A. Mostowski (Warszawa)

# Współczesny stan badań nad podstawami matematyki

Artykuł ten opracowany przy współudziale A. Grzegorczyka, S. Jaśkowskiego, J. Łosia, S. Mazura, H. Rasiowej i R. Sikorskiego został w formie skróconej wygłoszony jako referat na VIII Zjeździe Matematyków Polskich w Warszawie, 7. IX. 1953.

Badania nad podstawami matematyki mają dwa aspekty: filozoficzny i matematyczny. W referacie niniejszym ograniczam się do problematyki czysto matematycznej, tj. takiej, która jest związana z pojęciami lub metodami specyficznymi dla matematyki a niespotykanymi w innych naukach. Ograniczam się nadto do takich problemów, dla których rozwiązania jest niezbędny (lub wydaje się niezbędny) dedukcyjny aparat matematyki.

Współczesny etap badań nad podstawami matematyki rozpoczął się z chwilą powstania teorii mnogości. Jej abstrakcyjność i występujące w niej oderwanie się od tradycyjnego i bliskiego doświadczeniu materiału pojęciowego przy jednoczesnej możliwości stosowania wielu jej wyników do konkretnych zagadnień z dziedziny klasycznej wywołały potrzebę zanalizowania epistemologicznych podstaw tej teorii. Potrzeba ta wzrosła niepomiernie z chwilą odkrycia antynomii. Niewątpliwie jednak problem ugruntowania podstaw teorii mnogości byłby postawiony i dyskutowany nawet wtedy, gdyby żadna antynomia nie pojawiła się w teorii mnogości.

Dyskusje nad podstawami teorii mnogości doprowadziły do następujących ogólnych zagadnień dotyczących całej matematyki:

A. Jaka jest natura pojęć rozpatrywanych w matematyce? W jakim stopniu są one konstruowane przez człowieka, a w jaki narzucone z zewnątrz i skąd czerpiemy wiedzę o ich własnościach?

B. Jaka jest natura dowodów matematycznych i jakie są kryteria pozwalające odróżniać dowody poprawne od błędnych.

Zagadnienia te mają charakter filozoficzny i nie należy przypuszczać, żeby dały się one rozwiązać w obrębie samej matematyki i przy użyciu tylko metod matematycznych. Na tle tych ogólnych zagadnień rozwinęły się jednak bardziej specjalne problemy, dostępne już badaniu matematycznemu, a mianowicie:

A1. Metoda aksjomatyczna, jej rola w matematyce i granice jej stosowalności.

A2. Prądy konstruktywne w matematyce.

B1. Aksjomatyzacja logiki.

B2. Problemy rozstrzygalności.

Problemy A1 i A2 powstały na tle zagadnienia A, problemy B1 i B2 zaś na tle zagadnienia B.

Lista tych problemów nie jest na pewno zupełna, sądzę jednak, że obejmuje problemy najważniejsze i w obecnej chwili najżywiej dyskutowane. Toteż tylko te problemy będą tematem dalszego ciągu referatu. Przy omawianiu tych zagadnień będę też omawiał teorie, które się z tych zagadnień wywodzą, a które pozostają obecnie w stadium intensywnego rozwoju. Jak zobaczymy, niektóre z nich odbiegły dość daleko od problemu, który dał impuls do stworzenia teorii. Na końcu referatu wspomnę o dwu teoriach, które do pewnego stopnia unifikują wszystkie poprzednio omówione kierunki badań i nadają im swoiste piętno, a mianowicie:

C. Teoria funkcji rekurencyjnych i metody algebraiczne.

Należy wreszcie zaznaczyć, że wymienione tu problemy nie są od siebie niezależne i że wyniki uzyskane przy dyskusji jednego problemu wpływają istotnie na pozostałe.

W niniejszym referacie podaję charakterystyczne wyniki uzyskane przy badaniu poszczególnych zagadnień i staram się nie pominąć żadnego z ważniejszych. Wiele jednak wyników nie zostało wspomnianych, referat ma bowiem charakter informacyjny i nie dąży do encyklopedycznej zupełności.

### A1. Metoda aksjomatyczna

Punkt ten rozpada się w sposób naturalny na dwa działy. W jednym (A1b) omówię ogólną teorię systemów określonych przez układy aksjomatów i związki tej teorii z algebrą abstrakcyjną, w drugim (A1c) — zastosowanie metody aksjomatycznej do ugruntowania poszczególnych teorii matematycznych. Na początku podam jednak (w ustępie A1a) ogólny opis układów aksjomatów i omówię ich podział na układy elementarne i nieelementarne.

**A1a. Elementarne i nieelementarne układy aksjomatów.** Aksjomaty systemów elementarnych zawierają tylko zmienne najniższego typu, nie występują w nich natomiast zmienne przebiegające zbiory, klasy zbiorów, relacje itp. Aksjomaty te są więc zdaniami, w których prócz stałych logicznych występują zmienne najniższego typu oraz symbole dla pewnej liczby stałych działań i relacji. Kwantyfikatory występujące w tych aksjomatach są zawsze ograniczone do pewnego stałego zbioru $I$, zwanego *zakresem indywiduów systemu* i składającego się z przedmiotów, na których można dokonywać działania oznaczone symbolami występującymi w aksjomatach, lub które mogą pozostawać wzajemnie w relacjach oznaczonych symbolami występującymi w aksjomatach. Inaczej mówiąc, $I$ jest suma (w sensie teorii mnogości) pól relacji oraz dziedzin i przeciwdziedzin funkcji, których symbole występują w aksjomatach.

Dyrektywy (reguły wnioskowania) systemu elementarnego są to na ogół dyrektywy węższego rachunku funkcyjnego (z identycznością). Wszystkie twierdzenia systemu elementarnego zawierają jedynie zmienne najniższego typu i zmienne te są związane kwantyfikatorami ograniczonymi do zbioru $I$.

Za przykład elementarnego układu aksjomatów służyć mogą trzy aksjomaty, na których opiera się teoria grup:

$$(x)_I(y)_I(z)_I[(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z)],$$

$$(x)_I(y)_I(\exists z)_I(x = y\oplus z), \qquad (x)_I(y)_I(\exists z)_I(x = z\oplus y).$$

Kwantyfikator $(x)_I$ czytać należy: dla każdego $x$ należącego do $I$, kwantyfikator zaś $(\exists x)_I$: istnieje $x$ należące do $I$. Znak $\oplus$ jest symbolem działania grupowego.

Zaznaczmy, że w wielu znanych systemach elementarnych liczba aksjomatów nie jest skończona.

Aksjomaty systemów nieelementarnych zawierają, prócz zmiennych najniższego typu, zmienne przebiegające dowolne podzbiory zbioru $I$, relacje między elementami zbioru $I$ itp. Przykładem nieelementarnego aksjomatu jest pewnik indukcji matematycznej.

$$(X)_I\{(1\epsilon X)\cdot(n)_I[(n\epsilon X)\supset(n+1\epsilon X)]\supset(n)_I(n\epsilon X)\}.$$

Tutaj $X$ jest zmienną przebiegającą dowolne podzbiory zbioru liczb naturalnych $I$, a kwantyfikator $(X)_I$ należy czytać: dla każdego $X$ zawartego w $I$.

Układy aksjomatów arytmetyki liczb naturalnych i rzeczywistych nie są elementarne. Nieelementarnymi są mianowicie pewnik indukcji i pewnik ciągłości.

Przy wyprowadzaniu twierdzeń z aksjomatów nieelementarnych korzystamy nie tylko z praw logiki, ale i z pewnych własności zbiorów, np. z własności orzekającej, że istnieje zbiór

$$\underset{x}{E}[(x\epsilon I)\,\Phi(x)],$$

gdzie $\Phi(x)$ jest dowolną funkcją zdaniową. Dlatego też systemy nieelementarne uważać należy za połączenie dwu systemów, z których jeden jest pewnym fragmentem teorii mnogości.

Powstaje pytanie, na jakiej podstawie uzasadnia się w tych systemach własności zbiorów.

Omówię w dalszym ciągu dwa sposoby ugruntowania teorii mnogości: aksjomatyczny i konstruktywny (por. A1c$\beta$, A2a i A2b).

Jeśli opieramy teorię mnogości na aksjomatach[1]), to aksjomaty te muszą być elementarne. W przeciwnym razie powstałoby *petitio principii* polegające w danym przypadku na tym, że dla uzasadnienia praw teorii mnogości korzystalibyśmy z samej tej teorii. Nieelementarne układy aksjomatów są więc (w razie przyjęcia aksjomatycznej metody ugruntowania teorii mnogości) zlepkiem dwu elementarnych układów: jednego — zawierającego pełną lub fragmentaryczną aksjomatykę dla teorii mnogości i drugiego — właściwego układu aksjomatów teorii.

Podział na aksjomaty elementarne i nieelementarne jest więc — przy aksjomatycznej metodzie ugruntowania teorii mnogości — pozorny i sprowadza się do tego, że operuje się dwoma układami aksjomatów, nie formułując jednego z nich *explicite*.

Jeśli dla teorii mnogości (lub jej fragmentu występującego w rozpatrywanym systemie) przyjmuje się nie ugruntowanie aksjomatyczne, lecz inne nie sprowadzające się do aksjomatyki, to różnica pomiędzy układami elementarnymi i nieelementarnymi staje się istotna. Jest tak np. wówczas, gdy teorię mnogości ugruntowuje się za pomocą jednej z metod konstruktywnych (por. A2).

Matematycy operujący nieelementarnymi układami aksjomatów pojmują przeważnie teorię mnogości w sposób „naiwny“ tj. nie zastanawiają się nad uzasadnieniem praw tej teorii. W praktyce rozumowania tych matematyków dają się zawsze powtórzyć w aksjomatycznym systemie teorii mnogości. Mimo to podział aksjomatów na elementarne i nieelementarne ma doniosłe znaczenie, gdyż rozróżnienie to doprowadziło do specjalnej problematyki.

Wiadomo, że znaczne partie matematyki można zaksjomatyzować, tzn. wyprowadzić ich twierdzenia z pewnej, na ogół niewielkiej liczby aksjomatów (elementarnych i nieelementarnych). Wiadomo też, że od chwili ukazania się *Grundlagen der Geometrie* Hilberta aż po lata dwu-

---

[1]) Niektóre inne metody uzasadniania praw teorii mnogości (polegające np. na włączaniu teorii mnogości do logiki, rozumianej jako tzw. rozszerzony rachunek funkcyjny) dają się zastąpić w sposób równoważny odpowiednio dobraną aksjomatyką. Por. str. 39.

dzieste aksjomatyzowanie różnych fragmentów matematyki było głównym tematem prac nad podstawami matematyki.

**A1b$\alpha$. Ogólna teoria systemów elementarnych**[2]. W chwili obecnej nie przywiązujemy już tyle uwagi do efektywnego aksjomatyzowania poszczególnych fragmentów matematyki. Interesujemy się natomiast ogólną teorią modeli dla systemów scharakteryzowanych przez układy aksjomatów.

Podstawowym pojęciem tej teorii jest pojęcie *modelu*. Modelem dla systemu aksjomatycznego $S$ jest zbiór oraz układ funkcji i relacji określonych w tym zbiorze mających wszystkie te własności, które wypowiedziane są w aksjomatach systemu $S$ (w dalszym ciągu będę często zamiast *układ złożony ze zbioru oraz funkcji i relacji* mówił krótko *algebra*). Klasę wszystkich modeli systemu $S$ nazywamy *klasą arytmetyczną*[3]), wyznaczoną przez układ aksjomatów systemu $S$.

Klasa wszystkich grup jest np. klasą arytmetyczną, bo aksjomaty charakteryzujące grupę są elementarne. Podobnie klasa pierścieni i klasa ciał są klasami arytmetycznymi.

Ogólne pojęcia algebraiczne takie jak homomorfizm, izomorfizm, algebra wolna itp., które w algebrze określano dla konkretnych klas arytmetycznych, np. dla grup lub pierścieni, przenoszą się bez istotnej zmiany do teorii dowolnych klas arytmetycznych.

Tak np. *podalgebrą* algebry $A$ określonej przez zbiór $I$ oraz funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_k$ nazywamy algebrę $A'$ określoną przez zbiór $I'$ zawarty w $I$ oraz funkcje $f'_1, f'_2, \ldots, f'_k$, które dla argumentów należących do $I'$ pokrywają się z funkcjami $f_1, f_2, \ldots, f_k$; przy tym zbiór $I'$ jest zamknięty względem funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_k$, tzn. dla argumentów należących do $I'$ wartości tych funkcji należą do $I'$.

Dla przykładu nadmienimy, że jeśli algebra $A$ jest grupą (rozumianą jako algebra o jednej operacji $\oplus$), to podalgebrą $A$ w sensie powyższej definicji jest każda półgrupa zawarta w $A$. Jeśli zaś $A$ jest grupą rozumianą jako algebra o dwu operacjach $a \oplus b$ i $a^{-1}$, to podalgebrą $A$ w sensie powyższej definicji jest każda grupa zawarta w $A$.

Powstająca w ten sposób ogólna teoria pojęć izomorfizmu, homomorfizmu, podalgebry itp. ma dużą wartość metodologiczną, gdyż unifikuje różne specjalne teorie algebraiczne. Ma ona ponadto wartość

---

[2]) W całym punkcie A1b przez *system aksjomatyczny* rozumiem system oparty na skończonej lub nieskończonej ilości aksjomatów elementarnych.

[3]) Tarski [90] używa nazwy *klasa arytmetyczna* tylko w przypadku, gdy liczba aksjomatów systemu $S$ jest skończona; jeśli liczba ta nie jest skończona, to Tarski używa terminu *klasa* $AC_\delta$. W sprawie dopuszczalności klasy wszystkich modeli por. str. 30.

dydaktyczną i może służyć jako dobre wprowadzenie do specjalnych teorii algebraicznych.

Można przypuszczać, że w teorii tej tkwi więcej, niż po prostu unifikacja i uogólnienie faktów znanych z elementów algebry. Tarski [91], Henkin [17] i Robinson [74] podali przykłady uderzająco prostych dowodów twierdzeń egzystencjonalnych uzyskanych na gruncie tej teorii przez zastosowanie twierdzenia Gödla o zupełności węższego rachunku funkcyjnego.

Tak np. przez zastosowanie tego twierdzenia Tarski[4]) wykazał, że *jeżeli istnieje chociażby jedno ciało uporządkowane, to istnieje ciało uporządkowane niearchimedesowsko.* Innym przykładem jest udowodnione przez Robinsona [74] *istnienie takiego ciała uporządkowanego niearchimedesowsko, że wielomiany o współczynnikach należących do tego ciała mają własność Darboux.*

Zbliżonymi metodami Robinson [74] uzyskał ciekawe twierdzenia algebraiczne, dowodząc np., że *jeżeli wyrażenie napisane za pomocą symboli mających sens w teorii ciał przemiennych jest prawdziwe w ciałach o charakterystyce* 0, *to jest ono też prawdziwe dla ciał o dostatecznie dużej charakterystyce p.*

Należy nadmienić, że pomysł takiego wykorzystania twierdzenia Gödla do dowodów twierdzeń algebraicznych pochodzi od Malcewa [45].

Konkretne wyniki, które tą drogą dotychczas otrzymano, dają się na ogół uzyskać i w inny sposób. Nie jest jednak wykluczone, że zastosowanie ogólnej metody, którą tu opisałem, przyniesie w przyszłości znacznie doniośliejsze odkrycia.

Kwestia, jak daleko sięgają te ogólne metody i jakie tkwią w nich dalsze możliwości, jest ciekawym tematem do pracy badawczej.

