oddaleniu oka O od prostej z^s, oznaczamy literą g.

W przypadku gdy $\tau \perp \pi$, odcinek w przedstawia *wysokość horyzontu* (oddalenie płaszczyzny podstawy od oka), a odcinek g przedstawia *głębokość tłową* (oddalenie oka od tła).

3. Przesunięcie układów środkowo kolineacyjnych

Obróćmy układ $\pi(A, B, \ldots, a, b, \ldots, n, \ldots, z^\infty)$ dookoła prostej p tak, by zjednoczył się z płaszczyzną tła τ; ów obrócony układ nazywamy

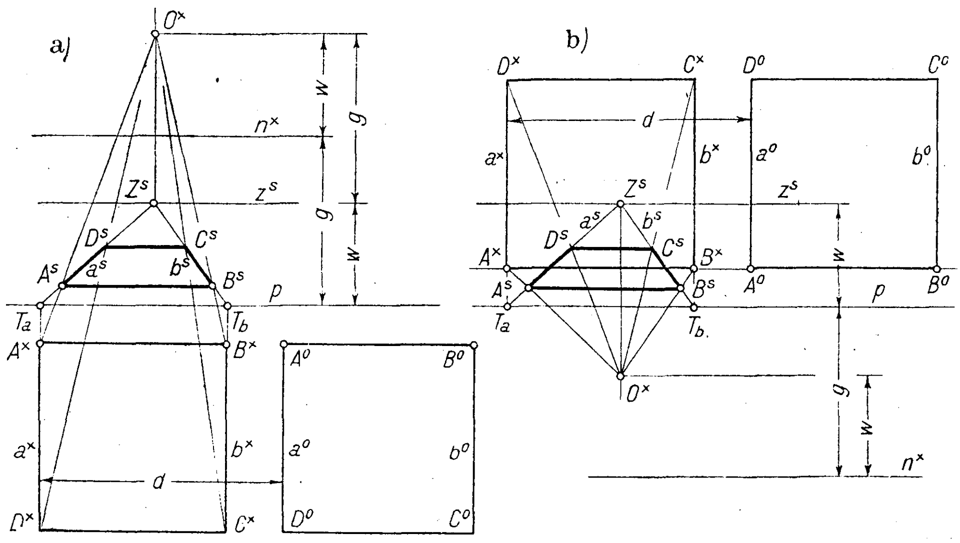
$\tau^\times(A^\times, B^\times, \ldots, a^\times, b^\times, \ldots, n^\times, \ldots, z^\times_\infty)$. Obrót może być dokonany w dwóch przeciwnych kierunkach, wskazanych na rysunku 2a i 2b. Wiadomo, że między takimi dwoma złączonymi na płaszczyźnie τ układami

$$\tau^s(A^s, B^s, \ldots, a^s, b^s, \ldots, n^s_\infty, \ldots, z^s) \quad \text{i} \quad \tau^\times(A^\times, B^\times, \ldots, a^\times, b^\times, \ldots, n^\times, \ldots, z^\times_\infty)$$

występuje związek perspektywiczny, którego osią jest prosta p, a środkiem punkt $O^\times$, uzyskany przez zgodny obrót oka O dookoła prostej z^s.

Rozważane dwa perspektywiczne układy τ^s i $\tau^\times$, złączone na płaszczyźnie rysunku τ, przedstawiono na rysunkach 3a i 3b. Układ $\tau^\times$ tworzy kwadrat $A^\times B^\times C^\times D^\times$, a układ τ^s tworzy czworokąt $A^s B^s C^s D^s$, który jest perspektywą tego kwadratu.

Perspektywy a^s i b^s boków $a^\times$ i $b^\times$, prostopadłych do linii podstawy p, zbiegają się w *śladzie zbiegu* Z^s_i, w którym *główna linia pionu* (poprowadzona przez $O^\times$ prostopadle do p) przecina się ze śladem zbiegu z^s płaszczyzny π.



Rys. 3

W kolineacji środkowej (związku perspektywicznym) oprócz odpowiedniości elementów $A^\times$ i A^s, $B^\times$ i $B^s, \ldots$, $a^\times$ i a^s, $b^\times$ i $b^s, \ldots$ i przynależności elementów $A^\times$ na $a^\times$ i A^s na a^s, $B^\times$ na $b^\times$ i B^s na $b^s, \ldots$, spełnione są jeszcze dwa warunki:

1. Pary odpowiadających sobie punktów $A^\times$ i A^s, $B^\times$ i $B^s, \ldots$ leżą na prostych przechodzących przez środek kolineacji (perspektywiczny) O. Proste te nazywamy *promieniami kolineacji* lub *promieniami widzenia*.

2. Pary odpowiadających sobie prostych $a^{\times}$ i a^{s}, $b^{\times}$ i $b^{s}, \ldots$ przecinają się w punktach $T_a, T_b, \ldots$, leżących na osi kolineacji (linii podstawy). Punkty te nazywamy *śladami tłowymi* odpowiednich prostych $a, b, \ldots$

Dwa perspektywiczne układy $\tau^{\times}$ i τ^{s} oznaczamy symbolami

$$\tau^{\times}(A^{\times}, B^{\times}, \ldots, a^{\times}, b^{\times}, \ldots) \overline{\wedge} \tau^{s}(A^{s}, B^{s}, \ldots, a^{s}, b^{s}, \ldots)$$

lub krótko $(\tau^{\times}) \overline{\wedge} (\tau^{s})$.

Niech teraz układ $\tau^{\times}(A^{\times}, B^{\times}, \ldots, a^{\times}, b^{\times}, \ldots)$ przesunie się w kierunku równoległym do osi kolineacji p o dowolnie obraną skończoną długość d i w tym nowym położeniu niech układ ten nazywa się

$$\tau^{0}(A^{0}, B^{0}, \ldots, a^{0}, b^{0}, \ldots).$$

Widzimy, że odpowiedniość elementów A^0 i A^s, B^0 i $B^s, \ldots$, a^0 i a^s, b^0 i $b^s, \ldots$ oraz przynależność elementów A^0 na a^0 i A^s na a^s, B^0 na b^0 i B^s na $b^s, \ldots$ nie uległy zmianie, natomiast pozostałe dwa warunki wymienione pod 1 i 2 przez elementy układów τ^0 i τ^s na ogół nie będą spełnione. Między układami τ^0 a τ^s występuje więc, jak wiadomo, związek *kolineacji ogólnej* (*homografii*). Układy takie oznaczamy symbolem $(\tau^0) \wedge (\tau^s)$.

