

F. LEJA (Kraków)

## Rozwartość i punkty ekstremalne zbioru

### 1. Definicje i przykłady

Funkcję, która każdemu elementowi  $E$  określonej rodziny zbiorów przypisuje pewną liczbę  $f(E)$ , nazywamy *funkcją zbioru*. W artykule niniejszym omówimy pewną funkcję zbioru, odgrywającą ważną rolę w analizie.

Niech  $\mathcal{R}$  będzie dowolną przestrzenią metryczną, np. płaszczyzną albo przestrzenią trójwymiarową. Punkty tej przestrzeni będziemy oznaczali literami  $p, q, \dots$ , a odległość dwóch punktów  $p$  i  $q$  przez  $|pq|$ . Niech będzie dana funkcja ciągła  $\omega(p, q)$ , określona dla każdej pary punktów  $p$  i  $q$  danej przestrzeni i spełniająca dla dowolnych  $p$  i  $q$  następujące warunki:

$$\omega(p, q) = 0, \quad \omega(p, q) \geq 0, \quad \omega(p, q) = \omega(q, p).$$

Funkcja  $\omega(p, q)$  jest więc symetryczna względem swoich zmiennych, przyjmuje wartości nieujemne i równa się zeru, gdy  $p = q$ . Przykładem takiej funkcji jest odległość  $|pq|$  lub pole trójkąta  $|Opq|$  o ustalonym wierzchołku  $O$ . Podobnie funkcja określona wzorem

$$\omega(p, q) = \begin{cases} e^{-1/|pq|} & \text{dla } p \neq q, \\ 0 & \text{dla } p = q \end{cases}$$

spełnia powyższe warunki.

Obierzmy w przestrzeni  $\mathcal{R}$  dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  układ  $n+1$  punktów

$$(1) \quad p_0, p_1, \dots, p_n,$$

który dla krótkości będziemy oznaczali jedną literą  $p^{(n)}$ , i utwórzmy następujące iloczyny:

$$(2) \quad V(p^{(n)}) = V(p_0, p_1, \dots, p_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} \omega(p_j, p_k),$$

$$(3) \quad \Delta_j(p^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \omega(p_j, p_k) \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

z których pierwszy zawiera  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  czynników, a drugi  $n$  czynników. Gdy  $n=1$ , ilość czynników redukuje się do 1, mianowicie

$$V(p^{(1)}) = \omega(p_0, p_1), \quad \Delta_0(p^{(1)}) = \Delta_1(p^{(1)}) = \omega(p_0, p_1),$$

a gdy  $n > 1$ , między iloczynami (2) i (3) zachodzą związki

$$(4) \quad [V(p^{(n)})]^2 = \Delta_0 \Delta_1 \dots \Delta_n, \quad \text{gdzie} \quad \Delta_j = \Delta_j(p^{(n)}),$$

$$(5) \quad V(p^{(n)}) = \Delta_j V(p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n) \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Niech  $E$  będzie dowolnym zbiorem zwartym punktów przestrzeni  $\mathcal{R}$ , tj. zbiorem zawierającym wszystkie swe punkty skupienia. Gdy układ (1) zmienia się w  $E$ , iloczyn (2) pozostaje ograniczony i osiąga pewne maksimum. Oznaczmy to maksimum przez

$$(6) \quad V_n = V_n(E) = \max_{p^{(n)} \in E} V(p^{(n)})$$

i niech

$$(7) \quad q^{(n)} = \{q_{0n}, q_{1n}, \dots, q_{nn}\}$$

będzie takim układem punktów zbioru  $E$ , dla którego

$$(8) \quad V_n = V_n(E) = V(q^{(n)}).$$

Układ (7) spełniający warunek (8) nazwijmy  $n$ -tym układem punktów ekstremalnych zbioru  $E$  względem funkcji tworzącej  $\omega(p, q)$ . Dla każdego  $n=1, 2, \dots$  istnieje co najmniej jeden układ ekstremalny. Wykażemy, że ciąg

$$(9) \quad v_n = \sqrt[s]{V_n(E)}, \quad \text{gdzie} \quad s = \binom{n+1}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

jest zawsze zbieżny<sup>1)</sup>.

Dowód. Oznaczmy punkty układu ekstremalnego (7) krócej

$$q^{(n)} = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}.$$

Gdy  $n > 1$ , na mocy wzoru (5)

$$V_n = \Delta_j(q^{(n)}) V(q_0, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n) \leq \Delta_j V_{n-1} \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Mnożąc te  $n+1$  nierówności stronami otrzymujemy

$$V_n^{n+1} \leq \Delta_0 \Delta_1 \dots \Delta_n V_{n-1}^{n+1}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta_j = \Delta_j(q^{(n)}),$$

<sup>1)</sup> Jeśli  $\omega(p, q)$  nazwiemy „odległością” punktów  $p$  i  $q$ , to wyraz  $v_n$  jest średnią geometryczną wszystkich wzajemnych odległości punktów  $n$ -tego układu ekstremalnego (7).

a więc na mocy (4) i (8)  $V_n^{n+1} \leq V_n^2 V_{n-1}^{n+1}$ , skąd, gdy  $V_n \neq 0$ , wówczas  $V_n^{n-1} \leq V_{n-1}^{n+1}$ ; zatem

$$V_n^{2/n(n+1)} \leq V_{n-1}^{2/n(n-1)}.$$

Nierówność ta jest oczywiście spełniona także w przypadku  $V_n = 0$ ; zatem ciąg (9) jest nierosnący, a ponieważ wyrazy jego są nieujemne, więc istnieje granica

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v(E).$$

Granica  $v(E)$  zależy oczywiście od funkcji  $\omega$ . Nazywamy ją *rozwartością zbioru  $E$  względem funkcji  $\omega$*  i oznaczamy dokładniej przez

$$v(E, \omega).$$

Rozwartość jest określona w rodzinie zbiorów zwartych (domkniętych i ograniczonych, gdy przestrzeń jest euklidesowa) i ma wartości nieujemne.