Inny ciekawy kierunek badań zapoczątkował G. Birkhoff [5]) wykazując, że *każda klasa algebr zamknięta względem operacji tworzenia obrazu homomorficznego, iloczynu prostego i tworzenia podalgebry, jest zawsze klasą arytmetyczną.* Układ aksjomatów charakteryzujący tę klasę składa się ze zdań ogólnych mających postać

$$(1)\qquad (x_1)_I(x_2)_I\dots(x_n)_I[W(x_1,x_2,\dots,x_n)=V(x_1,x_2,\dots,x_n)],$$

gdzie $W$ i $V$ są wielomianami zbudowanymi ze zmiennych $x_1,x_2,\dots,x_n$ oraz z symbolów działań występujących w rozpatrywanych algebrach.

[4]) Dowód ten był przedstawiony na konferencji w Princeton (1946). Por. Tarski [91], str. 718.

[5]) Należy zaznaczyć, że algebry rozpatrywane przez Birkhoffa [2] są określone przez zbiór i układ funkcji, natomiast nie występują w nich relacje.

Dla ilustracji tego twierdzenia rozpatrzymy klasę wszystkich grup (grupę traktujemy tu jako algebrę z dwiema operacjami $a \oplus b$ i $a^{-1}$). Klasa ta jest zamknięta względem operacji tworzenia obrazów homomorficznych, iloczynów prostych i podalgebr. W myśl twierdzenia Birkhoffa jest więc ona klasą arytmetyczną. Istotnie, aksjomaty

$$(x)_I (y)_I (z)_I [x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z],$$

$$(x)_I (y)_I [x^{-1} \oplus x = y^{-1} \oplus y = x \oplus x^{-1} = y \oplus y^{-1}],$$

$$(x)_I (y)_I [x \oplus x^{-1} \oplus y = y]$$

charakteryzują klasę wszystkich grup.

Twierdzenie Birkhoffa znalazło zastosowania np. do wykazania, że pewne algebry są homomorficznymi obrazami podalgebr zawartych w nieskończonym iloczynie prostym jednej ustalonej algebry. Np. przez analizę twierdzenia Birkhoffa Tarski wykazał, że *każda grupa jest homomorficznym obrazem podgrupy nieskończonego iloczynu prostego $PG_i$*, gdzie każda $G_i$ jest grupą swobodną o dwu generatorach[6]).

Wyniki Birkhoffa uogólnił i pogłębił Łoś[7]) podając charakteryzację klas arytmetycznych określonych przez aksjomaty ogólniejszej postaci, niż aksjomaty typu (1). Łoś scharakteryzował mianowicie klasy arytmetyczne określone przez aksjomaty powstające z równości typu $W = V$ przez zastosowanie do tych równości dowolnych operacji rachunku zdań i związanie wszystkich zmiennych kwantyfikatorami ogólnymi umieszczonymi na początku. Przykładem jest tu ogólna teoria pierścieni bez dzielników zera, której jeden z aksjomatów ma postać

$$(x)_I (y)_I \{(xy = 0) \supset [(x = 0) \vee (y = 0)]\}.$$

Wyniki swe uzyskał Łoś wprowadzając tzw. pola logiczne, stanowiące uogólnienie pojęcia modelu. W modelu każda relacja albo zachodzi między dowolnymi dwoma elementami, albo też między tymi elementami nie zachodzi; inaczej mówiąc zdanie $xRy$ ma jedną z dwu wartości logicznych: prawda albo fałsz. W polu logicznym każdemu takiemu zdaniu przypisuje się pewien ciężar, będący elementem algebry Boole'a. W przypadku gdy algebra ta redukuje się do algebry dwuelementowej, pole logiczne redukuje się do modelu.

Teoria Łosia prowadzi do wielu interesujących wyników. Np. udało się dzięki niej scharakteryzować własności algebr niezmiennicze względem przekształceń homomorficznych. Już przedtem Marczewski [46]

---

[6]) Tarski [92].

[7]) Praca Łosia nie jest jeszcze opublikowana.

wykazał, że własności *pozytywne*, tj. własności dające się napisać za pomocą kwantyfikatorów alternatywy i koniunkcji, przenoszą się z algebry na każdy jej obraz homomorficzny. Łoś wykazał, że i na odwrót: własność, która z każdej algebry (której przysługuje) przenosi się na jej obraz homomorficzny, jest równoważna własności pozytywnej.

Pojęcie kategoryczności, doniosłe dla teorii nieelementarnych, traci swe znaczenie dla systemów elementarnych. Wiadomo, że każdy niesprzeczny elementarny układ aksjomatów ma modele dowolnej mocy[8]), żaden system elementarny nie jest więc kategoryczny.

Dlatego wydaje się ważną inowacją wprowadzenie pojęcia kategoryczności w danej mocy. Dokonali tego niezależnie Łoś [43] i Vaught [103]. System aksjomatów nazywają oni *kategorycznym w pewnej mocy*, jeśli dowolne dwa jego modele tej mocy są zawsze izomorficzne. Łoś podał przykłady systemów kategorycznych w różnych mocach, a Vaught zauważył, że system, który jest kategoryczny chociaż w jednej mocy nieskończonej i opiera się na rekurencyjnym układzie aksjomatów, jest rozstrzygalny. Dalsze badania nad pojęciem kategoryczności w danej mocy są bardzo celowe i pożądane.

Teoria systemów aksjomatycznych wchłonęła w siebie teorię tzw. wielowartościowych rachunków zdań uprawianych szczególnie intensywnie w Polsce przed dwudziestu laty. To, co logicy specjaliści od rachunku zdań nazywali systemem wielowartościowym, okazało się systemem scharakteryzowanym przez aksjomaty bardzo szczególnego typu, a mianowicie postaci

$$(x_1)_I(x_2)_I\dots(x_n)_I[W(x_1,x_2,\dots,x_n)=1],$$

gdzie $W$ jest wielomianem, a 1 ustalonym elementem. Rozpatrywane przez logików pojęcie matrycy jest szczególnym przypadkiem pojęcia modelu. Niektóre wyniki uzyskane przez logików okazały się identyczne z wynikami dawniej znanymi w algebrze lub takimi, które łatwiej jest uzyskać stosując standardowe konstrukcje algebraiczne. Tak np. twierdzenie Lindenbauma[9]) o istnieniu adekwatnej matrycy dla każdego systemu rachunku zdań okazało się identyczne z twierdzeniem o istnieniu algebry wolnej, spełniającej dowolnie z góry dany układ tożsamości. Twierdzenie Wajsberga[10]) o niemożliwości zaksjomatyzowania zwykłego rachunku zdań przez aksjomaty zawierające tylko dwie zmienne okazało się wnioskiem z twierdzenia, że algebra o działaniach $+$, $\times$, $'$, w której każda

---

[8]) Skolem [84], str. 161.

[9]) Lindenbaum nie ogłosił nigdy swego dowodu. Pierwszy raz dowód ten opublikował McKinsey [50].

[10]) Por. Łukasiewicz i Tarski [44].

podalgebra generowana przez dwa elementy jest algebrą Boole'a, nie musi sama być algebrą Boole'a [5].

Ujęcie logik wielowartościowych od strony ich modeli doprowadziło do rozpatrywania systemów dedukcyjnych, w których nie tylko aksjomaty mają formę równania między dwoma wielomianami, ale również wszystkie tezy są tej postaci; dyrektywy dedukcyjne pozwalają jedynie stosować zwrotność, symetryczność, przechodniość i ekstensjonalność równości przy przechodzeniu od jednej równości do drugiej. Zbiór równości prawdziwych dla dowolnego układu funkcji określonych na dwóch elementach jest aksjomatyzowalny w opisany sposób[11]) za pomocą skończonego zbioru równości. Wynik ten nie uogólnia się na funkcje określone w dowolnym zbiorze skończonym [12]).

Niektóre wielowartościowe systemy rachunku zdań stały się znacznie bardziej interesujące dla matematyków z chwilą, gdy przedstawiono je w postaci systemów algebraicznych. Tak np. system tzw. implikacji ścisłej, który stworzono dla celów logicznej analizy pojęcia konieczności i możliwości, okazał się identyczny z algebrą ogólnej topologii rozwijaną od przeszło trzydziestu lat przez Kuratowskiego i jego uczniów[13]).

Podobnie algebra Brouwera, będąca matrycą dla systemu logiki intuicjonistycznej, okazała się identyczna z algebrą zbiorów domkniętych w ogólnych przestrzeniach topologicznych. Obie te zależności zostały wykorzystane w ostatnich latach w wielu badaniach: McKinseya i Tarskiego ([51] i [52]), Rasiowej i Sikorskiego [71], Mostowskiego [53]. Rzecz jasna, że odkrycie takich związków ogromnie ułatwiło studiowanie własności systemów wielowartościowych, a nie należy też wykluczać możliwości, że ułatwi ono badania nad ogólną algebrą, dzięki uprzystępnieniu matematykom intuicji, które z tymi systemami wiązali logicy.

**A1bβ. Pojęcie kategoryczności i teoria systemów nieelementarnych.** Pojęcie modelu zachowuje swoje znaczenie także dla systemów nieelementarnych. Ponieważ jednak w systemach nieelementarnych mówimy nie tylko o elementach zbioru $I$, lecz również o dowolnych podzbiorach zbioru $I$, relacjach między elementami $I$ itd., więc określając model musimy nadać interpretację również tym mnogościowym pojęciom. Mamy tu przed sobą dwie drogi.

Jedna droga polega na traktowaniu pojęć mnogościowych na równi z innymi pojęciami pierwotnymi. Zbiory są więc interpretowane w modelu jako dowolne przedmioty, stosunek należenia jako dowolna

---

[11]) Lyndon [41].
[12]) Lyndon [42].
[13]) Weyl [105].

relacja, byle spełniająca (wraz z przedmiotami interpretującymi zbiory) aksjomaty teorii mnogości.

Modele tego rodzaju nazywamy *nieabsolutnymi.*

Drugą drogę wybrać może matematyk, który opiera swe badania na jakimś ustalonym systemie teorii mnogości, a więc który w rozumowaniach swoich rozporządza pojęciem zbioru i umie się nim posługiwać, może rozpatrywać ponadto tzw. *modele absolutne.* W tych modelach pojęcie zbioru, występujące w aksjomatach systemu, interpretowane jest jako to właśnie pojęcie zbioru, którym intuicyjnie operuje matematyk w swych rozważaniach.

Zauważmy, że dwu matematyków, przyjmujących różne sposoby ugruntowania teorii mnogości, może dojść do dwu zupełnie odmiennych pojęć modelu absolutnego. Wydaje mi się wobec tego, że pojęcie modelu absolutnego nabierze głębszej wartości dopiero wówczas, gdy rozwiązane zostaną trudne problemy podstaw teorii mnogości, dzięki czemu matematycy będą mogli zgodnie przyjąć jeden sposób ugruntowania tej teorii.

Faktem jest jednak, że większość matematyków operuje swobodnie w swej praktyce pojęciem zbioru, relacji, klas zbiorów itp. i przyjmuje zgodne założenia o tych mnogościowych pojęciach. Matematycy tacy mogą więc — praktycznie bez obawy nieporozumienia — operować pojęciem modelu absolutnego. Przy subtelniejszych rozważaniach uwzględniających problematykę podstaw teorii mnogości pojęcie to okazuje się jednak zbyt mało sprecyzowane.

Modele nieabsolutne pojawiły się w badaniach nad podstawami teorii mnogości w związku z tak zwanym *paradoksem Skolema* [84]. W ostatnich latach poświęcono im szereg prac zmierzających bądź to do wyświetlenia sobie ich znaczenia, bądź to do znalezienia pewnych ich zastosowań [14]).

W związku z rozróżnianiem modeli absolutnych i nieabsolutnych trzeba zachować pewne ostrożności przy badaniach nad kategorycznością układów aksjomatów. Klasyczne określenie: *układ aksjomatów jest kategoryczny, jeśli każde dwa jego modele są izomorficzne,* nie jest zadowalające, nie wiadomo bowiem o jakich modelach jest mowa w tym określeniu. W szczególności jest jasne, że gdyby w powyższej definicji słowo *model* znaczyło *dowolny model nieabsolutny,* to żaden układ aksjomatów nie byłby kategoryczny.

Mówiąc o kategoryczności mamy zazwyczaj na myśli izomorfizm dowolnych dwu modeli absolutnych. Znane twierdzenia o kategoryczności aksjomatów arytmetyki i geometrii uzyskuje się wówczas w opar-

[14]) Zob. Kemeny [31], Henkin [18], Mostowski [54], Rosser i Wang [77].

ciu o najprostsze aksjomaty teorii mnogości przyjmowane dla zbiorów, którymi operujemy intuicyjnie.

Wspomniałem już, że niektórzy matematycy unikają operowania pojęciem modelu absolutnego, a to z uwagi na niewyjaśnione jeszcze zagadnienia podstaw teorii mnogości. Opiszę tu definicję kategoryczności, którą mogliby tacy matematycy przyjmować (por. też Wang [105]).

Traktujmy system nieelementarny $S$ jako zespół dwu systemów elementarnych $S'$, $S''$, przy czym $S'$ zawiera tylko terminy pierwotne teorii mnogości, a $S''$ ponadto terminy pierwotne teorii, której aksjomatyką się zajmujemy.

Każdy model $M$ systemu $S$ zawiera podmodel $M'$ systemu $S'$, tj. model dla teorii mnogości, na której opiera się system $S$. Nazwijmy $M'$ częścią mnogościową $M$.

Definicja. *System $S$ jest kategoryczny, jeśli dla każdych dwu modeli $M_1$, $M_2$ systemu $S$ każde izomorficzne odwzorowanie części mnogościowej $M_1'$ na część mnogościową $M_2'$ daje się rozszerzyć do izomorficznego odwzorowania całych modeli $M_1$ i $M_2$.*

Jeśli $S'$ zawiera aksjomatyczną teorię mnogości Zermeli, to zwykłe twierdzenia o kategoryczności aksjomatów geometrii i arytmetyki dają się udowodnić przy podanej tu definicji kategoryczności.

Teoria systemów nieelementarnych jest w chwili obecnej bez porównania uboższa niż teoria systemów elementarnych. Jest to zrozumiałe, gdy zważy się, że w teorię tę uwikłana jest trudna problematyka podstaw teorii mnogości.

Wspomnę tu o pewnych negatywnych wynikach dotyczących modeli dla systemów nieelementarnych. Tarski [95] i Kuratowski [38] wykazali, że *klasa wszystkich relacji dobrze porządkujących swe pole nie jest klasą arytmetyczną,* tj. nie daje się scharakteryzować ani skończonym, ani nieskończonym układem aksjomatów elementarnych. Łoś [15]) uzyskał podobny wynik dla klasy zwartych algebr domknięć (algebra domknięć nazywa się *zwartą,* jeśli obowiązuje w niej twierdzenie Cantora o malejącym ciągu zbiorów zamkniętych).

Teoria systemów aksjomatycznych stanowi w tej chwili dojrzałą matematyczną teorię i jest ciekawe obserwować jej rozwój historyczny. Powstała z potrzeb systematyzowania i uściślenia różnych specjalnych działów matematyki, stała się ona następnie środkiem do określania treści wielu działów matematyki i zaczęła wytwarzać ogólne pojęcia stosowalne do różnych systemów aksjomatycznych. Obecnie koncentruje się ona nad badaniem najogólniejszych pojęć, które wytworzyły się w trak-

---

[15]) Wynik ten nie jest jeszcze opublikowany.

cie jej rozwoju. Kontynuacji tych badań należy oczekiwać z zainteresowaniem, a w szczególności należy się spodziewać wyświetlenia kwestii, czy pojęcia wytworzone w ogólnej teorii znajdą zastosowania do głębszych i konkretnych problemów matematycznych.