4. Zależność między układami τ^0 a τ^s

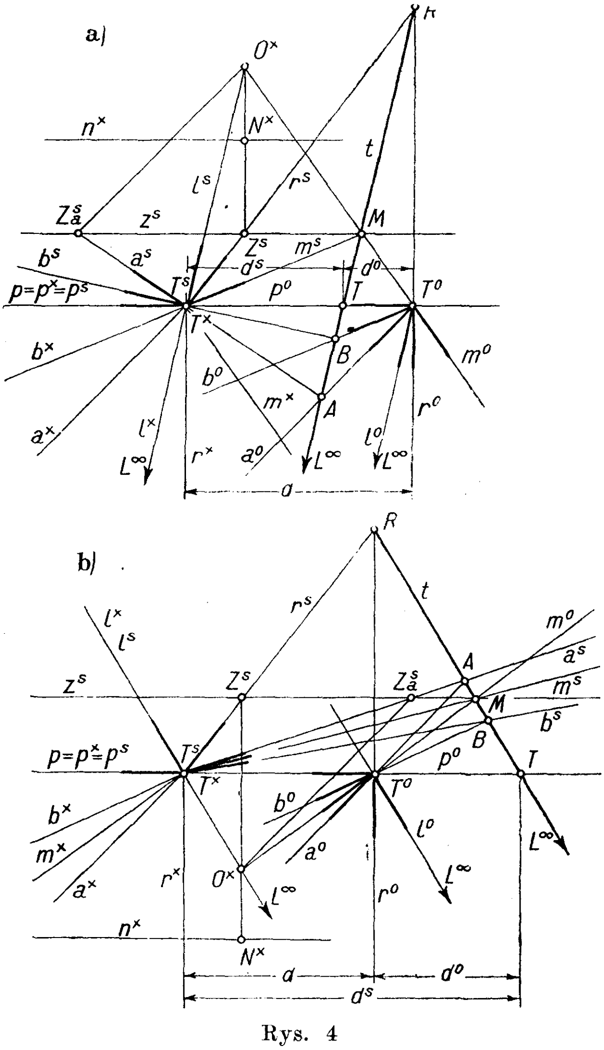
Na płaszczyźnie tła τ ustalmy dwa środkowo kolineacyjne układy $\tau^{\times}$ i τ^{s} o środku $O^{\times}$, osi kolineacji p i prostych granicznych z^s i $n^{\times}$ (rys. 4a i 4b, odpowiednio dla obu przypadków obrotu płaszczyzny podstawy π). Układem $\tau^{\times}$ niech będzie pęk prostych $T^{\times}(a^{\times}, b^{\times}, \ldots)$, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt $T^{\times}$ linii podstawy p; znajdźmy teraz w układzie τ^s pęk odpowiednich prostych $T^s(a^s, b^s, \ldots)$. Jak wiadomo, punkty odpowiednie $T^{\times}$ i T^s na linii podstawy jednoczą się, a prostą np. a^s wyznaczymy, gdy przez środek $O^{\times}$ narysujemy *promień zbiegu* prostej $a^{\times}$ (równoległy do $a^{\times}$); przez jego punkt Z^s_a przecięcia z prostą graniczną z^s przechodzi owa szukana prosta $a^s = T^s Z^s_a$. Prostym $l^{\times} = T^{\times} O^{\times}$, $p^{\times} = p$ i $r^{\times} \perp p$ pęku $(T^{\times})$ odpowiadają tu kolejne proste $l^s = l^{\times}$, $p^s = p$ i $r^s = T^s Z^s$ w pęku (T^s).

Przesuńmy pęk $(T^{\times})$ w kierunku równoległym do linii podstawy p o dowolną długość $d = T^{\times} T^0 = T^s T^0$; ów przesunięty pęk oznaczamy symbolem $T^0(a^0, b^0, \ldots, l^0, \ldots, p^0, r^0, \ldots)$. Stwierdzamy, że

$$T^s(a^s, b^s, \ldots, l^s, p^s, r^s, \ldots) \overline{\wedge} T^{\times}(a^{\times}, b^{\times}, \ldots, l^{\times}, \ldots, p^{\times}, r^{\times}, \ldots) \cong$$

$$\cong T^0(a^0, b^0, \ldots, l^0, \ldots, p^0, r^0, \ldots).$$

Ponieważ jednak w ogniwach skrajnych tego łańcucha elementy odpowiednie p^s i p^0 jednoczą się, przeto pęki (T^s) i (T^0) są, jak wiadomo, perspektywiczne, a więc pary odpowiednich prostych a^s i a^0, b^s i b^0,... przecinają się w punktach A, B,... leżących na osi t owej perspektywiczności.



Rys. 4

Kierunek prostej t określa punkt L^∞, który jest wspólnym elementem pary $l^s || l^0$. A zatem

(1) *Gdy w dwóch perspektywicznych układach* $\tau^\times$ *i* τ^s *(o środku* $O^\times$ *i linii podstawy* p*) obierzemy pęki* $(T^\times) \overline{\wedge} (T^s)$ *o wspólnym wierzchołku* $T^\times = T^s$*, dowolnie położonym na linii* p*, i następnie przesuniemy pęk* $(T^\times)$ *w kierunku* p *o dowolną skończoną długość* d *do nowego położenia* (T^0)*, wówczas otrzymamy pęki* $(T^s) \overline{\wedge} (T^0)$*, których osią jest prosta* t*, równoległa do prostej* $T^\times O^\times$.

Zauważmy, że prosta t musi przechodzić przez:

1^0 punkt M, w którym prosta $m^0 = T^0O^\times$ przecina prostą graniczną z^s; gdy bowiem w pęku $(T^\times)$ obierzemy prostą $m^\times || T^0O^\times$, wówczas w pęku (T^s) odpowie jej prosta m^s, której ślad zbiegu M jest wyznaczony przez przecięcie promienia zbiegu $O^\times T^0 || m^\times$ (a więc prostej m^0) z prostą graniczną z^s;

2^0 punkt R, w którym prosta $r^0 \perp p$ pęku (T^0) przecina odpowiednią prostą $r^s = T^sZ^s$ pęku (T^s).