**PRZYKŁAD 1.** Niech  $\mathcal{R}$  będzie płaszczyzną, funkcja  $\omega$  zaś odlegością  $|pq|$  punktów  $p$  i  $q$ . Wówczas rozwartość

$$(11) \quad v(E, |pq|)$$

nosi nazwę *płaskiej średnicy pozaskończzonej* zbioru  $E$ .

Obliczmy tę rozwartość dla okręgu  $K$  o środku w początku współrzędnych i promieniu  $r > 0$ . Iloczyn (2) jest największy, gdy punkty (1) są wierzchołkami wieloboku foremego  $W$  wpisanego w dany okrąg, czyli pierwiastkami równania

$$z^{n+1} - r^{n+1} = 0.$$

Oznaczając te pierwiastki przez  $z_0, z_1, \dots, z_n$  otrzymujemy

$$z^{n+1} - r^{n+1} = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Jedną z liczb  $z_k$  równa się  $r$ . Przyjmując  $z_0 = r$  otrzymujemy

$$\frac{z^{n+1} - r^{n+1}}{z - r} = (z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Niech  $\Delta_k$  oznacza iloczyn odległości wierzchołka  $z_k$  od pozostałych wierzchołków wieloboku  $W$ . Gdy zmienna  $z$  dąży do  $r$ , lewa strona poprzedniej tożsamości dąży do pochodnej funkcji  $z^{n+1} - r^{n+1}$  w punkcie  $z = r$ , tj. do  $(n+1)r^n$ , moduł zaś prawej strony dąży do  $\Delta_0$ , a zatem

$$\Delta_0 = (n+1)r^n.$$

Ze względu na symetrię jest  $\Delta_0 = \Delta_1 = \dots = \Delta_n$ , a więc na mocy wzoru (4)

$$V_n^2 = [(n+1)r^n]^{n+1},$$

skąd

$$V_n^{2/n(n+1)} = r \sqrt[n]{n+1}.$$

Ciąg ten dąży do  $r$ , zatem

$$v(K, |pq|) = r.$$

Płaska średnica pozaskończona okręgu równa się więc promieniowi okręgu<sup>2)</sup>.

Można dowieść (dowód nie jest prosty), że płaska średnica pozaskończona odcinka o długości  $d$  równa się  $d/4$ .

**PRZYKŁAD 2.** Niech  $\mathcal{R}$  będzie płaszczyzną lub przestrzenią dwóch zmiennych zespolonych  $x$  i  $y$  i niech

$$\omega(p, q) = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2|,$$

gdzie  $x_1, y_1$  są współrzędnymi punktu  $p$ , a  $x_2, y_2$  — współrzędnymi punktu  $q$ . Funkcja  $\omega(p, q)$  nosi nazwę *odległości trójkątowej* punktów  $p$  i  $q$  względem punktu  $O$  i gdy  $\mathcal{R}$  jest płaszczyzną, przedstawia pole trójkąta o wierzchołkach  $O, p, q$ , gdzie  $O$  jest początkiem układu współrzędnych. Rozwartość

$$(12) \quad v(E, |Opq|)$$

nazywamy *rozwartością trójkątową* zbioru  $E$  względem punktu  $O$ . Można wykazać<sup>3)</sup>, że rozwartość trójkątowa odcinka łączącego punkty  $A$  i  $B$  równa się czwartej części pola trójkąta  $OAB$ .

**PRZYKŁAD 3.** Niech  $\mathcal{R}$  będzie przestrzenią trójwymiarową. Oznaczmy przez  $\{pq\}$  funkcję określoną wzorami

$$(13) \quad \{pq\} = e^{-1/|pq|}, \quad \text{gdy } p \neq q \quad \text{i} \quad \{pq\} = 0, \quad \text{gdy } p = q,$$

i niech  $q_0, q_1, \dots, q_n$  będzie  $n$ -tym układem punktów ekstremalnych zbioru  $E$  względem tej funkcji. W myśl wzoru (9)

$$v_n(E) = e^{-h_n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

gdzie  $h_n$  wyraża się wzorem

$$(13') \quad h_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{1}{|q_j q_k|}.$$

Rozwartość

$$(14) \quad v(E, \{pq\})$$

<sup>2)</sup> Podobnie średnica pozaskończona tarczy kołowej równa się promieniowi, co nie trudno dowieść.