**A1c. Metoda aksjomatyczna w zastosowaniu do konkretnych teorii matematycznych.** Metoda określania przedmiotu badań matematyki przez aksjomaty okazała się bardzo płodna i pożyteczna w podstawach geometrii i w abstrakcyjnej algebrze. Natomiast określanie przedmiotu badań arytmetyki liczb naturalnych lub arytmetyki liczb rzeczywistych przez podanie układu aksjomatów dla tych teorii wydaje się nieprzekonywujące. Pochodzi to z odkrytej przez Gödla [8] *niezupełności każdego dostatecznie bogatego układu aksjomatów*.

Konsekwencją niezupełności układu aksjomatów jest, że można znaleźć takie wyrażenie $A$, że układ pozostaje niesprzeczny zarówno po dołączeniu wyrażenia $A$, jak i po dołączeniu wyrażenia $\sim A$. Powołując się na tzw. twierdzenie o zupełności [16]) otrzymujemy zatem dwa modele nieabsolutne rozważanego układu, przy czym w jednym modelu jest spełnione wyrażenie $A$, a w drugim $\sim A$. Modele nie są więc izomorficzne; co więcej, należą one do dwu rozłącznych klas arytmetycznych (wyznaczonych aksjomatami $A$ i $\sim A$).

Istnienie różnych, nieizomorficznych między sobą modeli dla układu aksjomatów, na których wspiera się dana teoria, nie ma w sobie nic rażącego ani nienaturalnego, gdy teoria ta stawia sobie za zadanie studium całej klasy algebr. Jest np. całkowicie naturalne, że aksjomaty teorii grup nie są kategoryczne, gdyż w teorii tej badamy ogólne własności grup, nie zaś własności jednej konkretnej grupy.

Treść teorii grup jest całkowicie wyczerpana przez jej aksjomaty. Wszystkie algebry spełniające tę aksjomatykę i tylko one są przedmiotem badań teorii grup. Podobnie układają się stosunki w takich teoriach jak ogólna topologia, abstrakcyjna teoria przestrzeni liniowych itp.

Wynika stąd, że w teoriach, które nie stawiają sobie za zadanie badania jednego określonego tworu matematycznego, lecz całej klasy tworów, metoda aksjomatyczna ma podstawowe znaczenie.

Gdybyśmy stanęli na stanowisku, że można określać za pomocą aksjomatów treść takich działów matematyki jak arytmetyka liczb naturalnych lub arytmetyka liczb rzeczywistych, lub wreszcie teoria mnogości, doszlibyśmy do wniosku, że żadna z tych teorii nie bada jednego określonego konkretnego pojęcia, lecz całą klasę pojęć ze sobą równouprawnionych.

[16]) Gödel [10]. Zob. też punkt B1, str. 40-41

Aby przedstawić to jeszcze dobitniej, ograniczymy się do arytmetyki liczb naturalnych. Wiadomo dziś, że aksjomatyka Peano nie charakteryzuje jednego określonego zbioru liczb naturalnych i określonych działań wykonalnych na tych liczbach, lecz całą klasę modeli tej aksjomatyki; poszczególne modele należące do tej klasy nie są przy tym ze sobą izomorficzne, lecz mają istotnie odmienne własności (należą do rozłącznych klas arytmetycznych). Gdybyśmy zatem przyjęli, że arytmetyka jest nauką o konsekwencjach płynących z aksjomatów Peano, to musielibyśmy wnioskować, że nie ma jednego określonego pojęcia liczby naturalnej i że pewne własności liczb naturalnych są zasadniczo niepoznawalne.

Ocena, czy wniosek taki jest możliwy do przyjęcia, nie należy do matematyki, lecz do filozofii; wniosek nasz nie zawiera bowiem wewnętrznej sprzeczności, a nosi przy tym charakter zdecydowanie teoriopoznawczy.

Wydaje się nam, że stanowisko akceptujące omawiany wniosek jest błędne. Jedynym konsekwentnym stanowiskiem zgodnym zarówno ze zdrowym rozsądkiem jak i z tradycją matematyczną jest przyjęcie, że źródłem i ostatecznym *raison d'être* pojęcia liczby zarówno naturalnej jak i rzeczywistej jest doświadczenie i stosowalność praktyczna. To samo odnosi się do pojęć teorii mnogości, o ile rozpatrujemy je w dość wąskim zakresie — takim, w jakim są one potrzebne w klasycznych działach matematyki.

Przyjmując to stanowisko musimy wyciągnąć konsekwencję, że jest tylko jedna arytmetyka liczb naturalnych, jedna arytmetyka liczb rzeczywistych i jedna teoria mnogości, a wobec tego definiowanie tych działów matematyki przez aksjomaty, które mają raz na zawsze ustalić ich zakres i ich treść, nie jest możliwe.

Aksjomaty spełniają w tych teoriach ważną rolę: systematyzują one pewien ich fragment, ten mianowicie, który obejmuje naszą aktualną wiedzę; ułatwiają one nieraz wykład teorii i mają zatem znaczenie dydaktyczne. Tej jednak zasadniczej roli, jaką chciał metodzie aksjomatycznej przypisać Hilbert, a mianowicie definiowania treści teorii, aksjomatyka — w odniesieniu do arytmetyki — spełnić nie może.

Wobec przemożnego wpływu, jaki w latach trzydziestych wywierały na matematyków zajmujących się zagadnieniami podstaw szkoła Hilberta i neopozytywistyczne koło wiedeńskie, odkrycie niezupełności wszystkich bogatych układów aksjomatów oceniano początkowo jako wynik niszczący badania podstaw matematyki i wysuwano stąd daleko idące pesymistyczne wnioski. W rzeczywistości jednak wyniki Gödla zadają cios nie badaniom podstaw matematyki, lecz jedynie tym próbom ugruntowania podstaw matematyki, które były podejmowane przez Hilberta i neopozytywistów. Filozofia materialistyczna od dawna występpowała przeciw tym próbom, wykazując idealistyczny charakter idei Hilberta, polegającej na określaniu treści matematyki przez podanie jej aksjomatów, jak również koncepcji neopozytywistycznych, polegających na wyjaśnianiu treści matematyki przez analizę języka.

Nie ma zatem powodów do wysnuwania pesymistycznych wniosków z odkrycia Gödla. Odkrycie nieizomorficznych modeli czy to dla arytmetyki, czy też teorii mnogości jest wzbogaceniem naszej wiedzy. Przed ich odkryciem sądziliśmy, że każde dwa modele dla układu aksjomatów Peano są ze sobą izomorficzne i wydawało się nam, że podobnie układają się stosunki dla aksjomatów teorii mnogości. Obecnie wiemy, że dla każdego z tych układów aksjomatów istnieje obszerna klasa wzajemnie nieizomorficznych modeli.

Fakt ten — mimo, że odkryty już dość dawno — został, jak mi się wydaje, dopiero w ostatnich czasach należycie oceniony i zrozumiany przez matematyków. Od niedawna też zjawiają się pierwsze próby wykorzystania tego faktu dla celów matematycznych niezależnych od problematyki filozoficznej, o której była mowa poprzednio. Tak np. Ryll-Nardzewski [80] wykorzystał niekategoryczność aksjomatów artymetyki do dowodu, że schemat indukcji matematycznej nie może w arytmetyce elementarnej być zastąpiony skończoną ilością aksjomatów zawierających tylko symbole dla dodawania i mnożenia, a Hasenjaeger [16] wykorzystał ten sam fakt do dowodów niezależności w pewnych fragmentarycznych systemach arytmetyki. Zastosowania pojawiły się też w badaniach nad teorią mnogości, gdzie fakt istnienia różnych modeli wykorzystano do dowodów niesprzeczności i do częściowego rozwiązania zagadnienia niezależności pewnika wyboru [17]). Nie brak też w bieżącej literaturze ogólnych rozważań na temat nieizomorficznych modeli dla aksjomatów arytmetyki i teorii mnogości (por. np. pracę Rossera i Wanga [79] o tzw. *niestandardowych modelach*). Przyszłość pokaże, czy pojawią się dalsze zastosowania.

Omówię teraz zagadnienia, jakie nasuwa stosowanie metody aksjomatycznej do poszczególnych działów matematyki.

**A1c$\alpha$. Arytmetyka liczb naturalnych.** Arytmetykę liczb naturalnych określano dawniej jako naukę o działaniach dodawania i mnożenia spełniających aksjomaty Peano. Odpowiedź ta nie jest już dziś zadawalająca. Ogólne powody, dlaczego uważamy ją za błędną, podane były poprzednio. W przypadku arytmetyki dochodzą jeszcze powody specjalne. Znamy mianowicie wiele działań i klas noszących charakter zdecydowanie arytmetyczny, ale nie dających się zdefiniować za pomocą działań dodawania i mnożenia. Działania takie i klasy określa się w sposób in-

[17]) Gödel [10], Fraenkel [7], Mostowski [55].

dukcyjny, wykorzystując np. tzw. *semantykę* w sformułowaniu Tarskiego [90]. Jeśli mianowicie przyporządkujemy wyrażeniom należącym do systemu arytmetyki liczby naturalne (tzw. numery wyrażeń) i oznaczymy przez $V$ klasę numerów wyrażeń prawdziwych (w sensie określonym przez Tarskiego), to okaże się, że klasa $V$ daje się zdefiniować przez indukcję, ale że użyta do tego celu definicja nie daje się zapisać za pomocą środków, którymi rozporządzamy w systemie Peano.

Możliwe są różne rozszerzenia układu aksjomatów Peano, polegające np. na przyjęciu większej liczby pojęć pierwotnych. Do każdego z tych systemów stosują się jednak te same uwagi, co do pierwotnego systemu Peano. Dla każdego z nich istnieje funkcja (lub klasa) nie dająca się określić w tym systemie, lecz mimo to zdefiniowana indukcyjnie, a więc należąca do intuicyjnej arytmetyki. Żaden z tych systemów nie jest zupełny, gdyż istnieje indukcyjnie zdefiniowana w takim systemie funkcja, która jest tożsamościowo równa 0, mimo iż fakt ten nie daje się dowieść na podstawie aksjomatów systemu.

Uwagi powyższe wskazują na doniosłą rolę definicji indukcyjnych i dowodów indukcyjnych w podstawach arytmetyki. Niezupełność arytmetyki Peano i niemożliwość wysłowienia w niej wszystkich definicji należących do intuicyjnej arytmetyki pochodzą stąd, że systemy aksjomatyczne nie dają dostatecznych podstaw do ugruntowania teorii zupełnie dowolnych definicji indukcyjnych i dowodów indukcyjnych. Z drugiej strony, zasada indukcji i definicje indukcyjne są przyjmowane w intuicyjnym wykładzie arytmetyki właśnie za metody wyodrębniające arytmetykę spośród ogółu teorii matematycznych.

Dochodzimy w ten sposób do zagadnienia, czy można by tak rozszerzyć pojęcie systemu aksjomatycznego, żeby w tych rozszerzonych ramach dało się zbudować system pozwalający na wysłowienie dowolnej definicji indukcyjnej. System taki mógłby być przyjęty za arytmetykę liczb naturalnych.

Nie mamy w tej chwili żadnych podstaw do przypuszczania, że system taki w ogóle istnieje, ani nie wiemy w jakim kierunku poszukiwać jego konstrukcji. Być może okażą się tu przydatne rozważania Turinga [102] na temat liczb porządkowych konstruktywnych. Wydaje się, że nawet znacznie bardziej specjalne wyniki idące w zbliżonym kierunku nie byłyby pozbawione znaczenia. Jak wiadomo, żaden system aksjomatyczny nie jest adekwatny nawet dla teorii funkcji pierwotnie rekurencyjnych w tym sensie, że nie można w nim udowodnić wszystkich prawdziwych twierdzeń postaci $(x)[f(x)=0]$, gdzie $f$ jest funkcją pierwotnie rekurencyjną. Czy można przez odpowiednią modyfikację pojęcia systemu aksjomatycznego uzyskać system zupełny chociażby dla zdań tej postaci, jest, o ile mi wiadomo, zagadnieniem otwartym.

Trudności te potwierdzają tezę, że poszukiwanie określenia arytmetyki wyłącznie za pomocą metod matematycznych, bez odwoływania się do doświadczalnego pochodzenia pojęcia liczby naturalnej, nie jest możliwe. Ostateczne ugruntowanie podstaw arytmetyki należy więc do filozofii, nie zaś do matematyki.

Istnieje wiele mniej doniosłych, ale tym niemniej ważnych i ciekawych zagadnień związanych z aksjomatyką arytmetyki liczb naturalnych. Wymienię tu zagadnienia następujące:

Jaka jest struktura modeli arytmetyki Peanowskiej, różnych od modelu złożonego z liczb naturalnych; w szczególności, jaki jest ich typ porządkowy? Modele takie nazywamy za Rosserem i Wangiem *niestandardowymi*. Kemeny ogłosił pewne początkowe wyniki idące w tym kierunku [32].

Zbadać, czy przez użycie niestandardowych modeli można uzyskać dowody niezależności klasycznych problemów teorii liczb od aksjomatów arytmetyki.

Wykazać niezupełność aksjomatycznej arytmetyki bez użycia metody arytmetyzacji, lecz podając odpowiednie modele wykazujące niesprzeczność i niezależność odpowiednio dobranego twierdzenia teorii liczb.

**A1cβ. Aksjomatyczna teoria mnogości.** Z ugruntowaniem podstaw teorii mnogości wiąże się o wiele więcej zagadnień teoriopoznawczych, niż z ugruntowaniem arytmetyki. Głównym źródłem trudności zdaje się być pewnik o istnieniu zbioru zawierającego wszystkie podzbiory dowolnie danego zbioru. Pewnik ten prowadzi — jak wiadomo — do wniosku, że istnieją zbiory bardzo wysokiej mocy; zbiorów takich nie spotykamy jednak ani w praktyce pozamatematycznej, ani też w rozumowaniach zwykłej matematyki. Dopuszczalność epistemologiczna pewnika o zbiorze wszystkich podzbiorów jest zatem wątpliwa i odnosi się wrażenie, że pewnik ten przyjęto dla zbiorów dowolnych powołując się tylko na analogię z przypadkiem zbiorów skończonych i przeliczalnych, dla których pewnik ten doprowadza do rezultatów prawdziwych i zgodnych z tradycją matematyczną. Nie jest przy tym bez znaczenia fakt, że nieokreśloność pojęcia dowolnego zbioru, a więc pojęcia, które najwyraźniej występuje w pewniku o zbiorze podzbiorów, zdaje się być głównym źródłem nierozstrzygalności takich problemów jak np. uogólniona hipoteza continuum.

Również pewnik wyboru nastręcza — jak wiadomo — wiele materiału do rozważań teoriopoznawczych. Jest rzeczą uderzającą, że jest on niezbędny do dowodu wielu twierdzeń pozornie bardzo oczywistych, a jednocześnie prowadzi do wniosków paradoksalnych i sprzeciwiających się wszelkiej intuicji. Przykłady takich paradoksalnych wniosków są dobrze znane (np. paradoks kuli). Przykładem pozornie oczywistego twierdzenia, do dowodu którego pewnik wyboru jest jednak niezbędny, jest następujące twierdzenie: *Jeśli zbiór M jest obrazem jednoznacznym zbioru N, to nie jest prawdą, że moc zbioru M jest większa, niż moc zbioru N*; przykład ten pochodzi od Sierpińskiego [83].