Prosta t przecina linię podstawy p w punkcie T, którego położenie względem punktów T^s i T^0 oznaczamy

$$\overline{T^sT} = d^s, \tag{2}$$

$$\overline{T^0T} = d^0, \tag{3}$$

$$\overline{T^sT^0} = d. \tag{4}$$

Konstrukcję podaną na rys. 4a i 4b powtórzono na rys. 5a i 5b dla pęków $T_1^\times(a_1^\times, b_1^\times, \ldots) \overline{\wedge}\, T_1^s(a_1^s, b_1^s, \ldots)$, po czym pęk $(T_1^\times)$ przesunięto w kierunku linii podstawy p o długość d do nowego położenia $T_1^0(a_1^0, b_1^0, \ldots)$. Osią perspektywiczną pęków $(T_1^s) \overline{\wedge} (T_1^0)$ jest tu prosta $t_1 || T_1^\times O^\times$.

Załóżmy teraz, że z pękiem (T_1^0) pokrywa się pęk (T_2^s), a więc: $a_1^0 = a_2^s$, $b_1^0 = b_s^2$ itd., i znajdźmy odpowiedni pęk $T_2^\times(a_2^\times, b_2^\times, \ldots)$. Mamy tu $T_2^s = T_2^\times$, a np. prostą $a_2^\times$ wyznaczymy, rysując przez środek kolineacji $O^\times$ promień zbiegu prostej a_2^s (równoległy do a_2^s); przez jego punkt $Na_2^\times$ przecięcia się z prostą graniczną $n^\times$ przechodzi owa prosta $a_2^\times = T_2^\times Na_2^\times$. Prostym $l_2^s || t_1$, $m_2^s = T_2^s O^\times$, $p_2^s = p$ i $r_2^s \perp p$ pęku (T_2^s) odpowiadają tu kolejne proste $l_2^\times = T_2^\times Nl_2^\times$, gdy $Nl_2^\times = T_1^\times O^\times \times n^\times$, $m_2^\times = m_2^s$, $p_2^\times = p$ i $r_2^\times = T_2^\times N^\times$ pęku $(T_2^\times)$.

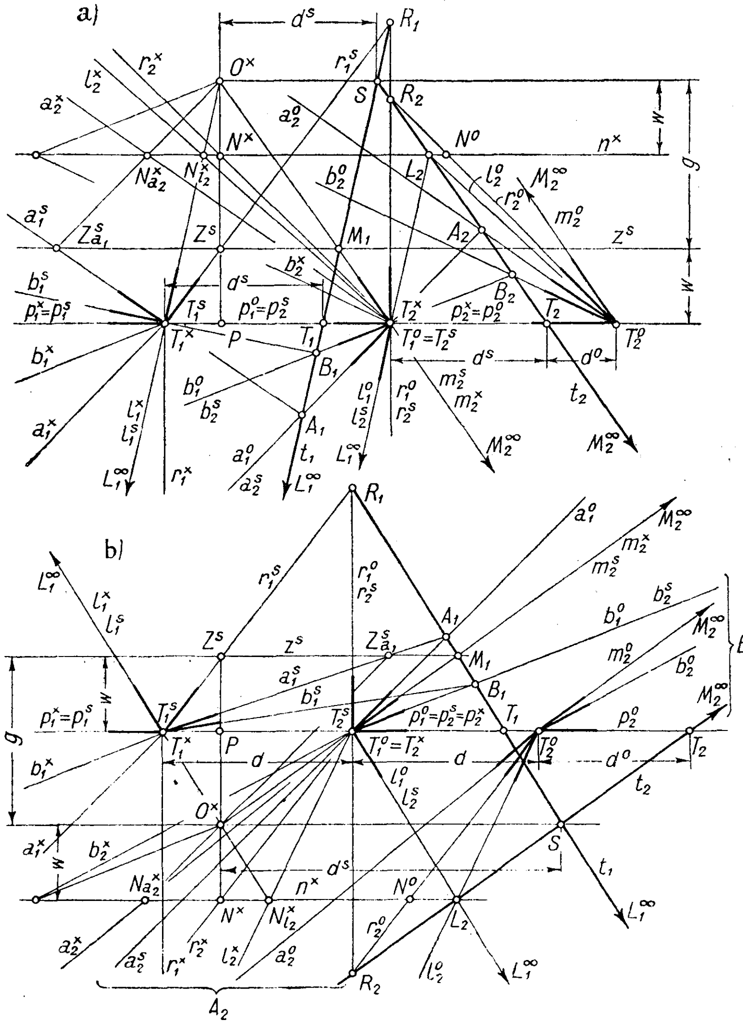
Ponieważ badamy tu wpływ przesunięcia układu $\tau^\times$, przeto musimy pęk $(T_2^\times)$ przesunąć również o tę samą długość d w zgodnym kierunku do nowego położenia (T_2^0). Według relacji (1) pęki (T_2^s) i (T_2^0) są perspektywiczne, a ich osią jest prosta t_2, której kierunek określa punkt M_2^∞, jako element wspólny pary odpowiednich prostych $m_2^s || m_2^0$.

Zauważmy, że prosta t_2 musi przechodzić przez:

1^0 punkt L_2, w którym prosta l_2^0 przecina prostą graniczną $n^\times$; gdy bowiem w pęku $(T_1^\times)$ obierzemy prostą $l_1^\times = T_1^\times O^\times$, odpowie jej w pęku (T_1^0) prosta $l_1^0 || T_1^\times O^\times$, która jednoczy się z prostą l_2^s, prostej l_2^s odpowiada prosta $l_2^\times = T_2^\times Nl_2^\times$, a ta uległa równoległemu przesunięciu do położenia l_2^0; trójkąty $T_1^\times Nl_2^\times T_2^\times$ i $T_2^\times L_2 T_2^0$ są tu więc przystające;

2^0 punkt R_2, w którym prosta $r_2^s \perp p$ pęku (T_2^s) przecina odpowiednią prostą $r_2^0 = T_2^0 N^0$ pęku (T_2^0), gdy N^0 jest zgodnie przesuniętym o długość d śladem zniknienia $N^\times$ kierunku prostych prostopadłych do linii podstawy p.

Oznaczmy literą S punkt przecięcia się prostych t_1 i t_2, a literami T_1 i T_2 punkty, w których te proste przecinają linię podstawy p. Z rysunków 5a i 5b czytamy:



Rys. 5

1. Ponieważ $T_1^0 M_1 S L_2$ jest równoległobokiem, więc punkt S leży na prostej przechodzącej przez punkt $O^\times$ i równoległej do linii podstawy p.