<sup>3)</sup> Ottenbreit [1], str. 100.

jest zawsze mniejsza od 1. Istotnie, jeśli średnicę zwykłą zbioru  $E$  oznaczymy przez  $M$ , to  $|q_j q_k| \leq M$ , dla  $j, k = 0, 1, \dots, n$ , a więc

$$\frac{1}{|q_j q_k|} \geq \frac{1}{M}, \quad \text{skąd} \quad h_n \geq \frac{1}{M};$$

wobec tego

$$v_n(E) \leq e^{-1/M}, \quad \text{a stąd} \quad v(E, \{pq\}) \leq e^{-1/M} < 1.$$

Ze zbieżności ciągu (9) wynika, że ciąg  $\{h_n\}$  dąży do granicy skończonej lub nieskończonej. Jeżeli  $h_n \rightarrow \infty$ , to  $v(E, \{pq\}) = 0$ .

Można dowieść, że rozwartość (14) okręgu o promieniu dowolnie wielkim (i podobnie rozwartość dowolnego odcinka) równa się zeru. Natomiast rozwartość (14) tarczy kołowej o promieniu  $r$  dowolnie małym jest dodatnia i wyraża się wzorem

$$e^{-\sqrt[3]{\pi/2}}$$

Dowód tego wzoru nie jest prosty<sup>4)</sup>. Rozwartość kuli o promieniu  $r$  równa się  $e^{-1/r}$ .

Uwaga. Pojęcie średnicy pozaskończonej zbioru wprowadził w 1923 r. Fekete [3]. Pojęcie rozwartości zbioru — najpierw jako rozwartości trójkątowej, a następnie w postaci najogólniejszej — powstało później — [4a], [4b].

## 2. Własności ogólne rozwartości

I. *Rozwartość jest funkcją niemalejącą zbioru*, czyli dla każdych dwóch zbiorów  $E_1$  i  $E_2$  zachodzi przy dowolnej funkcji tworzącej  $\omega$  nierówność

$$v(E_2, \omega) \geq v(E_1, \omega), \quad \text{gdy} \quad E_2 \supset E_1.$$

Wynika to bezpośrednio z definicji, bo w myśl wzoru (6)  $V_n(E_2) \geq V_n(E_1)$  dla  $n = 1, 2, \dots$

II. *Rozwartość zbioru skończonego jest zawsze równa zeru*. Jeżeli bowiem zbiór  $E$  składa się z  $p$  elementów i  $n > p$ , to nie wszystkie punkty układu ekstremalnego (7) są różne; zatem  $V_n(E) = 0$  dla  $n > p$ , a więc ciąg (9) dąży do zera. Co więcej:

<sup>4)</sup> Polya i Szegö, [2]. Wielkość

$$d(E) = \left[ \ln \frac{1}{v(E, \{p, q\})} \right]^{-1}$$

nosi nazwę *przestrzennej średnicy pozaskończonej* (lub *pojemności*) zbioru  $E$ . Dla tarczy kołowej  $K$  o promieniu  $r$  jest  $d(K) = \sqrt[3]{2/\pi}$ .

Rozwartość  $v(E, \omega)$  każdego zbioru przeliczalnego przy dowolnej funkcji tworzącej  $\omega$  równa się zeru.

Własność tę wykazała Ottenbreit [1]; dowód nie jest prosty. Wykażemy jednak, że:

Jeżeli zbiór  $E$  zawiera dowolnie mały łuk  $C$ , to rozwartość  $v(E, |pq|)$  jest dodatnia.

Dowód. Niech  $a$  i  $b$  będą dwoma różnymi punktami łuku  $C$  na płaszczyźnie. Połączmy te punkty odcinkiem  $l$  i podzielmy  $l$  na  $n$  równych części punktami

$$a = a_0, a_1, \dots, a_n = b,$$

następującymi po sobie w wypisanym porządku. Niech prostopadła do  $l$  w punkcie  $a_k$  przecina łuk  $C$  w punkcie  $z_k$  dla  $k=0, 1, \dots, n$ . Wówczas

$$|z_j - z_k| \geq |a_j - a_k| = \frac{|b-a|}{n} |j-k|.$$

Wielkość  $V_n(E)$  spełnia oczywiście nierówność

$$V_n(E) \geq \prod_{0 \leq j < k \leq n} |z_j - z_k|.$$

Wyrazy ciągu (9) spełniają zatem nierówność

$$v_n^{n(n+1)} \geq \prod_{0 \leq j < k \leq n} |z_j - z_k|^2 \geq \prod_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n |a_j - a_k| = \prod_{j=0}^n [j!(n-j)! \left(\frac{|b-a|}{n}\right)^n].$$

W myśl wzoru Stirlinga  $k! > e^{-k} k^k$ , a więc

$$j!(n-j)! > e^{-nj} (n-j)^{n-j} \geq e^{-n} \left(\frac{n}{2}\right)^n;$$

zatem

$$v_n^{n(n+1)} > \prod_{j=0}^n e^{-n} \left(\frac{n}{2}\right)^n \left(\frac{|b-a|}{n}\right)^n = \left(\frac{|b-a|}{2e}\right)^{n(n+1)},$$

skąd

$$v_n \geq \frac{|b-a|}{2e}.$$

Przechodząc do granicy dla  $n \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$v(E, |pq|) \geq \frac{|b-a|}{2e} > 0,$$

czego należało dowieść.