Szczególnie niepokojącym i domagającym się wyjaśnienia jest fakt, że do aksjomatyki teorii mnogości dołączono w ubiegłych latach rozmaite nowe pewniki lub zmieniano sformułowania aksjomatów, wskutek czego mamy w tej chwili do wyboru bardzo liczne i istotnie między sobą różne aksjomatyki teorii mnogości, a nie mamy żadnych kryteriów, które wskazywałyby nam trafny wybór spośród tych wielu systemów.

Tak np. Gödel [10] wykazał, że można, bez popadnięcia w formalną sprzeczność, dołączyć do aksjomatów teorii mnogości tzw. *pewnik konstruowalności* i że z pewnika tego wynika pewnik wyboru i uogólniona hipoteza continuum. Tarski [95] zaproponował dołączenie do teorii mnogości nowych pewników gwarantujących istnienie bardzo dużych liczb kardynalnych i wykazał, że przy odpowiednim sformułowaniu tych pewników można z nich wyprowadzić pewnik wyboru.

Tarski podał jeszcze jedną modyfikację aksjomatów teorii mnogości nie polegającą na dołączaniu nowych pewników. Przypomnę najpierw schemat aksjomatu wyróżniania (*Aussonderungsaxiom*) pochodzący od Zermelo. Schemat ten jest następujący:

$$(2) \qquad (p_1)(p_2)\dots(p_n)(y)(\exists x)(t)[(t\epsilon x)\equiv(t\epsilon y)\cdot\Phi(t,p_1,p_2,\dots,p_n)].$$

Przy tym $\Phi(t,p_1,\dots,p_n)$ jest dowolnym wyrażeniem nie zawierającym zmiennej wolnej $x$ i zbudowanym z najprostszych wyrażeń postaci $u\epsilon v$ lub $u=v$ za pomocą operacji rachunku zdań oraz kwantyfikatorów.

Modyfikacja polega na tym, że w schemacie (2) dopuszczamy tylko takie funkcje zdaniowe $\Phi$, w których występują wyłącznie kwantyfikatory ograniczone, tj. kwantyfikatory postaci

$$(s)[(s\epsilon v)\supset\dots] \qquad \text{oraz} \qquad (\exists s)[(s\epsilon v)\dots].$$

Powstający w ten sposób system jest słabszy istotnie od systemu Zermelo. System Zermelo nie daje się zaksjomatyzować za pomocą skończonej liczby wyrażeń[18]), natomiast system zmodyfikowany jest skończenie aksjomatyzowalny.

Opisane tu modyfikacje aksjomatów teorii mnogości mają istotny wpływ na zasób twierdzeń arytmetycznych dających się ugruntować

[18]) Wang [104].

w teorii mnogości. Jeśli więc chcemy korzystać w matematyce z aksjomatów teorii mnogości, to powinniśmy dokonać wyboru jednego spośród tych wielu systemów. Jak wspomniałem, nie mamy na to żadnych kryteriów.

Z wymienionych powodów wydaje się, że aksjomatyka teorii mnogości jest jeszcze bardzo niedoskonała i że, poza ogólnymi trudnościami związanymi w ogóle ze stosowaniem metody aksjomatycznej, zjawiają się w przypadku teorii mnogości trudności specjalne. Ostateczne sformułowanie aksjomatyki teorii mnogości powinno być poprzedzone dyskusją nad zasadniczymi założeniami teorii, uwzględniającą przy tym stanowisko konstruktywne, o którym będzie mowa później.

Mimo tej zasadniczo ujemnej oceny aksjomatycznego ugruntowania teorii mnogości należy stwierdzić, że pewne wyniki związane z metodą aksjomatyczną zostaną prawdopodobnie trwałą zdobyczą, chociaż sama metoda aksjomatyczna będzie może później w teorii mnogości zarzucona. Są to mianowicie wyniki następujące:

1. Wykazanie niesprzeczności hipotezy continuum, pewnika wyboru i niektórych hipotez opisowej teorii funkcji. Wynik ten uzyskany przez Gödla [10] ma znaczenie bardzo doniosłe zarówno przez swą treść matematyczną jak i dzięki temu, że użyta przez Gödla metoda dowodu porusza głębokie epistemologiczne problemy teorii mnogości związane z kierunkiem konstruktywnym, o którym będzie mowa potem [19]).

2. Wzbogacenie teorii mnogości pojęciem klasy [20]) (w odróżnieniu od pojęcia zbioru) i wykazanie, że takie wzbogacenie nie prowadzi do sprzeczności. Wynik ten umożliwia dogodne wysłowienie wielu twierdzeń i pojęć w ogólnej algebrze, dzięki temu, że można np. mówić, bez obawy popadnięcia w antynomię, o klasie wszystkich grup, klasie wszystkich ciał itp. Korzystaliśmy z tego w punkcie A1b$\alpha$ mówiąc o teorii klas arytmetycznych.

Inne, bardziej specjalne wyniki badań nad aksjomatyką teorii mnogości nie wydają się tak doniosłe. W ostatnich czasach wykonano znaczną liczbę prac mających na celu porównanie różnych systemów teorii mnogości i wykazanie wzajemnej niezależności pewników jak również niezależności pewnych zdań od pewników teorii mnogości. Prace te pogłębiają zrozumienie wspomnianego już poprzednio *relatywizmu mnogościowego*, polegającego na istnieniu nieizomorficznych modeli jej aksjomatów; w związku z tymi badaniami rośnie nasza umiejętność konstruowania różnych modeli dla aksjomatyki teorii mnogości, co w konsekwencji

---

[19]) Gödel [11].
[20]) Bernays [1].

powinno doprowadzić do wykazania niezależności pewnika wyboru, hipotezy continuum i innych mnogościowych hipotez od aksjomatów teorii mnogości.

**A1cγ. Aksjomatyka teorii liczb rzeczywistych.** O aksjomatycznej teorii liczb rzeczywistych wspomnę bardzo krótko, gdyż nie jest ona obecnie intensywnie uprawiana, a nadto nie wydaje się, by jej problematyka istotnie wyróżniała się od problematyki innych teorii.

Zwrócę zatem uwagę na godny podkreślenia fakt, że rozumowania dotyczące aksjomatycznej teorii mnogości dają się we wszystkich znanych mi przypadkach z łatwością przeformułować tak, żeby były stosowalne do aksjomatycznego systemu arytmetyki liczb rzeczywistych. Podam kilka przykładów:

1. Metoda Gödla [10] wykazania niesprzeczności i pewnika wyboru i innych hipotez teorii mnogości przenosi się bez trudności na system arytmetyki liczb rzeczywistych. Jest to widoczne z pracy Nowikowa [64], w której zostały szczegółowo opracowane i po raz pierwszy opublikowane dowody niesprzeczności wielu hipotez deskryptywnej teorii funkcji rzeczywistych (niektóre z tych wyników zaanonsował dawniej Gödel [12] nie podając dowodów).

2. Dla teorii mnogości można podać dowód niezupełności nie posługujący się pojęciem arytmetyzacji, ale stosującym klasyczną metodę modeli[21]. Taki sam dowód daje się zastosować do teorii liczb rzeczywistych.

3. Podany przez Wanga [104] dowód niemożliwości zaksjomatyzowania teorii mnogości za pomocą skończonego zbioru zdań przenosi się bez żadnych istotnych zmian na aksjomatykę teorii liczb rzeczywistych.

Jak widać stąd, istotna różnica problematyki zaznacza się w przejściu od teorii o przeliczalnym zakresie indywiduów (arytmetyka liczb naturalnych) do teorii o nieprzeliczalnym zakresie indywiduów (teoria mnogości, teoria liczb rzeczywistych).

Z punktu widzenia naiwnej teorii mnogości w arytmetyce liczb rzeczywistych bada się jeden konkretny zbiór mocy continuum, podczas gdy w teorii mnogości bada się zbiory o dowolnie wysokich mocach. Mimo to obie teorie prowadzą do zupełnie podobnych problemów i sposób, w jaki te problemy atakujemy, jest w obu teoriach ten sam. Wynik ten zgadza się z poglądami przedstawicieli kierunków konstruktywnych w teorii mnogości, którzy wielokrotnie twierdzili, że istotną jest różnica między zbiorami przeliczalnymi a nieprzeliczalnymi, rozróżnianie zaś różnych mocy nieprzeliczalnych jest tylko pozorne.

---

[21]) Mostowski [56].

Paralelizm między badaniami nad teorią mnogości a arytmetyką liczb rzeczywistych sugeruje zwrócenie większej niż dotychczas uwagi na arytmetykę liczb rzeczywistych. Byłoby np. bardzo celowe wyłożenie w terminach ściśle arytmetycznych teorii odpowiadającej Gödlowskiej teorii zbiorów konstruowalnych. Również w przypadku wielu innych konstrukcji rozpatrywanych dotychczas w związku z teorią mnogości przeniesienie ich na teren arytmetyki liczb rzeczywistych byłoby pożyteczne, gdyż ułatwiłoby szerszemu kołu matematyków poznanie tych konstrukcji, a być może, doprowadziło do nowych odkryć.

### A2. Prądy konstruktywne w matematyce

Niedostateczność metody aksjomatycznej w odniesieniu do arytmetyki i teorii mnogości skłania nas do szukania innej metody ugruntowania podstaw tych teorii. Najciekawszą jest metoda konstruktywna. Przy jej stosowaniu nie określamy pojęć matematycznych przez postulaty, lecz konstruujemy je za pomocą pewnych z góry opisanych operacji. Podstawowymi problemami są tu: 1° wybranie dostatecznie szerokiego układu tych operacji, który umożliwiałby dokonywanie większości przynajmniej konstrukcji, zazwyczaj wykonywanych przez matematyków; 2° dyskusja problemu, czy zasób pojęć uzyskany przez te konstrukcje jest wystarczający dla matematyki.

Obecne prace nad metodą konstruktywną są w znacznej mierze kontynuacją dawniej podejmowanych prób, wiążących się z nazwiskami Russella i Whiteheada, Weyla, Brouwera i Hilberta. Omówię po kolei najważniejsze kierunki mające związek z prądami konstruktywnymi.

**A2a. Pewnik konstruowalności.** W 1938 roku Gödel [10] opublikował dowód niesprzeczności hipotezy continuum i pewnika wyboru. Dowód ten był ściśle związany z kierunkiem konstruktywnym. Gödel określił mianowicie skończoną liczbę pewnych prostych operacji (nazywać je będę operacjami elementarnymi) pozwalających konstruować nowe zbiory ze zbiorów już znanych i wykazał, że jeśli stosować te operacje do zbioru pustego i iterować to postępowanie dowolną pozaskończoną ilość razy, dojdzie się do klasy zbiorów (tak zwanych zbiorów konstruowalnych), w której spełnione są wszystkie aksjomaty teorii mnogości, a także pewnik wyboru, hipoteza continuum i niektóre inne hipotezy teorii mnogości.

Związki pomysłu Gödla z dawniejszymi pracami są widoczne: jeśli iterować określony przez niego sposób konstruowania zbiorów tylko przeliczalną ilość razy, dojdzie się do klasy zbiorów, które przyjmuje tzw. rozgałęziona teoria typów pochodząca jeszcze od Russella i Whiteheada. Struktura dowodu wykazuje też analogię do powziętego przez Hilberta [21], lecz nigdy nie przeprowadzonego planu wykazania niesprzeczności hipotezy continuum przez kolejne iterowanie procesu tworzenia funkcji rekurencyjnych.

Metodologicznie wynik Gödla jest doniosły z dwu powodów. Po pierwsze, wykazał on, że prace nad konstruktywną matematyką mogą mieć zastosowanie do zagadnień zupełnie nie związanych z filozoficznym programem kierunku konstruktywnego. Po drugie, praca jego wykazała, że przyjęcie postulatu konstruktywności (zgodnie z którym dopuszcza się istnienie tylko tworów, dających się w pewien sposób konstruować) niekoniecznie jest związane z eliminowaniem pewnych partii klasycznej matematyki lub teorii mnogości i, co ważniejsze, że przez przyjęcie takiego postulatu i uzyskane dzięki temu sprecyzowanie założeń można uzyskać wyniki, które w naiwnej lub aksjomatycznej teorii mnogości są prawdopodobnie nieosiągalne.

Nie było dotychczas prób przyjęcia teorii Gödla za definitywną podstawę dla teorii mnogości. Sam Gödel wypowiedział się zdecydowanie przeciwko takiemu pomysłowi [11]. Nie widać jednak powodu, dlaczego zwolennicy aksjomatycznej teorii mnogości nie mieliby włączyć postulatu konstruowalności (orzekającego, że każdy zbiór jest konstruowalny) jako jednego z naczelnych postulatów teorii do zazwyczaj przyjmowanych aksjomatów.

Narzucający się problem niezależności postulatu konstruowalności od innych aksjomatów systemu, np. Zermelo, nie jest dotychczas rozwiązany.

Może następująca metoda mogłaby doprowadzić do rozwiązania tego zagadnienia:

Niech $O_\xi(x)$ oznacza klasę zbiorów powstających przez co najwyżej $\xi$-krotne iterowanie operacji elementarnych do zbioru $x$. Dowodzi się nietrudno, że *dla każdego zbioru $x$ zawartego w zbiorze $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$, gdzie $A_0$ jest zbiorem pustym a $A_{k+1} = A_k + \{A_k\}$, istnieje taka liczba porządkowa $\xi < \Omega$, że w klasie $O_\xi(x)$ są spełnione wszystkie aksjomaty teorii mnogości.* Najmniejszą z tych liczb oznaczamy $\xi(x)$.

Oznaczmy jeszcze przez $\eta(x)$ najmniejszą liczbę porządkową $\xi$ taką, że $x \in O_\eta(A_0)$. Gdyby udało się wykazać istnienie takiego $x$, że $\xi(x) < \eta(x)$, to zagadnienie niezależności pewnika konstruowalności byłoby rozwiązane.

Inne teorie zmierzające do ugruntowania podstaw matematyki poprzez konstruowanie pojęć matematycznych (w odróżnieniu od określania ich przez aksjomaty) nie mają tak wielkiego zasięgu jak teoria Gödla i związane są przy tym z częściowym wyrzeczeniem się bardziej zaawansowanych partii klasycznej analizy lub teorii mnogości. Nie mogę tu oczywiście referować wszystkich tych teorii i ograniczę się do najważniejszych.

**A2b. Rozgałęziona teoria typów.** Teoria ta — jak wspomniałem — zakłada istnienie tylko takich zbiorów, które otrzymuje się z pewnych zbiorów wyjściowych przez iterowanie skończoną ilość razy operacji elementarnych. Za zbiór wyjściowy można przyjąć np. zbiór liczb naturalnych.

Teoria ta była ostatnio przedmiotem interesujących prac Fitcha [6] i Lorenzena [40], którzy uzyskali dowód niesprzeczności tej teorii za pomocą środków dających się sformalizować w dość słabym systemie arytmetyki. Wskazuje to na głęboką różnicę między systemem rozgałęzionej teorii typów a innymi sposobami ugruntowania teorii mnogości (aksjomatycznym systemem Zermelo lub prostą teorią typów). Wynik ten dowodzi też, że arytmetyka dająca się zbudować w rozgałęzionej teorii typów jest bez porównania słabsza od arytmetyki klasycznej. Dokładnej dyskusji tego, jak wyglądałaby matematyka oparta na rozgałęzionej teorii typów, o ile mi wiadomo, dotychczas nie przeprowadzono.

**A2c. Analiza obliczalna.** Jeszcze w 1937 roku Banach i Mazur[22]) rozpoczęli badania nad fragmentem analizy dopuszczającym tylko liczby, których rozwinięcie na ułamek dziesiętny jest przedstawione przez funkcje pierwotnie rekurencyjne. Badania te są obecnie kontynuowane przez Mazura, który zastąpił klasę funkcji pierwotnie rekurencyjnych przez naturalniejszą klasę funkcji ogólnie rekurencyjnych.