2. Z wzajemnej równoległości $O^\times T_1^s || ST_1$ i $O^\times T_2^s || ST_2$ wynika równość odcinków:

$$T_1^s T_1 = O^\times S = T_2^s T_2 = d^s,$$

a więc także

$$T_1^0 T_1 = T_2^0 T = d^0.$$

3. Z podobieństwa trójkątów $O^\times S M_1^0$ i $T_1^0 T_1 M_1$ wynika równość stosunków odcinków

$$\frac{O^\times S}{T_1^0 T} = \frac{d^s}{d^0} = \frac{g}{w}.$$

A zatem

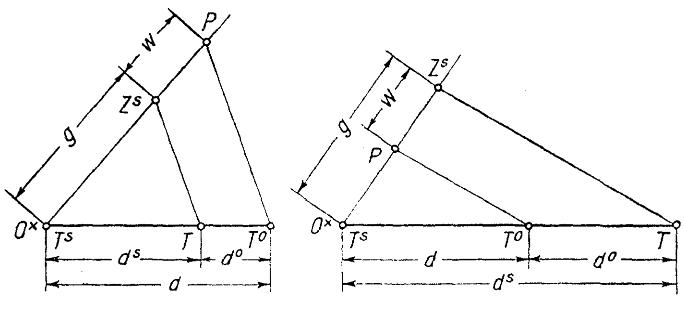
(5) *W układach τ^s i τ^0, powstałych przez przesunięcie jednego z dwóch układów perspektywicznych w kierunku ich osi p o dowolną skończoną długość d, para odpowiednich prostych x^s i x^0 przecina się w punkcie wiążącym X, który leży na prostej t, wyznaczonej przez parę punktów S i T_x. Punkty owe uzyskujemy przez zgodne przesunięcie środka perspektywicznego $O^\times$ i śladu tłowego T_x^s o długość $d^s = O^\times S = T_x^s T_x$.*

(6) *Stosunek podziału odcinka $d = T_x^s T_x^0$ punktem T_x, wyrażony stosunkiem odcinków*

$$\frac{T_x^s T_x}{T_x^0 T_x} = \frac{d^s}{d^0},$$

jest równy stosunkowi g/w, gdy g jest odległością oka O od linii horyzontu z^s, a w odległością linii podstawy p od linii horyzontu z^s.

Zgodnie z twierdzeniem (6) możemy na krawędzi perspektografu znaleźć wykreślnie położenie punktu T, gdy obrano na niej dowolny odcinek $T^s T^0$. W tym celu, dla warunków występujących np. w rysunkach 5a i 5b,



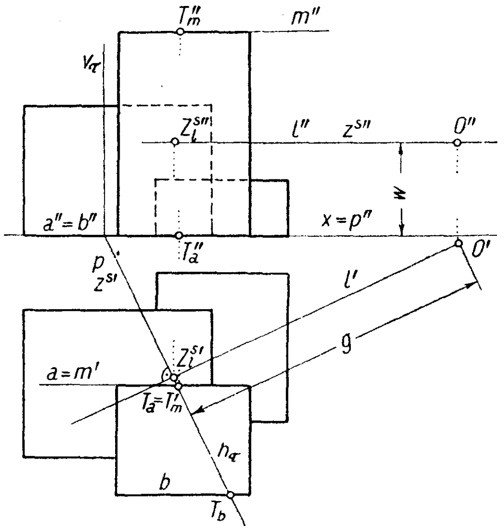
Rys. 6

odmierzymy na jednym ramieniu dowolnego kąta (rys. 6), od jego wierzchołka T^s, odcinek $T^s T^0 = d$, na drugim zaś ramieniu kąta, również od jego wierzchołka $T^s = O^\times$, odcinki $O^\times Z^s = g$ i $PZ^s = w$ tak, by długość

$O^{\times}P$ była równa odległości punktu $O^{\times}$ od linii podstawy p (por. rys. 5a i 5b). Gdy teraz równolegle do prostej PT^{0} narysujemy prostą przez *punkt* Z^{s}, *przetnie ona ramię* $T^{s}T^{0}$ w szukanym punkcie T.

5. Przykłady zastosowania perspektografu przesuwnego

A. Tło pionowe. Narysujemy perspektywę trzech przenikających się prostopadłościanów, danych w rzutach Monge'a (rys. 7). Tłem niech będzie płaszczyzna pionowa $\tau(h_{\tau}, v_{\tau})$, która przecina rzutnię poziomą (płaszczyznę podstawy) w prostej $p=h_{\tau}$, a środkiem rzutów (okiem) niech będzie punkt $O(O', O'')$.



Rys. 7

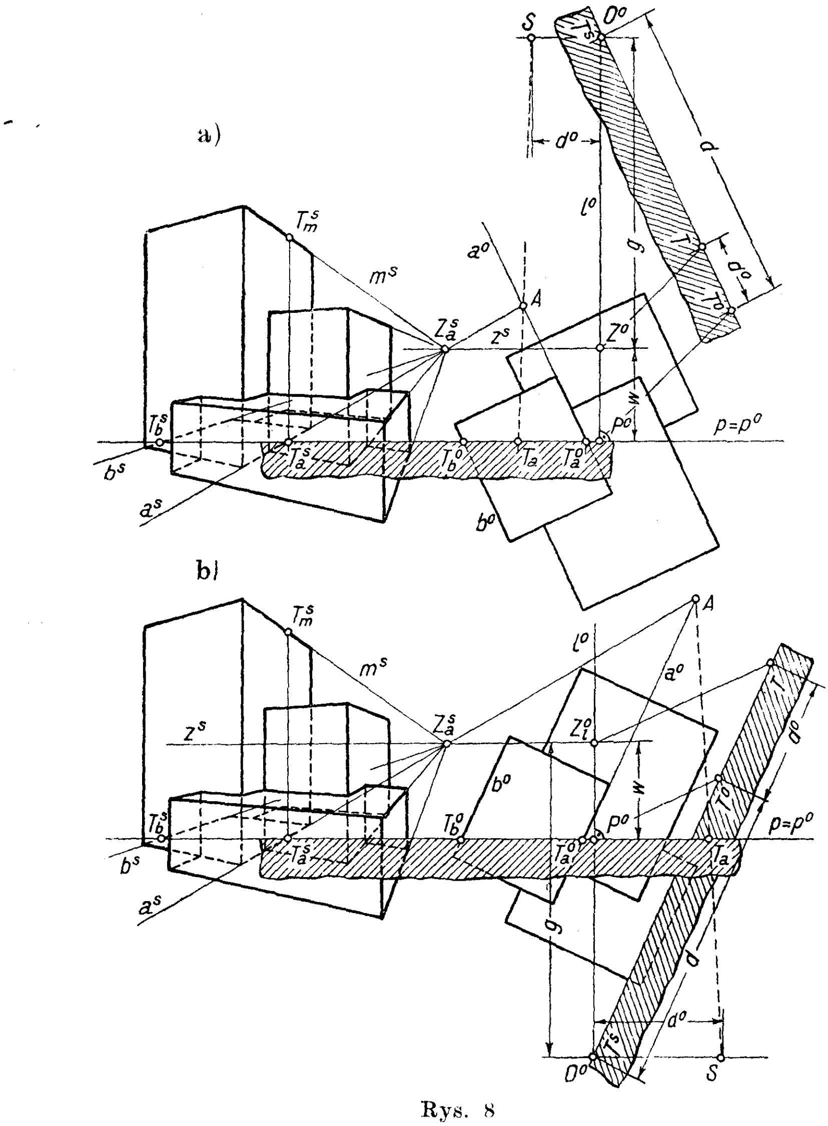
Przez oko O prowadzimy płaszczyznę poziomą (horyzontu), która przecina tło w linii horyzontu z^{s}; jej rzut poziomy $z^{s'}$ jednoczy się z prostą p, a rzut pionowy $z^{s''}$ przechodzi przez punkt O'' równolegle do osi rzutów x. Oddalenie oka O od linii horyzontu z^{s} oznaczamy literą g, oddalenie zaś linii podstawy p od linii horyzontu z^{s} oznaczamy literą w.