Jednakże rozwartość trójkątowa  $v(E, |Opq|)$  może być równa zeru choć zbiór  $E$  zawiera pewien łuk. Z przykładu 2 wiemy, że rozwartość

trójkątowa odcinka  $AB$  równa się czwartej części pola trójkąta  $OAB$ ; pole to równa się zeru, gdy odcinek  $AB$  lub jego przedłużenie przechodzi przez punkt  $O$ . Podobnie można dowieść, że rozwartość  $v(E, \{pq\})$  równa się zeru, gdy  $E$  jest odcinkiem lub okręgiem.

III. Rozwartość  $v(E, |pq|)$  jest niezmiennikiem przesunięć i obrotów, czyli  $v(E', |pq|) = v(E, |pq|)$ , gdzie  $E'$  jest zbiorem powstałym ze zbioru  $E$  przez przesunięcie lub obrót. Przesunięcia bowiem i obroty nie zmieniają wzajemnej odległości punktów, wielkość zaś  $v(E, |pq|)$  zależy tylko od odległości. Podobnie rozwartość trójkątowa  $v(E, |Opq|)$  jest niezmiennikiem obrotów dokoła punktu  $O$ ; nie jest jednak niezmiennikiem przesunięć ani obrotów dokoła punktu różnego od  $O$ . Ogólnie:

Jeżeli  $p' = \varphi(p)$  jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznymsprzestrzeni  $R$  w siebie o tej własności, że

$$\omega[\varphi(p), \varphi(q)] = \omega(p, q),$$

i jeżeli  $E' = \varphi(E)$ , to

$$v(E', \omega) = v(E, \omega).$$

IV. Oznaczmy przez  $\max_j \Delta_j(p^{(n)})$  największy z  $n+1$  iloczynów (3), a przez  $\Delta_n = \Delta_n(E)$  kres górny tych maksimów, gdy układ  $p^{(n)}$  zmienia się w zbiorze  $E$

$$(15) \quad \Delta_n = \sup_{p^{(n)} \in E} \{ \max_j \Delta_j(p^{(n)}) \} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Niech  $p_1, p_2, \dots, p_n$  będą dowolnie ustalonymi punktami przestrzeni  $\mathcal{R}$ . Iloczyn

$$(16) \quad R(p; p_1, \dots, p_n) = \prod_{k=1}^n \omega(p, p_k)$$

jest funkcją zmiennej  $p$  ciągłą w zbiorze  $E$ , osiąga więc w tym zbiorze pewne maksimum zależne od punktów  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Oznaczmy

$$(17) \quad R_n = \inf_{p_k} \{ \max_{p \in E} R(p; p_1, \dots, p_n) \}$$

kres dolny tych maksimów, gdy punkty  $p_1, p_2, \dots, p_n$  zmieniają się dowolnie w przestrzeni  $\mathcal{R}$ . Ciągi (15) i (17) są ściśle związane ze zbiorem  $E$  i funkcją  $\omega(p, q)$  i pozostają w bliskim związku z rozwartością  $v(E, \omega)$ , mianowicie:

Ciągi  $\{\sqrt[n]{\Delta_n}\}$  i  $\{\sqrt[n]{R_n}\}$  są zawsze zbieżne; pierwszy ciąg dąży do rozwartości  $v(E, \omega)$ , drugi do granicy nie większej od  $v(E, \omega)$ , czyli

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Delta_n} = v(E, \omega),$$

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n} = r(E, \omega) \leq v(E, \omega).$$

Wykażemy drugą część tego twierdzenia<sup>5)</sup>. W myśl określenia (17) dla każdych dwóch liczb naturalnych  $\mu$  i  $\nu$  i każdej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieją w przestrzeni  $\mathcal{R}$  takie dwa układy punktów  $a_1, a_2, \dots, a_\mu$  i  $b_1, b_2, \dots, b_\nu$ , że

$$R_\mu + \varepsilon > \max_{p \in E} R(p; a_1, a_2, \dots, a_\mu) \quad \text{i} \quad R_\nu + \varepsilon > \max_{p \in E} R(p; b_1, b_2, \dots, b_\nu).$$

Ponieważ

$$\max_{p \in E} \left[ \prod_{i=1}^{\mu} \omega(p, a_i) \prod_{j=1}^{\nu} \omega(p, b_j) \right] \leq \left[ \max_{p \in E} \prod_{i=1}^{\mu} \omega(p, a_i) \right] \left[ \max_{p \in E} \prod_{j=1}^{\nu} \omega(p, b_j) \right],$$

więc  $R_{\mu+\nu} \leq (R_\mu + \varepsilon)(R_\nu + \varepsilon)$ , skąd przechodząc do granicy dla  $\varepsilon \rightarrow 0$  otrzymujemy

$$R_{\mu+\nu} \leq R_\mu R_\nu.$$

Istnienie granicy (19) wynika z tych nierówności i ze znanego lematu [4e]:

*Ciąg  $\{\sqrt[n]{a_n}\}$  jest zbieżny, jeżeli ciąg  $\{a_n\}$  ma wyrazy nieujemne i spełnia warunek  $a_{\mu+\nu} \leq a_\mu a_\nu$  dla  $\mu, \nu = 1, 2, \dots$*

Aby wykazać nierówność  $r(E, \omega) \leq v(E, \omega)$ , utwórzmy iloczyny  $\Delta_j = \Delta_j(q^{(n)})$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , odpowiadające układowi ekstremalnemu  $q^{(n)} = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$  i przyjmijmy, że

$$(20) \quad \Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \dots \leq \Delta_n,$$

więc na mocy (4)

$$(21) \quad \Delta_0^{n+1} \leq \Delta_0 \Delta_1 \dots \Delta_n = V_n^2.$$

Lecz

$$(22) \quad R_n \leq \max_{p \in E} \prod_{k=1}^n \omega(p, q_k) = \Delta_0,$$

więc

$$\sqrt[n]{R_n} \leq V_n^{2/n(n+1)} = v_n.$$

Przechodząc do granicy dla  $n \rightarrow \infty$  otrzymujemy  $r(E, \omega) \leq v(E, \omega)$ , c.b.d.o.