W teorii tej liczby postaci $\sum f(n)/10^n$, gdzie $f$ jest funkcją ogólnie rekurencyjną, nazywa się *obliczalnymi*. Ciągi liczb rzeczywistych spełniające nierówność

$$\left| a_k - \frac{f(n,k)}{n+1} \right| < \frac{1}{n+1},$$

gdzie $f$ jest funkcją ogólnie rekurencyjną dwu zmiennych, nazywają się ciągami *obliczalnymi*. Wreszcie funkcję zmiennej rzeczywistej, która przeprowadza każdy ciąg obliczalny w ciąg obliczalny, nazywa się *obliczalną*.

Przeprowadzone dotychczas badania nad fragmentem analizy, w którym dopuszcza się tylko liczby, ciągi i funkcje obliczalne, doprowadziły między innymi do wniosku, że funkcje nieciągłe nie są obliczalne. Toteż teoria ta rozpatrywać może tylko te działy analizy, które zajmują się wyłącznie funkcjami ciągłymi. Nie udało się dotychczas zbadać, czy cała klasyczna teoria funkcji ciągłych daje się uzyskać w analizie obliczalnej, nie wiadomo bowiem, czy funkcja obliczalna określona w obliczalnym

[22]) Zob. Annales de la Soc. Pol. de Math. 16 (1937), str. 223.

przedziale zamkniętym przyjmuje maksimum swych wartości w punkcie obliczalnym. Mazur stwierdził natomiast, że liczne twierdzenia teorii funkcji ciągłych dają się przenieść do analizy obliczalnej. Np. stwierdził on, że funkcja obliczalna, przyjmująca w punkcie obliczalnym $a$ wartość ujemną, a w punkcie obliczalnym $b>a$ wartość dodatnią, przyjmuje wartość 0 w punkcie obliczalnym $c$ $(a<c<d)$. Mazur udowodnił też, że zbiór liczb obliczalnych jest ciałem zamkniętym w sensie rzeczywistym (terminu tego używam za odpowiednik niemieckiego terminu *reell-abgeschlossen*)[23].

Definicja Banacha-Mazura funkcji obliczalnej zmiennej rzeczywistej, podobnie jak inna definicja sformułowana dla podobnych celów przez Speckera [86], jest bardzo ogólna, ale nie konsekwentna. Przy sformułowaniu tej definicji zakładamy jako znane z analizy klasycznej ogólne pojęcie funkcyj i wyodrębniamy z nich węższą klasę funkcyj obliczalnych. Tendencjom analizy obliczalnej odpowiadałby inny sposób postępowania: Należy klasę funkcji obliczalnych określić za pomocą pewnych operacji wykonanych na prostych funkcjach wyjściowych.

Definicję czyniącą zadość tym wymaganiom podał Grzegorczyk[24], posługując się pojęciem *funkcjonału*, tj. funkcji, która przyporządkowuje wartości liczbowe każdemu układowi argumentów, złożonemu nie tylko z liczb, ale i z funkcji.

Grzegorczyk nazywa funkcjonał $\Phi(f_1,f_2,\ldots,f_k,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *obliczalnym*, jeśli powstaje on z funkcjonałów wyjściowych

$$U_1(f,g,x)=f(x),\qquad U_2(f,g,x)=g(x),$$

$$S(f,x)=x+1,\qquad M(f,x,y)=x-y,\qquad P(f,x,y)=x^y$$

przez skończoną liczbę następujących operacji: podstawianie funkcjonału zamiast zmiennej liczbowej, utożsamianie zmiennych, minimum efektywne. Ostatnia z tych operacji prowadzi od funkcjonału $\Phi(f_1,f_2,\ldots,f_k, x_1,x_2,\ldots,x_n)$ do funkcjonału

$$\Psi(f_1,f_2,\ldots,f_k,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=\min_{x_n}[\Phi(f_1,f_2,\ldots,f_k,x_1,x_2,\ldots,x_n)=0]$$

przy założeniu, że dla dowolnych liczb $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ i dowolnych funkcji $f_1,f_2,\ldots,f_k$ istnieje takie $x_n$, że $\Phi(f_1,f_2,\ldots,f_k,x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$.

Jeśli to założenie nie jest spełnione, to operacja minimum nie jest wykonalna.

Funkcję rzeczywistą $\varphi(x)$ określoną w przedziale $(a,b)$, gdzie $0<a<b$, Grzegorczyk nazywa *obliczalną*, jeśli istnieje taki funkcjonał obliczalny

[23]) Dowody tych twierdzeń nie są jeszcze opublikowane.

[24]) Praca ta nie jest jeszcze opublikowana.

$\Phi(f,n)$, że dla każdego $x$ $(a<x<b)$ i każdej funkcji $f$ o wartościach naturalnych, spełniającej warunek

$$\left|x-\frac{f(n)}{n}\right|<\frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots,$$

spełniona jest nierówność

$$\left|\varphi(x)-\frac{\Phi(f,n)}{n}\right|<\frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots$$

Inaczej mówiąc: funkcjonał $\Phi$ przekształca funkcję $f(n)/n$ aproksymującą argument $x$ w funkcję $\Phi(f,n)/n$ aproksymującą w tym samym stopniu wartość $\varphi(x)$.

Związki tej definicji z definicją Banacha i Mazura nie są dotychczas wyjaśnione. Wiadomo tylko, że funkcja obliczalna w sensie Grzegorczyka jest obliczalna w sensie Banacha i Mazura, a więc jest ciągła.

Opierając się na pewnych wynikach Mazura, Grzegorczyk wykazał, że funkcja obliczalna w jego sensie, określona w przedziale $(a,b)$ o końcach obliczalnych, przyjmuje maksimum swych wartości w punkcie obliczalnym przedziału $(a,b)$.

Należy tu wspomnieć, że pojęcie funkcjonału obliczalnego występuje *implicite* u Kleene'go [33] jako pojęcie funkcji jednostajnie rekurencyjnej względem innych funkcji. Związki tej definicji i definicji Grzegorczyka nie były dotychczas badane.

Zastępując w definicjach przyjętych przez Banacha i Mazura klasę funkcji obliczalnych przez inne szersze klasy, dochodzi się do dalszych koncepcji analizy obliczalnej. Prace w tym kierunku przeprowadził Grzegorczyk[25]), który wyszedł z klasy funkcji elementarnie definiowalnych, to jest takich, które otrzymać można z funkcji rekurencyjnych przez stosowanie wielokrotne operacji podstawiania i operacji minimum:

$$(\mu y)[f(x,y)=0]=\begin{cases}\text{najmniejsze } y \text{ takie, że } f(x,y)=0,\\ 0, \text{ o ile takie } y \text{ nie istnieje.}\end{cases}$$

Zagadnienia, dotyczące funkcji ciągłych, które w analizie obliczalnej wydają się bardzo trudne, rozwiązuje się w sposób łatwy i naturalny w analizie opartej na pojęciu funkcji definiowalnej. Nie zbadano jednak dotychczas dokładnie, w czym analiza definiowalna odbiega od klasycznej.

**A2d. Logika intuicjonistyczna.** Systemy matematyczno-logiczne rozwijane od wielu lat przez Brouwera zmierzają do ugruntowania mate-

[25]) Praca Grzegorczyka nie jest dotychczas opublikowana.

matyki na podstawach konstruktywnych. W odróżnieniu od omówionych dotychczas kierunków, przedstawiciele szkoły intuicjonistycznej przywiązują wielką wagę do tego, by stałym logicznym: *lub*, *jeśli to*, *istnieje* i niektórym innym, przypisać inne znaczenie niż to, które się im przypisuje zazwyczaj. Np. zdanie *p lub q* interpretuje się jako: *albo można wykazać prawdziwość p, albo też można wykazać prawdziwość q.*

Sama zmiana interpretacji stałych logicznych występujących w rachunku zdań, cokolwiek bądź sądziłoby się o jej niezbędności, nie jest bezpośrednio związana z programem konstruktywnym. Zmiana interpretacji kwantyfikatora szczegółowego jest oczywiście bliżej związana z poglądami konstruktywnymi, nie jest jednak koniecznym warunkiem wcielania tego poglądu w życie.

Rzeczywiste konstruktywne tendencje kierunku intuicjonistycznego ujawniają się w przyjmowaniu zupełnie innego niż klasyczne pojęcia ciągu i zbioru. Niestety, odnośne definicje były sformułowane przez Brouwera w sposób bardzo trudny i nie precyzyjny, nie odegrały więc one dotychczas większej roli poza kołem ścisłych współpracowników Brouwera. Wyjaśnienie tych definicji przyniosą zapewne nowe prace Kleene'go [34], który interpretuje koncepcje intuicjonistów za pomocą pojęć zaczerpniętych z teorii funkcji rekurencyjnych.

**A2e. Ogólna ocena.** Kierunek konstruktywny odegrać może poważną rolę w uściśleniu podstaw takich działów matematyki, których związek z doświadczeniem jest luźny (np. teoria mnogości). Decydującą rolę przy ocenianiu wyników matematyki konstruktywnej grać powinno to, czy skonstruowane przez nią systemy są łatwe w zastosowaniach i czy prowadzą w naturalny sposób do podstawowych wyników klasycznych, które — jako całość — są potwierdzone przez stosowalność do zagadnień praktycznych. Dotychczasowe próby stworzenia takiego systemu zawiodły, wydaje się jednak słuszne nie zarzucać tych prób.

Ponadto wspomniane poprzednio zagadnienie niezależności pewnika konstruowalności i związane z nim zagadnienie niezależności pewnika wyboru i hipotezy continuum od pewników teorii mnogości, należy uznać za najaktualniejsze zagadnienia otwarte tego działu.

### B1. Aksjomatyzacja logiki

Przechodzę obecnie do drugiego fundamentalnego zagadnienia podstaw matematyki, a mianowicie do zagadnienia kryteriów pozwalających odróżniać poprawne dowody od błędnych.

W zwykłym aksjomatycznym wykładzie tego lub innego działu matematyki formułuje się zazwyczaj tylko aksjomaty, wyprowadzanie zaś wniosków z tych aksjomatów powierza się intuicji matematycznej czytelnika lub słuchacza. Jest to oczywiście na miejscu w pracy matematyka nie interesującego się podstawami, dla logika natomiast właśnie sam proces wyprowadzania twierdzeń jest najciekawszym momentem całych rozważań.

Analiza konkretnych dowodów matematycznych doprowadziła, jak wiadomo, do sformułowania szeregu reguł dowodzenia, które pozwalają otrzymywać z jednych twierdzeń dalsze twierdzenia (tzw. aksjomaty logiczne zaliczam tu do reguł dowodzenia). Analizę tę ukoronowało uzyskane przez Gödla w 1931 roku twierdzenie o zupełności [9], wykazujące, że dla każdego wyrażenia elementarnego $W$, nie wynikającego z elementarnych aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ przez zastosowanie reguł dowodzenia, można skonstruować model, w którym spełnione są aksjomaty $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a nie jest spełnione wyrażenie $W$.

Doniosłość tego wyniku można objaśnić w następujący sposób.

Jest jasne, że wyrażenie powstające z aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ przez kolejne stosowanie reguł dowodzenia jest poprawnie wyprowadzonym wnioskiem z tych aksjomatów. Każda bowiem reguła wnioskowania przedstawia bardzo proste i oczywiste poprawne rozumowanie.

Jeśli istnieje model spełniający aksjomaty $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a nie spełniający wyrażenia $W$, to oczywiście $W$ nie może być traktowane jako konsekwencja aksjomatów. Zgodnie więc z twierdzeniem o zupełności konsekwencjami aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są te i tylko te wyrażenia, które dają się uzyskać z $A_1, A_2, \ldots, A_n$ przez stosowanie reguł dowodzenia.

Pojęcie wynikania jednego zdania elementarnego z innych zdań elementarnych jest w ten sposób całkowicie wyjaśnione.

Charakteryzacja stosunku wynikania pomiędzy zdaniami nieelementarnymi nasuwa nowe zagadnienia.

Jeżeli będziemy stali na stanowisku, że teorię mnogości, leżącą u podstawy systemu nieelementarnego, można przedstawić w formie systemu aksjomatycznego, to — jak wspomniałem w A1a — znika różnica między systemami elementarnymi a nieelementarnymi i stosunek wynikania między dowolnymi zdaniami jest sprowadzony bez reszty do reguł dowodzenia. Jeśli jednak zajmujemy inne stanowisko wobec podstaw teorii mnogości, to nie możemy już przypisywać tak podstawowego znaczenia twierdzeniu o zupełności.

Większość matematyków, operujących wyrażeniami nieelementarnymi, stroni od analizowania podstaw teorii mnogości. Z natury rzeczy pojęcie wynikania między zdaniami nieelementarnymi jest dla tych matematyków niesprecyzowane i sprecyzować się nie da, dopóki matematycy ci nie zrezygnują z zajmowania „naiwnego" stanowiska w teorii mnogości.

Istnieją natomiast większe możliwości scharakteryzowania stosunku wynikania między zdaniami nieelementarnymi, jeśli przyjmiemy stanowisko konstruktywne wobec teorii mnogości. Suszko zwrócił uwagę na to, że tak postawione zagadnienie twierdzenia o zupełności dla zdań nieelementarnych prowadzi do zupełnie konkretnej problematyki, którą nikt dotychczas się nie zajmował.

Twierdzenie o zupełności wywarło silny wpływ na nasze poglądy na tzw. sformalizowane systemy logiczne i matematyczne. Wydaje się nam, że systemy te mają już tylko znaczenie historyczne.

W latach dwudziestych, pod wpływem prac Hilberta i poglądów filozoficznych szkoły neopozytywistycznej, wyobrażano sobie budowę podstaw matematyki tak, że tworzyć się będzie sztuczne „języki" o ściśle sprecyzowanych regułach syntaktycznych i że wśród nich znajdzie się jeden uniwersalny najlepszy język, który można będzie utożsamić z matematyką.

Niektóre ze skonstruowanych pod wpływem tych poglądów systemy mogą z łatwością być przeformułowane tak, aby stały się zwykłymi elementarnymi systemami aksjomatycznymi. Należą tu np. prosta teoria typów, system tzw. ontologii, zbudowany przez Leśniewskiego[26]), rozgałęziona teoria typów. Wobec tego nie widać właściwie, jaki miałby być cel opracowywania dla tych systemów odrębnych reguł wnioskowania, ściśle związanych z przyjętymi w nich regułami syntaktycznymi, skoro można od razu przedstawić te systemy w postaci elementarnych układów aksjomatycznych, dla których pojęcie wynikania jest opracowane z całkowitą precyzją.

Nie wiem, czy każdy z zaproponowanych dotychczas systemów sformalizowanych daje się sformułować równoważnie w postaci systemu aksjomatycznego. Wydaje mi się w każdym razie, że gdyby system taki istniał, to z uprawiania jego nie odniesiono by żadnej korzyści, choćby nawet jego reguły „syntaktyczne" sformułowano z najdalej idącą precyzją. System, który nie miałby interpretacji (modelu) w zwykłym znaczeniu tego słowa, nie mógłby być zrozumiany jako opis klasy przedmiotów istniejących niezależnie od konstrukcji lingwistycznych. Mógłby on odgrywać pewną rolę, np. jako formalny rachunek ułatwiający opis funkcji rekurencyjnych. Rola takiego systemu mogłaby jednak być tylko pomocnicza.