Na płaszczyźnie horyzontu prowadzimy przez oko O prostą l prostopadłą do lini horyzontu z^{s} a jej punkt przecięcia z tą linią oznaczamy symbolem Z^{s}_{l}.

Na rysunkach 8a i 8b przedstawiono perspektywę obranych prostopadłościanów dla obu przypadków obrotu płaszczyzny podstawy dookoła linii podstawy p na tło τ (por. ust. 3).

Przypadek I. Arkusz przeźroczystego papieru szkicowego, na którym sporządzono rysunek rzutu poziomego (rys. 7), obróćmy na odwrotną stronę; widzimy na niej lustrzane odbicie rzutu poziomego (rys. 8a). Perspektywę będziemy rysowali bądź wprost na odwrotnej stronie rzutu poziomego, bądź na napiętym na niej przeźroczystym papierze szkicowym, bądź też owo lustrzane odbicie napniemy z boku na arkuszu rysunkowym, na którym sporządzimy żądany obraz perspektywiczny. Prostą l' (rys. 7) nazwiemy teraz l^{0} (rys. 8a), a jej punkt przecięcia z linią podstawy $p=p^{0}$ oznaczymy literą P^{0}. Na prostej l^{0} odmierzymy odcinki $P^{0}Z^{0}_{l}=w$ i $Z^{0}_{l}O^{0}=g$. Przez punkt Z^{0}_{l} przechodzi linia horyzontu z^{s}, równolegle do linii podstawy $p=p^{0}$.

Na krawędzi prostoliniowej perspektografu obieramy w dowolnej odległości d parę punktów T^s i T^0, po czym perspektograf ów (zakreskowany) układamy na arkuszu rysunkowym (rys. 8a) tak, by punkt T^s



Rys. 8

zjednoczył się z punktem O^0. Prosta poprowadzona przez punkt Z_l^0 równolegle do prostej P^0T^0 wyznacza na perspektografie punkt T.

Odmierzmy odcinek $O^0S = T^0T = d^0$ na prostej równoległej do linii podstawy p. W ten sposób otrzymaliśmy położenie środka układów S

oraz perspektograf odpowiadający obranemu położeniu oka i tła względem obserwowanego przedmiotu.

Proste $a, b, \ldots$ rzutu poziomego (rys. 7) w jego lustrzanym odbiciu (rys. 8a) nazywamy odpowiednio $a^0, b^0, \ldots$ W celu narysowania np. perspektywy a^s prostej a^0 układamy krawędź perspektografu przy linii podstawy p tak, by punkt T^0 leżał na prostej a^0; w tym położeniu (zakreskowanym) punkt ów nazywamy T_a^0, a pozostałe dwa punkty perspektografu nazywamy T_a^s i T_a. Prosta ST_a wyznacza na prostej a^0 punkt wiążący A, prosta zaś AT_a^s jest szukaną perspektywą a^s.

Prosta a^s przecina linię horyzontu z^s w punkcie Z_a^s, który jest wspólnym śladem zbiegu perspektyw prostych równoległych do prostej a^0. Gdy zatem chcemy narysować perspektywę b^s prostej b^0, równoległej do prostej a^0, przesuniemy perspektograf wzdłuż linii podstawy p tak, by jego punkt T^0 znalazł się na prostej b^0; w tym położeniu punkt ów nazywa się T_b^0, punkt zaś T^s perspektografu nazywa się T_b^s. Prosta $T_b^s Z_a^s$ jest szukaną perspektywą b^s itd.

Prostą m leżącą równolegle ponad prostą a (rys. 7) w odległości $T_a'' T_m''$ odwzorujemy w perspektywie, gdy tę samą odległość odmierzymy pionowo na tle, jako odcinek $T_a^s T_m^s$ (rys. 8a); prosta $T_m^s Z_a^s$ jest szukaną perspektywą m^s.

Przypadek II (rys. 8b). Rysujemy na arkuszu przeźroczystego papieru szkicowego, napiętym na rysunku rzutu poziomego (rys. 7). Widoczne pod arkuszem linie l, a, $b, \ldots$ nazywamy teraz odpowiednio l^0, a^0, $b^0, \ldots$ (rys. 8b). Punkt przecięcia prostej l^0 z linią podstawy $p = p^0$ oznaczamy literą P^0. Na prostej l^0 odmierzamy odcinki $P^0 Z_l^0 = w$ oraz $Z_l^0 O^0 = -g$. Przez punkt Z_l^0 przechodzi linia horyzontu z^s, równolegle do linii podstawy p.

Na krawędzi prostoliniowej perspektografu obieramy w dowolnej odległości d parę punktów T^s i T^0, po czym ów perspektograf (zakreskowany) układamy na arkuszu rysunkowym (rys. 8b) tak, by punkt T^s zjednoczył się z punktem O^0. Prosta poprowadzona przez punkt Z_l^0 równolegle do prostej $P^0 T^0$ wyznacza na perspektografie punkt T.

Odmierzmy odcinek $O^0 S = T^0 T = d^0$ na prostej równoległej do linii podstawy p. W ten sposób otrzymaliśmy położenie środka układów S oraz perspektograf odpowiadający położeniu oka i tła względem obserwowanego przedmiotu.