Nazwijmy *lemniskatą  $n$ -tego stopnia o ogniskach  $p_1, p_2, \dots, p_n$  i promieniu  $r > 0$*  zbiór punktów  $p$  przestrzeni  $\mathcal{R}$  spełniających równanie

$$(23) \quad \prod_{k=1}^n \omega(p, p_k) = r^n.$$

Zbiór punktów spełniających nierówność  $\prod_{k=1}^n \omega(p, p_k) < r^n$  nazwijmy *wnętrzem* tej lemniskaty. Jeśli kres (17) jest osiągnięty, to istnieje lemniskata

<sup>5)</sup> Dowód pierwszej części jest nieco dłuższy, zob. Leja [4b].

$n$ -tego stopnia o najmniejszym promieniu  $r_n = \sqrt[n]{R_n}$ , pokrywająca zbiór  $E$ <sup>6)</sup>. Twierdzenie to orzeka, że ciąg promieni  $\{r_n\}$  dąży do określonej granicy  $r(E, \omega)$ . Granicę tę nazywamy *promieniem zbioru  $E$  względem funkcji  $\omega$* .

Zauważmy, że na mocy nierówności (21) i (22)

$$(24) \quad \sqrt[n]{R_n} \leq \sqrt[n]{\Delta_0(q^{(n)})} \leq V_n^{2/n(n+1)}$$

i że wyrazy skrajne tej nierówności dążą ze wzrostem  $n$  do  $r(E, \omega)$  i  $v(E, \omega)$ . Jeżeli więc  $r(E, \omega) = v(E, \omega)$ , to istnieje również granica

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Delta_0(q^{(n)})} = v(E, \omega).$$

### 3. Niektóre zastosowania rozwartości i punktów ekstremalnych

Ograniczymy się do podania trzech ogólnych przykładów.

I. Niech  $E$  będzie zbiorem punktów (ograniczonym i domkniętym) na płaszczyźnie liczb zespolonych. Dopelnienie tego zbioru do płaszczyzny domkniętej (tzn. zawierającej punkt  $\infty$ ) jest albo jednym obszarem nieograniczonym, albo sumą obszarów rozłącznych, z których jeden jest nieograniczony.

Oznaczmy ten ostatni obszar przez  $D$ , a jego brzeg przez  $B$ . Zbiór  $B$  pokrywa się ze zbiorem  $E$  lub jest jego częścią. Niech

$$(26) \quad q_{0n}, q_{1n}, \dots, q_{nn} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

będzie  $n$ -tym układem punktów ekstremalnych zbioru  $E$  względem funkcji  $\omega(p, q) = |pq|$ <sup>7)</sup> i niech  $E_0$  będzie zbiorem punktów skupienia wszystkich układów ekstremalnych<sup>8)</sup>. Utwórzmy wielomian

$$(27) \quad W_n(z) = (z - q_{1n})(z - q_{2n}) \dots (z - q_{nn}).$$

Wielomian ten spełnia w każdym punkcie zbioru  $E$  nierówność  $|W_n(z)| \leq |W_n(q_{0n})|$  na mocy definicji układu ekstremalnego. Gdyby bowiem w pewnym punkcie  $z = q'_0 \in E$  było

$$|(q'_0 - q_{1n})(q'_0 - q_{2n}) \dots (q'_0 - q_{nn})| > |(q_{0n} - q_{1n})(q_{0n} - q_{2n}) \dots (q_{0n} - q_{nn})|,$$

to mnożąc obie strony tej nierówności przez  $V(q_{1n}, q_{2n}, \dots, q_{nn})$  otrzy-

<sup>6)</sup> Czyli zbiór  $E$  leży wewnątrz lub na tej lemniskacie.

<sup>7)</sup> Punkty ekstremalne zbioru  $E$  są jednocześnie punktami ekstremalnymi brzegu  $B$  i na odwrót, co wynika z zasady maksimum.

<sup>8)</sup> Czyli zbiorem punktów skupienia wszystkich ciągów  $\{q_{k_n n}\}$ , gdzie  $k_n$  jest dowolną liczbą całkowitą, spełniającą nierówność  $0 \leq k_n \leq n$ .

malibyśmy  $V(q'_0, q_{1n}, \dots, q_{nn}) > V(q_{0n}, q_{1n}, \dots, q_{nn})$ , co jest sprzeczne z założeniem. Można dowieść<sup>9)</sup>, że:

Jeżeli rozwartość  $v(E) = v(E, |pq|)$  jest dodatnia, to na całej płaszczyźnie otwartej poza zbiorem  $B$  istnieje granica skończona

$$(28) \quad \sqrt[n]{|W_n(z)|} \rightarrow \Phi(z),$$

a w obszarze  $D$  zachodzi nierówność  $\Phi(z) > v(E)$ , w punktach zaś nie należących do  $D+B$  (jeśli takie istnieją)  $\Phi(z)$  stale równa się  $v(E)$ .