Wspominam o tym tak obszernie, aby podkreślić, że próbę ugruntowania podstaw matematyki poprzez konstrukcję „języka" pozbawionego wszelkiej interpretacji (lub takiego, którego interpretację uzyskuje

[26]) System ten referuje dokładnie J. Słupecki w pracy złożonej do druku w czasopiśmie Studia Logica 3.

się dopiero w trakcie korzystania z owego „języka") uznajemy obecnie za całkowicie chybione.

Podstawowa rola twierdzenia o zupełności jest, jak się zdaje, należycie oceniona. Świadczy o tym znaczna ilość prac, jakie ostatnio poświęcono nowym, uproszczonym dowodom tego twierdzenia (Henkin [19], Rieger [73], Rasiowa i Sikorski [71], Robinson [74]). Prace te wykazały m. i., że twierdzenie o zupełności ma bardzo wyraźną treść algebraiczną, która w oryginalnym dowodzie Gödla zupełnie nie była widoczna. Naszkicuję poniżej dowód Rasiowej i Sikorskiego, zwracając główną uwagę na aparat algebraiczny użyty w ich rozumowaniu.

Załóżmy, że wyrażenie $W$ nie wynika z aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ przez stosowanie reguł dowodzenia. Dla uproszczenia założę ponadto, że zarówno aksjomaty $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jak i wyrażenie $W$ zawierają tylko jedną stałą pozalogiczną, np. symbol relacji dwuczłonowej $R$.

Rozpatrujemy algebrę Boole'a utworzoną ze wszystkich wyrażeń zawierających $R$ jako jedyną stałą pozalogiczną (nie wyłączamy przy tym wyrażeń zawierających zmienne wolne). W algebrze tej sumę dwu wyrażeń $A$ i $B$ określamy jako ich alternatywę, iloczyn — jako ich koniunkcję, a uzupełnienie wyrażenia $A$ jako negację $A$. Dwa wyrażenia $A$ i $B$ nazywamy równymi, jeśli wyrażenie $A \equiv B$ daje się uzyskać bez żadnych aksjomatów wyłącznie przez użycie reguł dowodzenia.

Weźmy teraz jakąś konkretną relację dwuczłonową $R_0$ o polu przeliczalnym, np. składającym się z liczb naturalnych. Dowolne wyrażenie $A(R; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ należące do opisanej poprzednio algebry Boole'a wyraża pewną własność relacji $R$ i elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, którą relacja $R_0$ i dowolnie wybrane liczby naturalne $k_1, k_2, \ldots, k_n$ mogą mieć albo nie. Przyporządkujmy każdej zmiennej liczbę naturalną, np. zmiennej $x_j$ liczbę $j$. Jeśli $R_0$ i liczby $1, 2, \ldots, n$ mają własność $A(R; x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to mówimy, że $R_0$ spełnia wyrażenie $A(R; x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w przeciwnym zaś razie, że $R_0$ nie spełnia tego wyrażenia.

Zbiór $I$ wyrażeń spełnionych przez relację $R_0$ jest ideałem pierwszym w algebrze Boole'a złożonej z wyrażeń. Znaczy to, że spełnione są następujące warunki:

(a) *Jeśli $A$ i $B$ należą do $I$, to $A \cdot B$ należy do $I$.*

(b) *Jeśli $A$ należy do $I$, to $A + B$ należy do $I$ dla dowolnego $B$.*

(c) *Jeśli $A + B$ należy do $I$, to albo $A$, albo $B$ należy do $I$.*

Warunek (a) wynika stąd, że jeśli relacja $R_0$ spełnia wyrażenia $A$ i $B$, to spełnia też ich koniunkcję, (b) stąd, że jeśli relacja $R_0$ spełnia wyrażenie $A$, to spełnia też alternatywę $A + B$ dla dowolnego $B$, wreszcie (c) stąd, że jeśli $R_0$ spełnia alternatywę $A + B$, to $R_0$ spełnia jedno z wyrażeń $A$ lub $B$.

W podobny sposób sprawdzamy, że ideał $I$ ma własność

(d) *Jeśli wyrażenie* $(\exists x_k)$ $A(R; x_1, \ldots, x_k)$ *należy do ideału* $I$, *to istnieje taka liczba naturalna* $p$, *że* $A(R; x_1, \ldots, x_{k-1}, x_p)$ *należy do* $I$.

Każda relacja $R_0$ wyznacza więc ideał pierwszy $I$ o własności (d). Na odwrót, dowodzi się z łatwością, że każdy ideał pierwszy $I$ o własności (d) wyznacza relację $R_0$ spełniającą wszystkie wyrażenia należące do $I$. Wystarczy mianowicie przyjąć, że $k$ pozostaje w relacji $R_0$ do $l$ wtedy, gdy wyrażenie $x_k R x_l$ należy do $I$.

Aby skonstruować relację spełniającą wyrażenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ i nie spełniającą wyrażenia $W$, wystarczy zatem wykazać, że istnieje ideał pierwszy $I$ spełniający warunek (d) i zawierający wyrażenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $\sim W$. W tym celu stwierdzamy najpierw, że ideał główny o elemencie tworzącym $A_1 A_2 \ldots A_k (\sim W)$ nie zawiera wszystkich elementów algebry (w przeciwnym bowiem razie istniałyby takie wyrażenia $X$, $Y$, że

$$A_1 A_2 \ldots A_k \cdot (\sim W) + X = Y \cdot (\sim Y),$$

a więc $W$ można by było otrzymywać z $A_1, A_2, \ldots, A_k$ przez zastosowanie reguł dowodzenia). Następnie zaś opieramy się na twierdzeniu orzekającym, że każdy ideał nie zawierający wszystkich elementów algebry daje się rozszerzyć do ideału pierwszego spełniającego warunek (d). Dowodu tego twierdzenia podawać tutaj nie będę.

Jak widać z powyższego szkicu, w dowodzie twierdzenia o zupełności stosuje się w istotny sposób aparaturę pojęciową algebry. Jest ciekawe, że pojęcie ideału stworzone dla potrzeb algebraicznej teorii liczb znajduje nieoczekiwane zastosowanie w logice formalnej.

Algebraiczna metoda dowodu twierdzenia Gödla jest nie tylko metodycznie interesująca, ale ma nadto tę zaletę, że może być przeniesiona do systemów logiki różnych od klasycznego systemu dwuwartościowego.

Logiki nieklasyczne budzą od dawna duże zainteresowanie, w większym zresztą stopniu niż wśród matematyków u przedstawicieli filozofii, którzy nie bez racji widzą w tych systemach logicznych świadectwo nieapriorycznego charakteru logiki formalnej. Ostateczna ocena doniosłości tych logik nastąpić będzie mogła dopiero wtedy, gdy uda się zbudować na ich podstawie systemy matematyczne, np. fragmenty teorii mnogości. Pierwszym krokiem do osiągnięcia tego celu jest zbadanie logiki kwantyfikatorów. Zagadnienie to zbadali w szeregu prac Rasiowa oraz Sikorski[27]). Wykazali oni, że jeśli odpowiednio rozszerzyć pojęcie modelu, to podstawowe twierdzenia logiczne (twierdzenie Gödla o zupeł-

[27]) Rasiowa [72]. Por. też [71].

ności, twierdzenie Skolema i Löwenheima) dają się przenieść do systemów opartych na logikach nieklasycznych.

Uogólnione pojęcie modelu objaśnimy na przykładzie. Załóżmy dla prostoty, że rozpatrujemy układ aksjomatów $A$, w którym jedyną stałą pozalogiczną jest relacja dwuczłonowa $R$. Model w zwykłym sensie określamy jako zbiór $I$ i funkcję, która każdej parze $\langle x,y\rangle$ elementów $I$ przyporządkowuje jedną z wartości 0, 1 (fałsz, prawda). Model uogólniony określamy jako zbiór $I$ i funkcję, która każdej parze $\langle x,y\rangle$ elementów $I$ przyporządkowuje dowolny element algebry $B$. O algebrze $B$ zakładamy przy tym, że są w niej określone operacje, za pomocą których interpretujemy operacje logiczne (alternatywa, koniunkcja, implikacja, negacja, kwantyfikatory).

Jeśli np. rozpatrujemy system oparty na rachunku zdań Heytinga [20], to za $B$ obieramy rodzinę podzbiorów zamkniętych dowolnej przestrzeni topologicznej $X$, a operacje logiczne interpretujemy w następujący sposób[28]):

alternatywa — suma mnogościowa,
koniunkcja — iloczyn mnogościowy,
negacja — domknięcie uzupełnienia,
implikacja — domknięcie różnicy,
kwantyfikator ogólny — iloczyn nieskończony,
kwantyfikator egzystencjalny — domknięcie sumy nieskończonej.

Każde wyrażenie (bez zmiennych wolnych) ma w dowolnym modelu wartość, która jest elementem algebry $B$. Jeśli wyróżnimy w algebrze $B$ dowolny element (np. w powyższym przykładzie całą przestrzeń $X$), to możemy określić pojęcie spełniania: wyrażenie jest *spełnione* w modelu, jeśli jego wartość jest wyróżnionym elementem algebry.

Operując tym pojęciem możemy przenieść do teorii systemów aksjomatycznych opartych na logikach nieklasycznych różne pojęcie i twierdzenia znane z teorii zwykłych systemów. Tak np. twierdzenie Gödla o zupełności dla systemów opartych na logice Heytinga brzmi jak następuje[27]):

*Istnieje taka przestrzeń topologiczna $X_0$, że jeśli wyrażenie $W$ nie wynika z aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ za pomocą reguł dowodzenia przyjętych w logice Heytinga, to istnieje model uogólniony, w którym za $B$ przyjmujemy algebrę zamkniętych podzbiorów przestrzeni $X_0$ i w którym spełnione są aksjomaty $A_1, A_2, \ldots, A_k$, a nie jest spełnione wyrażenie $W$.*

Pytanie, czy za $X_0$ w powyższym twierdzeniu można przyjąć linię prostą (ze zwykłą topologią) pozostaje otwarte.

[28]) Tarski [95].

Trudno przewidywać w tej chwili, czy logiki wielowartościowe znajdą zastosowania. W każdym razie stanowią one interesujący temat badań, a uzyskane wyniki pozwalają uwydatnić specyficzne cechy logiki zwykłej, dwuwartościowej. Dlatego też kontynuacja tych badań jest bez wątpienia celowa.

### B2. Problemy rozstrzygalności

Dzięki wynikom omówionym w B1 pojęcie twierdzenia matematycznego, dającego się udowodnić z danego układu aksjomatów elementarnych, zostało ściśle określone. Dało to możność precyzyjnego wysłowienia problemu rozstrzygalności.

W chwili obecnej formułujemy najłatwiej ten problem za pomocą pojęć zaczerpniętych z teorii funkcji rekurencyjnych. Jeśli odwzorujemy w sposób wzajemnie jednoznaczny wyrażenia na liczby naturalne, to każdy zbiór wyrażeń przejdzie na zbiór liczb naturalnych. Zbiór twierdzeń teorii elementarnej, skończenie aksjomatyzowalnej (lub opartej na rekurencyjnie przeliczalnym układzie aksjomatów) jest zbiorem *rekurencyjnie przeliczalnym*.

Teoria jest *rozstrzygalna*, jeśli zbiór ten jest ogólnie rekurencyjny. Teza utożsamiająca pojęcie rozstrzygalności i ogólnej rekurencyjności pochodzi od Churcha. Jest ona przyjmowana obecnie chyba bez wyjątku przez wszystkich matematyków pracujących nad zagadnieniami rozstrzygalności.

Problem rozstrzygalności w odniesieniu do dowolnej teorii aksjomatycznej polega na zbadaniu, czy zbiór twierdzeń tej teorii jest rekurencyjny, czy też rekurencyjnie przeliczalny. Zagadnienie to daje się sformułować również w stosunku do innych zbiorów liczb i w tej uogólnionej formie obejmuje np. znane zagadnienie słów teorii grup.

Zamiast funkcji rekurencyjnych można by do ścisłego sformułowania zagadnienia rozstrzygalności używać też algorytmów w sensie określonym przez Markowa [47]. W tym celu należy wyrażenia teorii traktować jako słowa w pewnym alfabecie. Teorię nazywamy *rozstrzygalną*, jeśli istnieje normalny algorytm stosowalny do wszystkich tych słów i przeprowadzający twierdzenia teorii w słowo puste, a wyrażenia — nie będące twierdzeniami teorii — w słowo niepuste.

Nad zagadnieniem rozstrzygalności pracowano bardzo intensywnie od chwili powstania logiki matematycznej. Początkowo ograniczano się do badania rekurencyjnie przeliczalnego zbioru wszystkich twierdzeń logicznych i wyróżniano w nim pewne rekurencyjne podzbiory, np. klasę twierdzeń logicznych zapisanych za pomocą funktorów jednoargumentowych. Inna klasa zagadnień dotyczyła redukcji problemu rozstrzygalności: wykazywano, że problem miałby rozwiązanie pozytywne, gdyby pewna węższa klasa wyrażeń (np. klasa tez logicznych kształtu $(\mathfrak{A} x_1 x_2 \ldots x_n)(y_1 y_2 \ldots y_m) A)$ była rekurencyjna. Używając nowej terminologii wprowadzonej przez Posta [68] możemy scharakteryzować tę klasę zagadnień jako problem redukcji jednoznacznej zagadnienia rozstrzygalności dla zbioru wszystkich twierdzeń do problemu rozstrzygalności dla zbioru twierdzeń specjalnego kształtu. Ten typ zagadnień jest dotychczas opracowywany przez niektórych logików, np. Kalmára [29] i [28], Surányiego [88] i innych.

Bardzo liczne są wyniki, dotyczące problemu rozstrzygalności poszczególnych teorii zaksjomatyzowanych. Wymienię tu przykładowo wyniki Tarskiego [97], wykazujące rozstrzygalność elementarnej arytmetyki liczb rzeczywistych, Jaśkowskiego [25], dotyczące rozstrzygalności algebry Boole'a, Szmielew [89], dotyczące rozstrzygalności teorii grup przemiennych. Niektóre z tych wyników mają zastosowania do zagadnień czysto matematycznych. Np. z wyników uzyskanych przez Tarskiego [97] można wyprowadzić wniosek, że każde twierdzenie wyrażone za pomocą operacji logicznych i stałych $+$, $\cdot$ i $>$, obowiązujące w arytmetyce liczb rzeczywistych, obowiązuje też w każdym ciele uporządkowanym zamkniętym w sensie rzeczywistym.

Specjalnie ważne są dowody nierozstrzygalności. Mają one znaczenie dla filozoficznych dyskusji o matematyce, gdyż wykazują jej istotnie twórczy charakter. Podstawą do tych dowodów jest słynne twierdzenie Gödla [8] o niezupełności arytmetyki. Dowody nierozstrzygalności teorii uzyskuje się na ogół przez sprowadzenie zagadnienia rozstrzygalności arytmetyki do zagadnienia rozstrzygalności rozważanej teorii.

Przykładem zastosowania tej metody, jest wynik uzyskany przez J. Robinson [75]. Wykazała ona, że w elementarnej arytmetyce liczb wymiernych (z pojęciami pierwotnymi *suma* i *iloczyn*) można zdefiniować pojęcie liczby naturalnej; elementarna arytmetyka liczb wymiernych jest więc nierozstrzygalna (podczas gdy elementarne arytmetyki liczb rzeczywistych lub zespolonych są rozstrzygalne). Inne podobne wyniki uzyskał tą samą metodą R. M. Robinson [77].