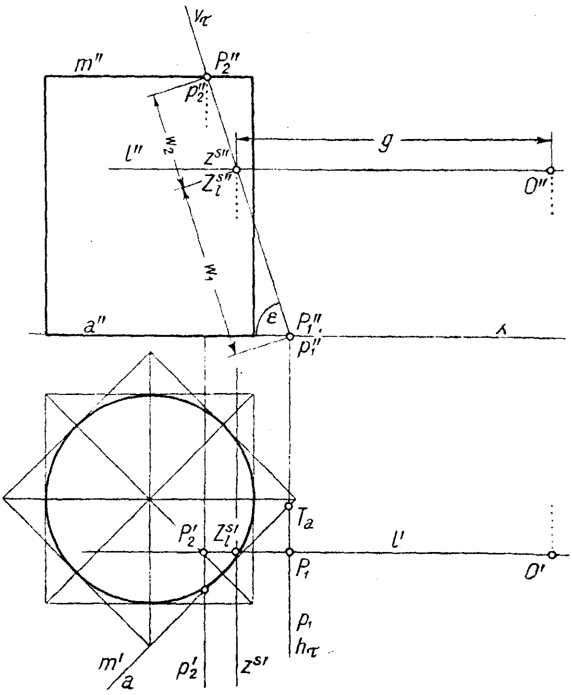
Przebieg konstrukcji perspektyw $a^s, b^s, \ldots$ jest teraz ściśle zgodny z przebiegiem opisanym w przypadku I.

B. Tło pochyłe. Narysujemy perspektywę walca obrotowego o osi pionowej, przedstawionego w rzutach Monge'a (rys. 9). Tłem niech będzie płaszczyzna pionowo-rzucająca $\tau(h_\tau, v_\tau)$, nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem ε, a środkiem rzutów (okiem) niech będzie punkt $O(O', O'')$.

Płaszczyzny obu podstaw walca przecinają tło w prostych $p_1(p_1, p_1'')$ i $p_2(p_2', p_2'')$. Przez oko O prowadzimy płaszczyznę poziomą (horyzontu), która przecina tło w linii horyzontu z^s. Rzuty pionowe trójki równoległych prostych p_1, p_2 i z^s są punktami, leżącymi na śladzie pionowym v_τ płaszczyzny tła.

Oddalenie oka O od linii horyzontu z^s oznaczamy literą g, a oddalenie linij podstaw p_1 i p_2 od linii horyzontu z^s oznaczamy odpowiednio w_1 i w_2.

Na płaszczyźnie horyzontu prowadzimy przez oko O prostą l prostopadłą do linii horyzontu z^s i jej punkt przecięcia z tą linią oznaczamy symbolem Z_l^s. Płaszczyzna pionowa poprowadzona przez prostą l (główna płaszczyzna pionu) przecina obie linie podstaw w odpowiednich punktach P_1 i P_2.

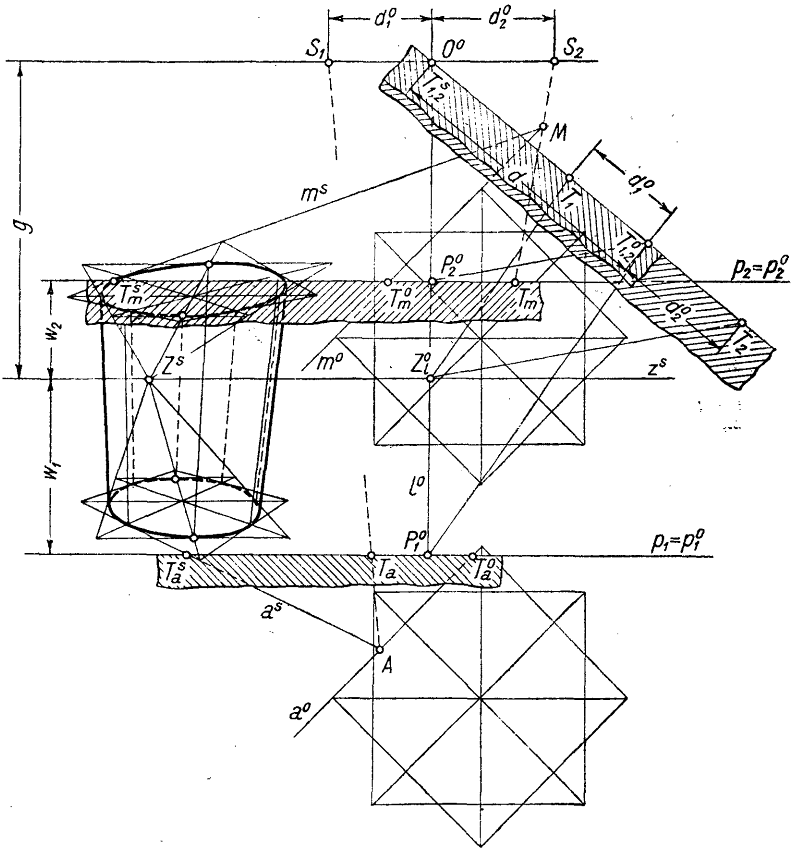


Rys. 9

Na rys. 10a i 10b przedstawiono perspektywę obranego walca, dla obu przypadków obrotu płaszczyzn podstaw tego walca dookoła przynależnych linij podstaw, na tło τ (por. ust. 3). Na obu podstawach opisano dwa kwadraty, obrócone wzajemnie o 45°. Przez narysowanie perspektyw obu tych kwadratów i ich przekątni otrzymamy 8 stycznych i ich punkty styczności z krzywymi stopnia 2 (stożkowymi), które są perspektywami rozważanych podstaw. Znając owych 16 elementów każdej stożkowej narysujemy ją z wystarczającą dla praktyki inżynierskiej ścisłością.

P r z y p a d e k I (rys. 10a). Arkusz przeźroczystego papieru szkicowego, na którym sporządzono rysunek rzutu poziomego (rys. 9) obróćmy na odwrotną stronę; widzimy na niej lustrzane odbicie rzutu poziomego. Tak obrócony rysunek napinamy na arkusz rysunkowy, na którym będziemy kreślili perspektywę (rys. 10a), lub na ów obrócony rysunek nakładamy przeźroczysty papier szkicowy, na którym sporządzimy żądany obraz perspektywiczny.