Funkcja  $\ln(\Phi(z)/v(E))$  jest harmoniczna poza zbiorem  $B$  i w obszarze  $D$  redukuje się do funkcji Greena tego obszaru z biegunem w nieskończoności.

W przypadku, gdy obszar  $D$  jest jednospójny, funkcje

$$(29) \quad \sqrt[n]{W_n(z)} \quad (n=1, 2, \dots)$$

są analityczne i jednoznaczne wewnątrz  $D$ . Jeżeli wartość pierwiastka jest ustalona tak, by stosunek  $\sqrt[n]{W_n(z)}/z$  dążył do 1, gdy  $z \rightarrow \infty$ , to ciąg (29) jest zbieżny wewnątrz  $D$  do funkcji analitycznej  $\varphi(z)$ , której odwrotność

$$(30) \quad w = \frac{1}{\varphi(z)}$$

odwzorowuje konformicznie<sup>10)</sup> obszar  $D$  na koło  $|w| < r$  o promieniu  $r=1/v(E)$ . Oczywiście  $|\varphi(z)| = \Phi(z)$ .

Jeżeli rozwartość  $v(E)$  równa się zeru, to granica (28) może nie istnieć<sup>11)</sup>.

II. Niech  $E$  będzie zbiorem punktów w przestrzeni  $\mathcal{R}$  dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  (rzeczywistych lub zespolonych) i niech punkty (26) tworzą układ ekstremalny zbioru  $E$  względem odległości trójkątowej  $|Opq|$ , gdzie  $O$  jest początkiem układu współrzędnych. Oznaczmy współrzędne punktu  $q_{kn}$  przez  $(x_k, y_k)$  i utwórzmy wielomian jednorodny  $n$ -go stopnia zmiennych  $x$  i  $y$

$$W_n(x, y) = \prod_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2} (xy_k - yx_k) \right].$$

Oznaczmy dalej przez  $\delta_n(p)$  najmniejszą z odległości trójkątowych

<sup>9)</sup> Leja [4c].

<sup>10)</sup> Odwzorowanie obszaru na inny obszar nazywamy *konformicznym*, gdy jest wzajemnie jednoznaczne i ciągle oraz nie zmienia kątów między krzywymi, ani zwrotu tych kątów.

<sup>11)</sup> Leitner [5].

$|Opq_{kn}|$  ( $k=0,1,\dots,n$ ), gdzie  $p$  jest ustalonym punktem przestrzeni  $\mathcal{R}$ . Można dowieść<sup>12)</sup>, że:

Jeżeli rozwartość trójkątowa  $v(E, |Opq|)$  zbioru  $E$  jest dodatnia, to w każdym punkcie  $p(x,y)$  przestrzeni  $\mathcal{R}$  spełniającym warunek  $\delta_n(p) \geq c/n^2$ , gdzie  $c$  jest dowolną stałą różną od zera, istnieje granica

$$(31) \quad \sqrt[n]{|W(x,y)|} \rightarrow \Phi(x,y).$$

Funkcja  $\Phi(x,y)$  zależy oczywiście od zbioru  $E$  i ma interesujące własności. Pozwala ona oszacować obszar jednostajnej zbieżności wszystkich szeregów postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,y), \quad \text{gdzie } P_n(x,y) = a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0n}y^n,$$

których wyrazy są wspólnie ograniczone na zbiorze  $E$ .

III. Niech  $E$  będzie zbiorem punktów przestrzeni trójwymiarowej i niech punkty (26) tworzą układ ekstremalny zbioru  $E$  względem funkcji tworzącej (13). Dowodzi się<sup>13)</sup>, że gdy rozwartość  $v(E, \{pq\})$  jest dodatnia, wówczas ciąg

$$(32) \quad H_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|pq_{kn}|}$$

jest, poza zbiorem  $E$ , zbieżny do pewnej funkcji harmonicznej trzech zmiennych  $H(p) = H(x,y,z)$ , która ma wiele interesujących własności.

#### 4. Problematy

1. Niech  $\mathcal{R}$  będzie płaszczyzną liczbową. Wiemy ze wzoru (19), że promień  $r(E, \omega)$  zbioru jest nie większy od rozwartości  $v(E, \omega)$ . Fekete dowiódł<sup>14)</sup>, że jeżeli funkcją tworzącą  $\omega(p,q)$  jest odległość  $|p-q|$ , to zachodzi równość

$$(33) \quad r(E, \omega) = v(E, \omega).$$

Niech  $a_1, a_2, \dots, a_k$  będą dowolnymi punktami płaszczyzny (liczbami zespolonymi), a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Oznaczmy przez  $u(z)$  funkcję określoną wzorem

$$u(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_k)^{\alpha_k}.$$

<sup>12)</sup> Leja [4d].

<sup>13)</sup> Górski [6].

<sup>14)</sup> Dowód znajduje się w pracy Ottenbreit [1], str. 49.