Zakres stosowalności tej metody został znacznie rozszerzony z chwilą odkrycia, że już bardzo słabe fragmenty arytmetyki są nierozstrzygalne a nawet *istotnie nierozstrzygalne* (tj. nie mogą być uzupełnione przez dodanie rekurencyjnego zbioru aksjomatów do teorii niesprzecznej i rozstrzygalnej). Przykładem bardzo słabego a już istotnie nierozstrzygalnego fragmentu arytmetyki jest teoria pierścieni uporządkowanych w sposób izolowany[29]). Inne, jeszcze prostsze przykłady istotnie nierozstrzygal-

[29]) Mostowski i Tarski [57].

nych fragmentów arytmetyki podał R. M. Robinson [78], nie mają one jednak tak wyraźnej treści algebraicznej.

Z określenia teorii istotnie nierozstrzygalnych wynika, że *teoria T* (oparta na skończonym lub rekurencyjnym układzie aksjomatów elementarnych) *jest istotnie nierozstrzygalna, jeśli można w niej zinterpretować jakąkolwiek teorię istotnie nierozstrzygalną. Teoria powstająca z teorii nierozstrzygalnej przez opuszczenie skończonej liczby aksjomatów jest też nierozstrzygalna.* Mimo swej oczywistości twierdzenia te pozwalają uzasadnić nierozstrzygalność wielu teorii aksjomatycznych.

Znacznie głębszy wynik idący w podobnym kierunku, uzyskał niedawno Tarski [98]. Wykazał on, że *teoria T jest na pewno nierozstrzygalna, jeśli można ją tak wzmocnić (przez dodanie dowolnej skończonej lub nieskończonej ilości nowych aksjomatów oraz skończonej liczby stałych oznaczających indywidua najniższego typu), że w rozszerzonej teorii daje się zinterpretować teoria istotnie nierozstrzygalna i skończenie aksjomatyzowalna.*

Opierając się na tym twierdzeniu Tarski wykazał nierozstrzygalność wielu teorii, np. elementarnej teorii grup, elementarnej teorii struktur itp. [30]). Tę samą metodę zastosował Grzegorczyk do ustalenia nierozstrzygalności algebry domknięć i pokrewnych teorii [31]). Wspomnę jeszcze o interesującym wyniku Janiczaka [22] uzyskanym tą samą metodą. Wykazał on, że teoria o dwu stałych pozalogicznych $R_1$, $R_2$ oznaczających relacje dwuczłonowe i o aksjomatach orzekających, że relacje $R_1$ i $R_2$ są zwrotne, symetryczne i przechodnie, jest nierozstrzygalna.

Zagadnienia rozstrzygalności zachowują znaczenie nie tylko dla systemów opartych na układach aksjomatów, ale dla wielu innych teorii. Np. dla każdego systemu rachunku zdań można sformułować problem rozstrzygalności. Ciekawe wyniki dotyczące niektórych systemów rachunku zdań uzyskali ostatnio Pilczak [67] i Worobjew [107] i [108]. Znacznie donioślejsze są wyniki, dotyczące problemu słów dla grup i innych systemów algebraicznych. W tej dziedzinie podstawowe znaczenie mają prace Posta [69], na podstawie których Markow [48] i Post [70] rozwiązali problem słów dla półgrup, a Nowikow [66] rozwiązał słynny problem słów dla grup, który opierał się wysiłkom matematyków przez z górą 30 lat.

Próby rozwiązania X-tego problemu Hilberta nie zostały dotychczas uwieńczone powodzeniem [32]).

---

[30]) Tarski [97] i [98].

[31]) Grzegorczyk [14]. Niektóre z wyników Grzegorczyka uzyskał już przedtem na innej drodze Jaśkowski [26].

[32]) Davis [3].

Tendencją najnowszych prac w teorii rozstrzygalności jest dążność do uzyskania ogólnych metod i wyników. Wspominałem już o ogólnej metodzie Tarskiego [98] dowodzenia niezupełności teorii oraz o wyniku Vaughta [103] wiążącym zupełność z kategorycznością. Dawniej już wykazano, że teoria zupełna jest zawsze rozstrzygalna[33]), oraz, że układ aksjomatów teorii rozstrzygalnej daje się rozszerzyć do rekurencyjnego systemu zupełnego[34]). Prowadzone też są badania, czy rozstrzygalność teorii pewnych algebr pociąga za sobą rozstrzygalność innych algebr uzyskanych za pomocą jednego ze standardowych procesów algebry ogólnej (produkt, homomorfizm)[35]). Stworzona wreszcie została racjonalna podstawa dla badań zmierzających nie wprost do rozwiązania problemu rozstrzygalności, lecz do redukcji tego problemu do innego problemu rozstrzygalności. Podstawowe idee w tym kierunku pochodzą od Posta [68]. Postawione przez niego pytanie o istnieniu najsłabszego problemu rozstrzygalności nie jest dotychczas rozwiązane.

Podział zbiorów wyrażeń na rekurencyjne i rekurencyjnie przeliczalne jest dla wielu zastosowań nie wystarczający. Jeśli np. interesujemy się zbiorem wyrażeń spełnionych w określonym modelu arytmetyki, to stwierdzamy z łatwością, że nie jest on rekurencyjnie przeliczalny, a nawet nie jest definiowalny. Podobnie, rozpatrywany przez Trachtenbrota [100] i Kalmára [29] zbiór wyrażeń prawdziwych w każdym skończonym zbiorze indywiduów, nie jest rekurencyjnie przeliczalny, lecz jest uzupełnieniem takiego zbioru. Właściwą aparaturą do studiowania natury takich zbiorów jest stworzona przez Kleene'go klasyfikacja zbiorów liczb naturalnych w zależności od liczby kwantyfikatorów występujących w definicji rozpatrywanego zbioru (po sprowadzeniu tej definicji do postaci normalnej)[36]).

Klasyfikacja ta wykazuje wiele analogii do klasyfikacji zbiorów rzutowych. Niektóre twierdzenia znane z teorii zbiorów rzutowych przenoszą się bez zmiany do teorii Kleene'go.

Zachodzi np. następujący analogon twierdzenia Suslina: *Zbiór, który sam jest rekurencyjnie przeliczalny i który ma uzupełnienie rekurencyjnie przeliczalne, jest rekurencyjny*[37]). Natomiast obowiązujące w teorii zbiorów rzutowych twierdzenia o oddzielaniu nie przenoszą się do teorii Kleene'go[38]).

---

[33]) Janiczak [24].
[34]) Tarski [98].
[35]) Mostowski [58].
[36]) Kleene [35].
[37]) Twierdzenie to udowodnili Kleene [35] i Post [68].
[38]) Zob. Kleene [36] i Trachtenbrot [101].

Stworzona przez Tarskiego i Kuratowskiego [39] metoda szacowania klasy rzutowej zbiorów przenosi się bez zmiany do teorii Kleene'go. Fakt ten znajduje liczne zastosowania. Wystarczy np. napisać definicję klasy wyrażeń rozpatrywanej przez Trachtenbrota i Kalmára, żeby się przekonać zupełnie automatycznie, że jest ona uzupełnieniem zbioru rekurencyjnie przeliczalnego (co zresztą nie wyklucza tego, że mogłaby ona być rekurencyjna). Podobnie jak w teorii zbiorów rzutowych punkt ciężkości problemu spoczywa zawsze na oszacowaniu klasy z dołu.

Dla każdego zbioru liczb naturalnych można stawiać pytanie: do której z klas określonych przez Kleene'go zbiór ten należy. W wielu przypadkach pytanie to jest trudne i ma znaczenie dla badań logicznych.

Wspomnimy w związku z tym o następującym zagadnieniu postawionym przez Hilberta i Bernaysa [22]:

Rozpatrzmy układ aksjomatów elementarnych o pojęciach pierwotnych oznaczających relacje, np. dwuczłonowe. Model przeliczalny dla takiego układu składa się z relacji dwuczłonowych określonych w zbiorze liczb naturalnych, tj. ze zbiorów par $\{x,y\}$, gdzie $x$ i $y$ są liczbami naturalnymi. Zastępując parę $\{x,y\}$ przez liczbę $2^x(2y-1)$ widzimy, że model traktować możemy jako układ złożony ze skończonej ilości zbiorów liczb naturalnych.

Jeśli wszystkie zbiory modelu należą do $n$-tej klasy w klasyfikacji Kleene'go, to mówimy, że model należy do $n$-tej klasy. Zagadnienie postawione przez Hilberta i Bernaysa brzmi jak następuje: Czy dla niesprzecznego układu aksjomatów można zawsze znaleźć model rekurencyjny (tj. należący do zerowej klasy)?

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna: *Istnieją takie układy aksjomatów, których żaden model nie jest rekurencyjnie przeliczalny ani nie jest uzupełnieniem zbioru rekurencyjnie przeliczalnego* (tj. nie należy ani do pierwszej, ani do drugiej klasy)[39]). Natomiast, jak wykazał Kleene[40]), *można dla każdego układu aksjomatów znaleźć model należący do klasy* 3. Stosując metodę Kuratowskiego i Tarskiego dowodzi się mianowicie, że modelem takim jest model zdefiniowany przez Hilberta i Bernaysa w ich dowodzie twierdzenia o zupełności.

Nie wiadomo dotychczas, czy każdy niesprzeczny układ aksjomatów ma model dający się przedstawić w postaci

$$(A_1-B_1)+(A_2-B_2)+\ldots+(A_n-B_n),$$

gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ są to zbiory rekurencyjnie przeliczalne.

[39]) Kreisel [37], Mostowski [59].
[40]) Kleene [33], str. 394.

Prac nad klasyfikacją Kleene'go nie można uważać za zakończone. Kontynuacji domagają się przede wszystkim badania zmierzające do wyświetlenia analogii i różnic między tą klasyfikacją a klasyfikacją zbiorów rzutowych[41]). Ponadto do wielu zagadnień klasyfikacja ta okazuje się za wąska.

Już rozpatrywanie klasy wyrażeń spełnionych w określonym modelu arytmetyki, wprowadza poza zakres zbiorów objętych klasyfikacją Kleene'go. Rozszerzenie tej klasyfikacji na klasy pozaskończone jest zagadnieniem aktualnym. Wykonano już pewne początkowe prace w tym kierunku[42]), temat domaga się jednak dalszego opracowania.

### Ogólna ocena obecnego stanu zagadnienia rozstrzygalności

Prace nad tym zagadnieniem mają znaczenie dla wytworzenia prawidłowego poglądu na naturę matematyki i zaczynają znajdować zastosowania poza rozważaniami dotyczącymi ściśle podstaw matematyki. Nie jest wykluczone, że doprowadzą one w przyszłości do znalezienia algorytmów, pozwalających mechanicznie rozwiązywać pewne klasy problemów, których dziś rozwiązywać nie umiemy. W chwili obecnej odczuwa się potrzebę syntetycznego ujmowania różnych metod specjalnych i przedyskutowania ich podstaw teoretycznych. Zapoczątkowane w tym kierunku prace przyniosły już pewne wyniki, które można wykorzystać do uzyskania wyników szczegółowych. Wartość takich prac nie musi być specjalnie uzasadniana.

### C. Teoria funkcji rekurencyjnych i kierunek algebraiczny

Na zakończenie referatu pragnę omówić dwa prądy w badaniach podstaw, które — jak mi się wydaje — wpływają w sposób decydujący na bieg badań w tej dziedzinie.

Pierwszy i bardziej zasadniczy z tych prądów, to teoria funkcji rekurencyjnych. Teoria ta w formie bardzo jeszcze niedoskonałej rozwijana była w szkole Hilberta. Ogólna teoria powstała z chwilą wprowadzenia pojęcia funkcji ogólnie rekurencyjnej. Na powstanie i rozwój tej teorii miała istotny wpływ okoliczność, że zaksjomatyzowane systemy arytmetyki podawano w postaci sformalizowanej (por. np. definicję funkcji rekurencyjnych podaną przez Gödla[43])). Mimo że nie przypisujemy w tej chwili większego znaczenia systemom o ściśle określonych regułach

[41]) Mostowski [60]. Nadto Kleene [36] i Trachtenbrot [101].
[42]) Mostowski [61], Davis [4].
[43]) Gödel [13], Mostowski [63].

syntaktycznych, to jednak odegrały one poważną rolę w rozwoju nauki o podstawach matematyki dzięki temu, że nasunęły sposób określenia i wykorzystania pojęcia funkcji rekurencyjnej.

Starałem się wykazać w poprzednich rozważaniach, że pojęcia i metody teorii funkcji rekurencyjnych przenikają do wszystkich niemal działów podstaw. Występują one nie tylko w badaniach nad podstawami arytmetyki, gdzie są oczywiście instrumentem nadzwyczaj naturalnym, ale i w próbach zbudowania systemu analizy zgodnego z postulatem konstruktywności, przy interpretowaniu koncepcji intuicjonistycznych i przede wszystkim przy badaniach rozstrzygalności.

Dużemu znaczeniu teorii funkcji rekurencyjnych odpowiada znaczna liczba prac poświęconych tej teorii. Wspominałem już wyżej o pewnych zagadnieniach, które wydają się bardzo aktualne, np. dotyczących rozciągnięcia klasyfikacji Kleene'go poza liczbę $\omega$ i rozwinięcia teorii liczb porządkowych konstruktywnych. Prowadzone są też badania nad klasami węższymi niż klasa funkcji rekurencyjnych. Taką klasę tworzą np. funkcje elementarne wprowadzone przez Kalmára [30], a badane ostatnio szczegółowo przez Grzegorczyka [15].

Wreszcie dużo uwagi poświęca się sprawom metodycznym teorii funkcji rekurencyjnych, między innymi równoważnemu a możliwie prostemu określeniu tych funkcji (Robinson [76], Post [69], Markow [49]).

Świadectwem tego, że teoria funkcji rekurencyjnych doszła już do pewnej dojrzałości, jest ukazanie się monografii poświęconej tym funkcjom (Petér [66]).

Drugą charakterystyczną cechą prowadzonych obecnie badań nad podstawami jest coraz ściślejsze powiązanie ich z algebrą. O niektórych tych związkach wspominałem już wyżej. Widzieliśmy, że tzw. ogólna algebra jest działem, w którym równy wkład mają algebraicy i specjaliści od podstaw matematyki. Widzieliśmy też, że niektóre działy dawniej zaliczane do logiki zostały wchłonięte przez algebrę, jak np. wielowartościowe systemy rachunku zdań i że metody algebraiczne pozwalają pogłębić i rozszerzyć zakres stosowalności podstawowych twierdzeń logicznych, np. twierdzenia Skolema — Löwenheima. Wpływ kierunku algebraicznego zaznacza się też w teorii rozstrzygalności.

Nieco odbiegający od naszkicowanego tu głównego nurtu badań logicznych, ale historycznie i rzeczowo ściśle z logiką związany, jest obszerny dział algebry badający ciała Boole'a. Dział ten ma liczne zastosowania w szczególności do teorii prawdopodobieństwa, dzięki czemu stanowi pomost łączący badania podstaw z innymi działami matematyki. Warto także wspomnieć, że algebra Boole'a, a dokładniej: najprymitywniejszy jej fragment, w istocie rzeczy identyczny ze zwykłym rachunkiem zdań, znajduje zastosowanie do teorii sieci elektrycznych [44]).

Fakty te wskazują, że badania podstaw matematyki, jakkolwiek stanowią dział dość szczupły i odmienny zarówno pod względem tematyki, jak i metody od większości innych działów matematyki, jednak nie są odizolowane od głównego nurtu rozwojowego matematyki i zarówno same czerpią tematykę i metody z innych dziedzin, jak też w pewnym stopniu znajdują zastosowanie.