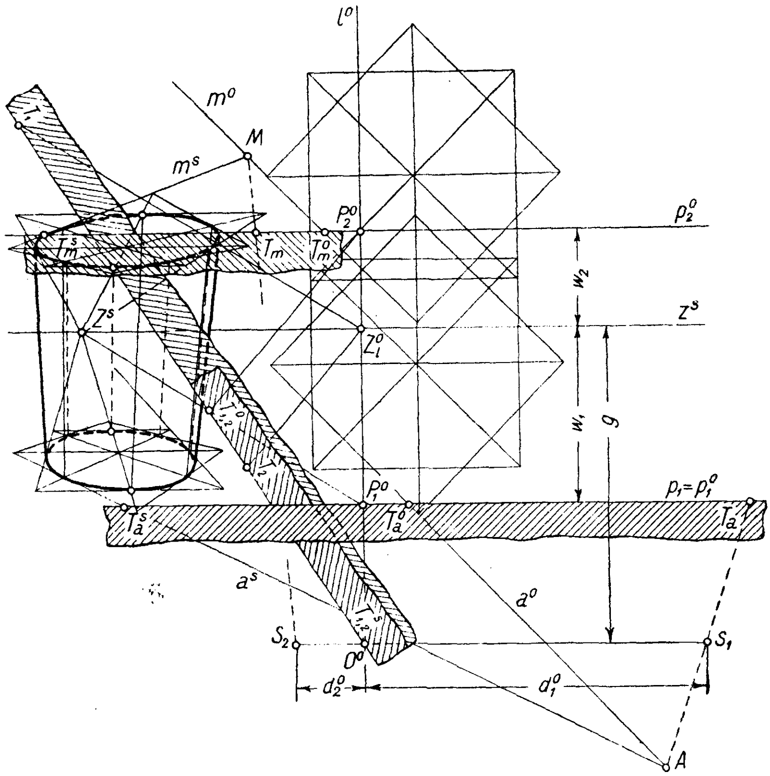
Prostą l' (rys. 9) nazywamy teraz l^0 (rys. 10a), a jej punkt przecięcia z linią podstawy $p_1=p_1^0$ oznaczamy P_1^0. Na prostej l^0 odmierzamy odcinki $P_1^0 Z_l^0=w_1$, $Z_l^0 P_2^0=w_2$ i $Z_l^0 O^0=g$. Przez punkt Z_l^0 przechodzi linia horyzontu z^s, a przez punkt P_2^0 przechodzi linia podstawy $p_2=p_2^0$, i obie te linie są równoległe do linii podstawy p_1.



Rys. 10a

Na krawędzi prostoliniowej perspektografu obieramy w dowolnej odległości d parę punktów $T_{1,2}^s$ i $T_{1,2}^s$, po czym perspektograf ów (zakreskowany) układamy na arkuszu rysunkowym (rys. 10a) tak, by punkt $T_{1,2}^s$ zjednoczył się z punktem O^0. Proste poprowadzone przez punkt Z_l^0 równolegle do prostych $P_1^0 T_1^0$ i $P_2^0 T_2^0$ wyznaczają na perspektografie punkty T_1 i T_2. Pierwszego perspektografu o punktach T_1^s, T_1 i T_1^0 użyjemy dla skonstruowania perspektywy dolnej podstawy walca, a drugiego perspektografu o punktach T_2^s, T_2 i T_2^0 użyjemy dla skonstruowania perspektywy górnej podstawy walca.

Na prostej równoległej do linij podstaw odmierzymy odcinki $O^0S_1 = T_1^0T_1 = d_1^0$ i $O^0S_2 = T_2^0T_2 = d_2^0$. W ten sposób wyznaczyliśmy położenia środków układów S_1 i S_2 odpowiednio dla układu perspektywy τ^s i z nim homograficznych układów τ_1^0 i τ_2^0.



Rys. 10b

Bok a kwadratu opisanego na podstawie dolnej (rys. 9) w lustrzanym odbiciu nazywamy a^0 (rys. 10a). W celu narysowania perspektywy a^s, układamy pierwszy perspektograf wzdłuż prostej p_1^0 tak, by jego punkt T_1^0 leżał na prostej a^0; w tym położeniu (zakreskowanym) punkt ów nazywamy T_a^0, a pozostałe dwa punkty perspektografu nazywamy odpowiednio T_a^s i T_a. Prosta S_1T_a wyznacza na prostej a^0 punkt wiążący A, prosta zaś AT_a^s jest szukaną perspektywą a^s. Podobnie narysujemy perspektywę pozostałych boków kwadratów opisanych na dolnej podstawie walca. Konstrukcję ułatwiają ślady zbiegu perspektyw prostych wzajemnie równoległych, które leżą na znanej linii horyzontu z^s.

Z kolei narysujemy perspektywę boku m kwadratu opisanego na górnej podstawie walca. W tym celu ów odwrócony rysunek rzutu poziomego (rys. 9) przesuwamy na arkuszu 10a tak, by $l'=l^0$ oraz $p_2'=p_2^0$. W tym położeniu rzut m' nazywamy m^0 (rys. 10a).

Drugi perspektograf układamy wzdłuż linii podstawy p_2^0 tak, by jego punkt T_2^0 leżał na prostej m^0. Teraz punkt ów nazywamy T_m^0, a pozostałe punkty perspektografu (zakreskowanego) nazywamy odpowiednio T_m^s i T_m. Prosta S_2T_m wyznacza na prostej m^0 punkt wiążący M, prosta zaś MT_m^s jest szukaną perspektywą m^s. Podobnie narysujemy perspektywę pozostałych boków obu kwadratów opisanych na górnej podstawie walca. Perspektywy przekątnych obu kwadratów wyznaczają na odpowiednich bokach ich punkty styczności ze stożkową, która jest perspektywą okręgu wpisanego w oba kwadraty.

Przypadek II (rys. 10b). Rysujemy na arkuszu przeźroczystego papieru szkicowego napiętym na rysunku rzutu poziomego (rys. 9). Prostą l' nazywamy teraz l^0 (rys. 10b), a jej punkt przecięcia z linią podstawy $p_1=p_1^0$ oznaczamy P_1^0. Na prostej l^0 odmierzamy odcinki $P_1^0Z_l^0=w_1$, $Z_l^0P_2^0=w_2$ i $Z_l^0O^0=-g$. Przez punkt Z_l^0 przechodzi linia horyzontu z^s, a przez punkt P_2^0 przechodzi linia podstawy p_2^0, i obie te linie są równoległe do linii podstawy p_1.