Zbadać, czy równość (33) zachodzi w przypadku, gdy funkcja tworząca ma postać

$$\omega(p, q) = \frac{|p - q|}{|u(p)u(q)|}.$$

Należy przy tym założyć, że zbiór  $E$  (domknięty i ograniczony) nie zawiera punktów  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

2. Z nierówności (24) wynika, że gdy zachodzi równość (33), to ciąg

$$(34) \quad \sqrt[n]{\Delta_0(q^{(n)})} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dąży do rozwartości  $v(E, \omega)$ . Wykazać, że ciąg ten zawsze dąży do  $v(E, \omega)$  lub podać przykład takiej funkcji tworzącej i takiego zbioru  $E$  na płaszczyźnie lub w dowolnej innej przestrzeni  $\mathcal{R}$ , dla którego ciąg (34) nie dąży do  $v(E, \omega)$  (a więc albo jest rozbieżny, albo dąży do granicy mniejszej od  $v(E, \omega)$ ). Przykład taki nie jest znany.

3. Wiadomo, że gdy przestrzeń  $\mathcal{R}$  jest płaszczyzną i  $\omega(p, q) = |pq|$ , to dla każdego zbioru nieskończonego  $E$  istnieje dokładnie jedna lemniskata  $n$ -go stopnia (23), pokrywająca dany zbiór i mająca najmniejszy promień<sup>15)</sup>.

Wykazać, że twierdzenie to pozostaje prawdziwe, gdy  $\mathcal{R}$  jest przestrzenią trójwymiarową i  $\omega(p, q) = |pq|$ <sup>16)</sup>.

4. Niech  $\mathcal{R}$  będzie przestrzenią trójwymiarową,  $E$  tarczą kołową o promieniu 1, a

$$(35) \quad q^{(n)} = \{q_0 q_1 \dots q_n\}$$

układem punktów ekstremalnych tej tarczy względem funkcji tworzącej (13). Punkty (35) są więc tak rozłożone na tarczy, żeby wyrażenie

$$h_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{1}{|q_j q_k|}$$

było najmniejsze. Dla małych wartości  $n$  wszystkie punkty  $q_0, q_1, \dots, q_n$  leżą na brzegu tarczy i są wierzchołkami wieloboku foremnego wpisanego w tarczę. Niech  $n_1$  będzie taką liczbą naturalną, że układ  $q^{(n_1)}$  leży na brzegu tarczy, natomiast nie cały układ  $q^{(n_1+1)}$  leży na brzegu.

Znaleźć liczbę  $n_1$  oraz rozłożenie punktów układu  $q^{(n_1+1)}$  i  $q^{(n_1+2)}$ .

<sup>15)</sup> Równanie tej lemniskaty ma postać  $|C_n(z)| = r^n$ , gdzie  $C_n(z) = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n)$  jest wielomianem Czebyszewa dla zbioru  $E$ , a  $r^n$  oznacza maksimum modułu tego wielomianu dla  $z \in E$ .

<sup>16)</sup> Dla  $n=2$  twierdzenie jest prawdziwe i dowód jest prosty. Nie wiadomo, czy jest prawdziwe dla  $n \geq 3$ .

5. Niech  $\mathcal{R}$  będzie płaszczyzną liczbową,  $p^{(n)} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ , układem  $n+1$  punktów zbioru  $E$ , a  $u_{jk} = u_{jk}(z, p^{(n)})$  funkcją określoną wzorami:

$$u_{jk} = \frac{z - p_k}{p_j - p_k} \quad \text{dla } j \neq k, \quad u_{jk} = 1 \quad \text{dla } j = k.$$

Oznaczmy przez  $A_n(z)$ ,  $B_n(z)$ ,  $C_n(z)$  i  $D_n(z)$  odpowiednio kresy dolne iloczynów<sup>17)</sup>

$$A(z; p^{(n)}) = \prod_{j=0}^n \prod_{k=0}^n |u_{jk}|, \quad B(z; p^{(n)}) = \max_{(j)} \prod_{k=0}^n |u_{jk} u_{kj}|,$$

$$C(z; p^{(n)}) = \max_{(j)} \prod_{k=0}^n |u_{jk}|, \quad D(z; p^{(n)}) = \max_{(j)} \prod_{k=0}^n |u_{kj}|,$$

gdzie układ  $p^{(n)}$  zmienia się dowolnie w zbiorze  $E$ .

Wiadomo<sup>18)</sup>, że gdy rozwartość  $v(E, |pq|)$  jest dodatnia, to ciągi

$$\sqrt[n(n+1)]{A_n(z)}, \quad \sqrt[2n]{B_n(z)}, \quad \sqrt[n]{C_n(z)}, \quad \sqrt[n]{D_n(z)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

są zbieżne na całej płaszczyźnie do pewnych funkcji

$$A(z), \quad B(z), \quad C(z), \quad D(z)$$

i że  $A(z) \equiv B(z)$ . Dowieść, że zachodzą równości  $A(z) = C(z) = D(z)$  lub że co najmniej jedna z nich jest fałszywa<sup>19)</sup>.

#### Prace cytowane

[1] W. Ottenbreit, *Metody obliczania średnic pozaskończonych i rozwartości zbiorów*, Dodatek do Annales de la Soc. Pol. de Math. 23 (1950) str. 1-104.

[2] G. Pólya und G. Szegö, *Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen*, Journal für Math. 165 (1931), str. 4-49.