Można by na zakończenie postawić sobie pytanie, czy zagadnienie podstaw matematyki znalazło rozwiązanie dzięki dotychczasowym wynikom uzyskanym w tej dziedzinie. Pytanie takie jest źle postawione. Zagadnienie podstaw matematyki nie jest jednym konkretnym zagadnieniem matematycznym, które można raz rozwiązać i potem już o nim zapomnieć. Rozważania na temat podstaw nauki są równie dawne jak sama nauka a matematyka nie jest od tej reguły wyjątkiem. Istota i treść matematyki od wielu wieków była przedmiotem rozważań filozofów i pozostanie tak niewątpliwie w przyszłości. Przy tym matematyka sama zmienia się z biegiem czasu, co pociąga za sobą potrzebę zmiany poglądów na jej podstawy. Osobliwą cechą współczesnych rozważań nad podstawami matematyki jest to, że częściowo zatraciły one charakter filozoficzny, a nabrały charakteru matematycznego. Starałem się w tym referacie dać rzut oka na stan tego właśnie matematycznego fragmentu badań nad podstawami i wykazać, że pozwoliły one wyjaśnić różne istotne metody współczesnej matematyki.

Jak już jednak podkreślałem kilkakrotnie, rozważania na temat podstaw prowadzone metodą matematyczną grają tylko rolę pomocniczą. Wyjaśnienie natury matematyki nie należy do matematyki, lecz do filozofii i jest możliwe tylko w ramach szerokiego poglądu filozoficznego, nie traktującego matematyki w oderwaniu od reszty nauki, lecz uwzględniającego jej przyrodniczą genezę, zastosowania, związki z innymi naukami i wreszcie jej historię.

Badania nad podstawami prowadzone metodą matematyczną mają oczywiście wpływ na uformowanie takiego szerokiego poglądu filozoficznego. Wspominałem już, że odkrycie niezupełności arytmetyki zdyskredytowało próbę formalistycznego ugruntowania matematyki, która chciała sprowadzić tę naukę do formalnej „gry" na wyrażeniach. Doniosłe znaczenie filozoficzne mają też niepowodzenia poniesione przez intuicjonistów przy ich próbie oparcia matematyki wyłącznie na intuicji liczby naturalnej.

---

[44]) Shannon [82], Szestakow [81], H. Greniewski, R. Marczyński i K. Bochenek, Studia Logica 2 (w druku).

Te i podobne negatywne wyniki uzyskane metodą matematyczną potwierdzają zatem tezę filozofii materialistycznej głoszącą, że matematyka jest w ostatecznej instancji nauką przyrodniczą, że jej pojęcia i metody mają swe źródło w doświadczeniu i że próby ugruntowania matematyki, nie uwzględniające jej przyrodniczej genezy, są skazane na niepowodzenie.

Badania podstaw prowadzone metodą matematyczną, choć nie zastępują pełnego badania podstaw matematyki, nie są więc — jak widzimy — pozbawione znaczenia. Wyniki ich są pożyteczne zarówno dla matematyki, jak i filozofii. W tym więc sensie stwierdzić można, że wypełniają one zadania, jakie zostały im zakreślone.

**Prace cytowane**


[1] Bernays, P., *A system of axiomatic set theory*, Part I, Journal of Symbolic Logic 2 (1937), str. 65-77.

[2] Birkhoff, G., *On the structure of abstract algebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Soc. 31 (1935), str. 433-454.

[3] Davis, M., *Arithmetical problems and recursively enumerable predicates*, Journal of Symbolic Logic 18 (1953), str. 33-41.

[4] — *Relatively recursive functions and the extended Klenne hierarchy*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, t. 1, Cambridge 1950, str. 723.

[5] Diamond, A. H., and McKinsey, J. C. C., *Algebras and their subalgebras*, Bulletin of the Americ. Math. Soc. 53 (1947), str. 959-962.

[6] Fitch, F. B., *The consistency of the ramified Principia*, Journal of Symbolic Logic 3 (1938), str. 140-149.

[7] Fraenkel, A., *Über eine abgeschwächte Fassung des Auswahlaxioms*, Journal of Symbolic Logic 2 (1937), str. 1-25.

[8] Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), str. 173-198.

[9] — *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatsshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), str. 349-360.

[10] — *The consistency of the axiom of choicce and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set-theory*, Princeton 1940.

[11] — *What is Cantor's continuum problem ?*, American Math. Monthly 54 (1947), str. 515-525.

[12] — *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences 24 (1938), str. 556-557.

[13] — *Über die Länge der Beweise*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 7 (1936), str. 23-24.

[14] Grzegorczyk, A., *Undecidability of some topological theories*, Fund. Math. 38 (1951), str. 137-152.

[15] — *Some classes of recursive functions*, Rozprawy Matematyczne 4 (1953), str. 1-45.

[16] Hasenjaeger, G., *Über ω-Unvollständigkeit in der Peano-Arithmetik*, Journal of Symbolic Logic 17 (1952), str. 81-97.

[17] Henkin, L., *Some interconnections between modern algebra and mathematical logic*, Transactions of the American Math. Soc. 74 (1953), str. 410-427.

[18] — *Completeness in the theory of types*, Journal of Symbolic Logic 15 (1950), str. 81-91.

[19] — *The completeness of the first-order functional calculus*, Journal of Symbolic Logic 14 (1949), str. 159-166.

[20] Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physik.-Mathemat. Klasse (1930), str. 42-56.

[21] Hilbert, D., *Über das Unendliche*, Math. Annalen 95 (1925), str. 161-190.

[22] Hilbert, D. und Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, t. 2, Berlin 1939.

[23] Janiczak, A., *Undecidability of some simple formalized theories*, Fund. Math. 40 (1953), str. 131-139.

[24] — *A remark concerning decidability of complete theories*, Journal of Symbolic Logic 15 (1950), str. 277-279.

[25] Jaśkowski, S., *Z badań nad rozstrzygalnością rozszerzonej algebry Boole'a*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 74 (1949), str. 136-137.

[26] — *Sur le problème de decision de la topologie de la théorie des groupes*, Colloquium Math. 1 (1947), str. 176-178.

[27] Kalmár, L., *Contributions to the reduction theory of the decision problem*, Acta Mathematica Academiae Scientarum Hungaricae 2 (1951), str. 19-38.

[28] Kalmár, L. and Surányi, J., *On the reduction of the decision problem*, Journal of Symbolic Logic 12 (1947), str. 65-73.

[29] — *Contributions to the reduction theory of the decision problem*, Acta Math. Academiae Scientarum Hungaricae 2 (1951), str. 125-142.

[30] — *Egyszerü példa eldönthetetlen aritmetikai problémára*, Matematikai és Fizikai Lapok 50 (1943), str. 1-23.

[31] Kemeny, J. G., *Models of logical systems*, Journal of Symbolic Logic 13 (1948), str. 16-30.

[32] — *A note on pseudomodels*, Journal of Symbolic Logic 17 (1952), str. 158-159.

[33] Kleene, S. C., *Introduction to metamathematics*, Groningen 1952.

[34] — *Recursive functions and intuitionistic mathematics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, t. 1, Cambridge 1950, str. 679-685.

[35] — *Recursive predicates and quantifiers*, Transactions of the American Math. Soc. 53 (1943), str. 41-73.

[36] — *A symmetric form of Gödel's theorem*, Indagationes Mathematicae 12 (1950), str. 244-246.

[37] Kreisel, G., *Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus II*, Proceedings of the XI-th International Congress of Philosophy, t. 14, Amsterdam 1953, str. 39-49.

[38] Kuratowski, C., *Les types d'ordre définissables et les ensembles boreliens*, Fund. Math. 29 (1937), str. 97-100.

[39] Kuratowski, K. et Tarski, A., *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. 17 (1931), str. 240-248.

[40] Lorenzen, P., *Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände*, Journal of Symbolic Logic 16 (1951), str. 81-106.

[41] Lyndon, R. C., *Identities in two-valued calculi*, Transactions of the American Mathématical Society 71 (1951), str. 457-465.

[42] — *Identities in finite algebras*, Proceedings of the American Math. Soc. 5 (1954), str. 8-9.

[43] Łoś, J., *On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems*, Colloquium Mathematicum 3 (1954), str. 58-62.

[44] Łukasiewicz, J. und Tarski A., *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, classe III, 23 (1930), str. 1-21.

[45] Malcev, A., *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik*, Математический сборник 1 (1936), str. 323-336.

[46] Marczewski, E., *Sur les congruences et les propriétés positives d'algèbres abstraites*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), str. 220-228.

[47] Марков, А. А. *Теория алгорифмов*, Труды Математического института им. Стеклова 38 (1951), str. 176-189.

[48] — *Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем*, Доклады Академи наук СССР 55 (1947), str. 587-590.

[49] — *О представлении рекурсивных функций*, Известия Академи наук СССР, серия математическая 13 (1949), str. 417-424.

[50] McKinsey, J. C. C., *A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4, with an application to topology*, Journal of Symbolic Logic 6 (1941), str. 117-134.

[51] McKinsey, J. C. C. and Tarski, A., *The algebra of topology*, Annals of Mathematics 45 (1944), str. 141-191.

[52] McKinsey, J. C. C. and Tarski, A., *On closed elements in closure algebras*, Annals of Mathematics 47 (1946), str. 122-162.

[53] Mostowski, A., *Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus*, Journal of Symbolic Logic 13 (1948), str. 204-207.

[54] — *On absolute properties of relations*, Journal of Symbolic Logic 12 (1947), str. 33-42.

[55] — *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), str. 201-252.

[56] — *An undecidable arithmetical statement*, Fund. Math. 36 (1949), str. 143-164.

[57] Mostowski, A. and Tarski, A., *Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings*, Journal of Symbolic Logic 14 (1949), str. 76.

[58] Mostowski, A., *On direct products of theories*, Journal of Symbolic Logic 17 (1952), str. 1-31.

[59] — *On a system of axioms which has no recursively enumerable arithmetic model*, Fund. Math. 40 (1953), str. 56-61.

[60] — *On definable sets of positive integers*, Fund. Math. 34 (1947), str. 81-112.

[61] — *On a set of integers not definable by means of one quantifier predicates*, Annales de la Soc. Pol. de Math. 21 (1948), str. 114-119.

[62] — *A classification of logical systems*, Studia Philosophica 4 (1951), str. 237-274.

[63] — *Sentences undecidable in formalized arithmetic*, Amsterdam 1952.

[64] Новиков, П. С., *О непротиворечивости некоторых предложений дескриптивной теории множеств*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова 38 (1951), str. 279-316.

[65] — *Об алгорифмической неразрешимости проблемы тождества,* Доклады Академии наук СССР 85 (1952), str. 709-712.

[66] Petér, R., *Rekursive Funktionen,* Budapest 1951.

[67] Пильчак, Б. Ю., *О проблеме разрешимости для исчисления задач,* Доклады Академии наук СССР 75 (1950), str. 773-776.

[68] Post, E. L., *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems,* Bulletin of the American Math. Soc. 50 (1944), str. 284-316.

[69] — *Formal reductions of the general combinatorial decision problem,* American Journal of Mathematics 65 (1943), str. 197-215.

[70] — *Recursive unsolvability of a problem of Thue,* Journal of Symbolic Logic 12 (1947), str. 1-11.

[71] Rasiowa, H. and Sikorski, R., *Algebraic treatment of the notion of satisfiability,* Fund. Math. 40 (1953), str. 62-95.

[72] Rasiowa, H., *Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis,* Fund. Math. 38 (1951), str. 99-126.

[73] Rieger, L., *On countable generalised $\sigma$-algebras, with a new proof of Gödel's completness theorem,* Czechoslovak Math. Journal 1 (1951), str. 29-40.

[74] Robinson, A., *On the meta-mathematics of algebra,* Amsterdam 1951.

[75] Robinson, J., *Definability and decision problems in arithmetic,* Journal of Symbolic Logic 14 (1949), str. 98-114.

[76] — *General recursive functions,* Proceedings of the American Math. Soc. 1 (1950), str. 703-718.

[77] Robinson, R. M., *Undecidable rings,* Transactions of the American Math. Soc. 70 (1951), str. 137-159.

[78] — *An essentially undecidable axiom system,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, t. 1, Cambridge 1950, str. 729-730.

[79] Rosser, J. B. and Wang, H., *Non-standard models for formal logics,* Journal of Symbolic Logic 15 (1950), str. 113-129.

[80] Ryll-Nardzewski, C., *The role of the axiom of induction in elementary arithmetic,* Fund. Math. 39 (1952), str. 239-263.

[81] Шестаков, В. И., *Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами,* Известия Академии наук СССР, серия математическая 10 (1946), str. 529-554.

[82] Shannon, C. E., *A symbolic analysis of relay and switching circuits,* Transactions of the American Institute of Electrical Engineers 57 (1938), str. 713-723.

[83] Sierpiński, W., *Sur une proposition qui entraîne l'existence des ensembles non mesurables,* Fund. Math. 34 (1947), str. 157-162.

[84] Skolem, Th., *Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen,* Fund. Math. 23 (1934), str. 150-161.

[85] — *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre,* Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem 5. Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4 bis 7 Juli 1922, Helsingfors 1923, str. 217-232.

[86] Specker E., *Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis,* Journal of Symbolic Logic 14 (1949), str. 145-158.

[87] Stone, M. H., *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics,* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 67 (1937), str. 1-25.

[88] Surányi, J., *Contributions to the reduction theory of the decision problem,* Acta Mathematca Acad. Scientiarum Hungaricae 1 (1950), str. 261-271.

[89] Szmielew, W., *Decision problems in group theory*, Proceedings of the X-th International Congress of Philosophy, t. 1, Amsterdam 1948, str. 373-376.

[90] Tarski, A., *Arithmetical classes and types of mathematical systems*, Bulletin of the American Math. Soc. 55 (1949), str. 63-64.

[91] — *Some notions and methods on the bordeline of algebra and metamathematics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1, Cambridge 1950, str. 705-720.

[92] — *A remark on functionally free algebras*, Annals of Mathematics 47 (1946), str. 163-165.

[93] — *Grundzüge des Systemenkalküls, zweiter Teil*, Fund. Math. 26 (1936), str. 283-301.

[94] — *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Nr. 34, (1933).

[95] — *Über unerreichbare Kardinalzahlen*, Fund. Math. 30 (1938), str. 68-89.

[96] — *Der Aussagenkalkül und die Topologie*, Fund. Math. 31 (1938), str. 103-134.

[97] — *A decision method for elementary algebra and geometry*, Berkeley 1951.

[98] — *Undecidable theories*, Amsterdam 1953.

[99] — *Undecidability of group theory*, Journal of Symbolic Logic 14 (1949), str. 76.

[100] Трахтенброт, Б. А., *Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах*, Доклады Академии наук СССР 70 (1950), str. 569-572.

[101] — *О рекурсивной отделимости*, Доклады Академи наук СССР 88 (1953), str. 953-956.

[102] Turing, A. M., *Systems of logic based on ordinals*, Proceedings of the London Math. Soc. 45 (1939), str. 161-228.

[103] Vaught, R. L., *Applications of the generalized Skolem-Löwenheim theorem to problems of completeness and decidability*, Bulletin of the American Math. Soc. 59 (1953), str. 396-397.

[104] Wang, H., *The irreducibility of impredicative principles*, Mathematische Annalen 125 (1952), str. 56-66.

[105] — *The categoricity question of certain grand logics*, Mathematische Zeitschrift 59 (1953), str. 47-56.

[106] Weyl, H., *The ghost of modality*, Philosophical essays in memory of Edmund Husserl, Cambridge 1940, str. 278-303.

[107] Воробьев, Н. Н., *Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием*, Доклады Академи наук СССР 85 (1952), str. 465-468.

[108] — *Проблема выводимости в конструктивном исчислении высказываний с сильным отрицанием*, Доклады Академи наук СССР 85 (1952), str. 689-692.