Na prostoliniowej krawędzi perspektografu obieramy w dowolnej odległości d parę punktów $T_{1,2}^s$ i $T_{1,2}^0$, po czym perspektograf ów (zakreskowany) układamy na arkuszu rysunkowym (rys. 10b) tak, by punkt $T_{1,2}^s$ zjednoczył się z punktem O^0. Proste poprowadzone przez punkt Z_l^0 równolegle do prostych $P_1^0T_1^0$ i $P_2^0T_2^0$ wyznaczają na perspektografie punkty T_1 i T_2. Pierwszego perspektografu o punktach T_1^s, T_1 i T_1^0 użyjemy dla skonstruowania perspektywy dolnej podstawy walca, a drugiego perspektografu o punktach T_2^s, T_2 i T_2^0 użyjemy dla skonstruowania perspektywy górnej podstawy walca.

Na prostej równoległej do linij podstaw odmierzmy odcinki $O^0S_1=$ $=T_1^0T_1=d_1^0$ i $O^0S_2=T_2^0T_2=d_2^0$. W ten sposób wyznaczyliśmy położenia środków układów S_1 i S_2, odpowiednio dla układu perspektywy τ^s i z nim homograficznych układów τ_1^0 i τ_2^0.

Bok a kwadratu opisanego na podstawie dolnej (rys. 9) oznaczamy teraz (rys. 10b) symbolem a^0. W celu narysowania perspektywy a^s układamy pierwszy perspektograf wzdłuż prostej p_1^0 tak, by jego punkt T_1^0 leżał na prostej a^0; w tym położeniu (zakreskowanym) punkt ów nazywamy T_a^0, a pozostałe dwa punkty perspektografu nazywamy odpowiednio T_a^s i T_a. Prosta S_1T_a wyznacza na prostej a^0 punkt wiążący A, prosta zaś AT_a^s jest szukaną perspektywą a^s. Podobnie narysujemy perspektywę pozostałych boków kwadratów opisanych na dolnej podstawie walca.

Z kolei narysujemy perspektywę boku m kwadratu opisanego na górnej podstawie walca. W tym celu rysunek rzutu poziomego (rys. 9) lub też leżący na nim rysunek 10b przesuwamy tak, by $l'=l^0$ oraz $p'_2=p^0_2$. W tym położeniu m' nazywamy m^0. Dalszy ciąg konstrukcji jest zgodny z opisem podanym w przypadku I.

Zauważmy, iż perspektywę rysować możemy również na arkuszu rysunkowym (rys. 10b), na którym ułożymy odpowiednio rysunek rzutu poziomego (rys. 9).

Zauważmy jeszcze, że przypadek II możemy korzystnie stosować tylko wówczas, gdy punkt O^0 nie leży zbyt blisko linii podstawy p. Z konstrukcji wynika bowiem, że w miarę zmniejszania się odległości punktu O^0 od linii podstawy p, zwiększa się wzajemnie oddalenie punktów T^0 i T na perspektografie. W granicy, gdy punkt O^0 padnie na linię podstawy p, odcinek T^0T wydłuży się nieograniczenie.

С. Шершень (Гливице)

ПЕРЕДВИЖНОЙ ПЕРСПЕКТОГРАФ

РЕЗЮМЕ

Передвижным перспектографом называется отрезок бумаги, при помощи которого можно построить перспективы геометрических фигур без черчения вспомогательных линий.

На прямолинейной стороне отрезка отмечено три точки T^s, T и T^0. Точки T^s и T^0 выбираются произвольно, точка T делит отрезок $T^sT^0=d$ в отношении g/w, где g равно расстоянию точки зрения от линии горизонта, а w — расстоянию основной линии от линии горизонта.

В качестве примера определено на черт. 1 перспективу $\tau^s(a^s,b^s,\ldots)$ фигуры $\tau^0(a^0,b^0,\ldots)$, изображающей квадрат с вырезанным прямоугольником. Постоянная точка S является точкой объединения (центром) обеих соответствующих систем τ^s и τ^0, а постоянная прямая p —прямой объединения (линией основания) этих систем. Для построения перспективы a^s прямой a^0 укладываем заштрихованный перспектограф так, чтобы его прямолинейная сторона прилегала к прямой p, а его точка T^0 лежала на прямой a^0. В этом положении точки T^s, T и T^0 перспектографа обозначаем соответственно T^s_a, T_a и T^0_a. Прямая ST_a, построение которой излишнее, пересекает прямую a^0 в точке A, прямая же AT^s_a является искомой перспективой a^s.

В параграфах 3 и 4 дано теоретическое обоснование концепции передвижного перспектографа. В параграфе 5 приведены примеры построения перспектив комплекса простых параллелепипедов для вертикального фона и кругового цилиндра для наклонного фона. Положение фона и точки зрения относительно предмета изображено в ортогональных проекциях на две перпендикулярные плоскости на черт. 7 и 9.

S. SZERSZEŃ (Gliwice)

MOVABLE PERSPECTOGRAPH

SUMMARY

A slip of paper by means of which we can draw perspectives of geometrical figures without introducing construction lines is called a *movable perspectograph.*

On the rectilinear margin of the slip three points, T^s, T and T^0, have been marked. The two points T^s and T^0 are selected arbitrarily, while the point T divides the segment $T^sT^0 = d$ in the ratio g/w, the segment g being equal to the distance between the eye and the line of the horizon, and w being equal to the distance between the basis line and the horizontal line.

By way of example, in fig. 1 the perspective $\tau^s(a^s, b^s, \ldots)$ of the figure $\tau^0(a^0, b^0, \ldots)$, representing a square with a rectangle cut out from it, has been drawn. A fixed point S is the centre of the homology between τ^s and τ^0, and a fixed straight line p is the basis line of that homology. In order to draw the perspective a^s of a straight line a^0 we adjust the perspectograph (hatched) so as to make its rectilinear edge lies on the straight line p and its point T^0 lies on the straight line a^0. In this position the points T^s, T and T^0 of the perspectograph are called, respectively, T^s_a, T_a and T^0_a. The straight line ST_a, whose graph is superfluous, cuts the straight line a^0 at the point A, and the straight line AT^s_a is the sought perspective a^s.

In paragraphs 3 and 4 the idea of a movable perspectograph is proved to be right. Paragraph 5 contains examples of drawing perspectives of a set of rectangular parallelepipeds for a vertical background and a right circular cylinder for an inclined background. The positions of the background and the eye with respect to the object are shown in orthogonal projections on two planes of projection perpendicular to each other.