[3] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Zeitschrift 17 (1923), str. 228-249.

[4a] F. Leja, *Sur l'existence du domaine de convergence des séries de polynômes homogènes*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sc. et des Lettres, Série A (1933), str. 453-461.

[4b] — *Une généralisation de l'écart et du diamètre transfini d'un ensemble*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 22 (1949), str. 35-42.

[4c] — *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 12 (1933), str. 57-71.

<sup>17)</sup>  $\max_j$  oznacza największy z iloczynów, gdy wskaźnik  $j$  przebiega wartości  $0, 1, \dots, n$ .

<sup>18)</sup> Zob. Leja [4c], [4f] i [4g].

<sup>19)</sup> Problem ten był ogłoszony ([4h]), lecz nie został rozwiązany.

[4d] — *Sur une classe de fonctions homogènes et les séries de Taylor des fonctions de deux variables*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 22 (1950), str. 245-268.

[4e] — *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1954, str. 107.

[4f] — *Sur certaines limites relatives aux polynômes de Lagrange et aux ensembles fermés*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sc. et des Lettres, Serie A (1933), str. 281-289.

[4g] — *Sur une suite de fonctions liée aux ensembles plans fermés*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 13 (1934), str. 53-54.

[4h] — *Problèmes*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 17 (1938), str. 130.

[5] R. Leitner, *Sur une propriété des ensembles plans de diamètre transfini nul*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 23 (1934), str. 183-189.

[6] J. Górski, *Sur un problème de F. Leja*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 25 (1953), str. 273-278.

Ф. Лья (Краков)

### ШИРИНА И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА

#### РЕЗЮМЕ

Пусть  $\omega(p, q)$  непрерывная функция пар точек  $p$  и  $q$  произвольного метрического пространства, удовлетворяющая для каждой пары точек  $p$  и  $q$  условия

$$\omega(p, q) \geq 0, \quad \omega(p, q) = 0, \quad \omega(p, q) = \omega(q, p),$$

$E$  — компактное множество точек данного пространства и  $p^{(n)}$  — система  $n+1$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$  множества  $E$ . Обозначим через  $V_n(E)$  максимум произведения

$$V(p^{(n)}) = \prod_{0 \leq i < k \leq n} \omega(p_i, p_k),$$

когда системы  $p^{(n)}$  изменяются в множестве  $E$ , и пусть

$$(1) \quad q^{(n)} = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$$

система точек множества  $E$ , при которой  $V(q^{(n)}) = V_n(E)$ . Доказываем, что последовательность

$$[V_n(E)]^{2^{n(n+1)}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

стремится к конечному пределу  $V(E, \omega)$ .

Величину  $V(E, \omega)$  называем *шириной* множества  $E$ , а систему (1)  $n$ -ой системой *экстремальных точек* множества относительно определяющей функции  $\omega(p, q)$ . Ширина множества является обобщением трансфинитного диаметра Фекете.

Приводим некоторые общие свойства ширины множества и примеры применения ширины и экстремальных точек множества к классическому анализу. В частности эти понятия позволяют например построить простым способом функцию Грина произвольной области и функцию конформно отображающую область на круг и оценить область сходимости ряда однородных полиномов

$$\sum_0^{\infty} P_n(x, y), \quad P_n(x, y) = a_{n0} x^n + a_{n-1,1} x^{n-1} y + \dots + a_{0n} y^n,$$

члены которого ограничены в некотором множестве.

В заключении приводим 5 нерешенных проблем из этой области.

F. LEJA (Kraków)

## SPAN AND EXTREMAL POINTS OF A SET

## S U M M A R Y

Let  $\omega(p, q)$  be a continuous function of pairs of points  $p$  and  $q$  of an arbitrary metric space, satisfying for each pair of points  $p$  and  $q$  the conditions

$$\omega(p, q) \geq 0, \quad \omega(p, q) = 0, \quad \omega(p, q) = \omega(q, p),$$

$E$  — compact set of points of the given space and  $p^{(n)}$  — a system of  $n+1$  points  $p_0, p_1, \dots, p_n$  of the set  $E$ . Let us denote by  $V_n(E)$  the maximum of the product

$$V(p^{(n)}) = \prod_{0 \leq i < k \leq n} \omega(p_i, p_k),$$

if the system  $p^{(n)}$  changes in the set  $E$ , and let

$$(1) \quad q^{(n)} = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$$

be such a system of points of the set  $E$  that  $V(q^{(n)}) = V_n(E)$ . We prove that the sequence

$$[V_n(E)]^{2^{n(n+1)}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

tends to a finite limit  $v(E, \omega)$ .

The quantity  $v(E, \omega)$  is called the *span* of the set  $E$ , and the system (1) — the  $n$ -th system of *extremal points* of the set with respect to the generating function  $\omega(p, q)$ . The span of a set is a generalization of the transfinite diameter of M. Fekete.

The author gives certain general properties of the span of a set and examples of the application of the span and extremal points of a set in classical analysis. In particular, these notions make it possible, for example, to construct in a simple way the Green function of an arbitrary region and the function mapping the region into a circle, and to estimate the convergence region of the series of homogeneous polynomials

$$\sum_0^{\infty} P_n(x, y), \quad P_n(x, y) = a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0n}y^n,$$

whose terms are bounded in a certain set.

At the end of the paper five problems in this field are presented for solution.