ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XVIII (1974)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XVIII (1974)

A. KAPCIA (Częstochowa)

Sur l'existence des solutions singulières d'une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert

Introduction. Dans la présente note nous nous occupons des problèmes sur l'existence des solutions singulières d'une équation différentielle implicite par rapport à la dérivée en forme

$$y = xy' + \varphi(x)f(y') + g(y') \tag{I}$$

et ses sous-types. Il est évident que l'équation (I) est une généralisation des équations suivantes: d'une généralisation de l'équation de Clairaut en forme

$$y = xy' + \varphi(x) + g(y'), \tag{I.1}$$

de l'équation de d'Alembert

$$y = xh(y') + g(y'), \tag{I.2}$$

de l'équation de Clairaut

$$y = xy' + g(y'). \tag{I.3}$$

Dans le premier chapitre nous donnons les notations et les définitions. Le second est consacré aux théorèmes sur l'existence des solutions en forme des courbes discriminantes (théorèmes II.1–II.4). Dans le chapitre trois nous examinons le problème de l'existence des solutions en forme des fonctions linéaires et leurs singularités.

Nous remarquons encore que le problème sur l'existence des solutions régulières de l'équation (I) était résolu dans le travail [6] (théorèmes III.1–III.3) et que les systèmes de fonctions $\varphi(x), f(p), g(p)$ pour lesquels l'équation (I) se donne transformer aux équations différentilles bien connues en forme normale sont donnés dans le travail [5], p. 55–61.

J'exprime mes sincères remerciments au Professeur J. Szarski qui a bien voulu m'aider dans la rédaction de cette note.

I. Notations et définitions. Introduisons les notations suivantes: on désigne l'intervalle ouvert (x_1, x_2) par X (l'intervalle ouvert (t_1, t_2) par T etc.); domaine rectangulaire ouvert $(x_1, x_2; t_1, t_2)$ par $X \times T$; fonction

inverse par rapport à la fonction $f(x)$ par $f_{-1}(y)$; l'entourage ouvert d'un point x_0: $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ par $X_{0\varepsilon}$; $f(x) \not\equiv 0$ signifiera que la fonction $f(x)$ n'est pas identiquement égale à zéro dans aucun intervalle de son domaine de définition.

Soit donnée l'équation différentielle implicite

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

définie dans le domaine V des variables x, y, p de la classe C^1, où $p = y'$.

DÉFINITION I.1. Le point (x, y, p) du domaine V des arguments de la fonction F nous appelons l'*élément linéaire* et le point correspondant (x, y) du plan le *support* de cet élément.

DÉFINITION I.2. Si pour l'élément (x_0, y_0, p_0) du domaine V est remplie l'égalité

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0, \tag{1.2}$$

nous appelons cet élément, l'*élément intégral* de l'équation (1.1).

DÉFINITION I.3. Si pour l'élément intégral (x_0, y_0, p_0) de l'équation (1.1) est remplie l'inégalité

$$F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0, \tag{1.3}$$

nous appelons cet élément, l'*élément intégral régulier*.

DÉFINITION I.4. Si pour l'élément intégral (x_0, y_0, p_0) de l'équation (1.1) est remplie l'égalité

$$F'_p(x_0, y_0, p_0) = 0, \tag{1.4}$$

nous appelons alors cet élément, l'*élément intégral irrégulier*.

DÉFINITION I.5. Si l'élément intégral irrégulier (x_0, y_0, p_0) est un point d'accumulation des éléments réguliers ayant les supports différents du support (x_0, y_0) alors on l'appelle l'*élément singulier*.

DÉFINITION I.6. Si les fonctions

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{1.5}$$

définies et de la classe C^1 dans l'intervalle T satisfont à l'inégalité $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$, et si de plus dans l'intervalle T est définie une fonction continue telle que

$$y_t'(t) = x_t'(t)p(t), \tag{1.6}$$

alors le système de trois fonctions

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad p = p(t), \tag{1.7}$$

sera nomé la *bande* des éléments linéaires et le système (1.5) le *support de la bande*.

De la condition de régularité $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$ et de la condition (1.6) il résulte que $x_t'(t) \neq 0$ pour $t \in T$.

DÉFINITION I.7. Si la bande (1.7) se compose des éléments intégraux de l'équation (1.1) c'est-à-dire, si dans l'intervalle T est remplie l'égalité

$$F\big(x(t), y(t), p(t)\big) = 0 \tag{1.8}$$

alors cette bande sera appelée la *solution paramétrique* de l'équation (1.1).

On formule la définition de la solution comme suit

DÉFINITION I.8. Si la fonction

$$y = \psi(x) \tag{1.9}$$

est de la classe C^1 dans un intervalle X et satisfait à l'équation (1.1) c'est-à-dire

$$F\big(x, \psi(x), \psi'(x)\big) = 0, \tag{1.10}$$

alors nous appelons cette fonction la *solution* de l'équation (1.1).

DÉFINITION I.9. Si les équations (1.7) définissent la solution de l'équation (1.1), alors chaque élément intégral (x_0, y_0, p_0) pour que $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $p_0 = p(t_0)$ où t_0 est une valeur de l'intervalle T, nous l'appelons *appartenant à cette solution* ou nous disons que la *solution* (1.7) *passe par cet élément.*

DÉFINITION I.10. Une solution à laquelle appartiennent seulement les éléments réguliers sera appelée *solution régulière.*

DÉFINITION I.11. Une solution à laquelle appartiennent seulement les éléments singuliers sera appelée *solution singulière.*

DÉFINITION I.12. (Courbe discriminante.) L'équation

$$w(x, y) = 0, \tag{1.11}$$

qu'on obtient par l'élimination d'un paramètre C du système d'équations

$$F(x, y, C) = 0, \qquad F'_C(x, y, C) = 0, \tag{1.12}$$

obtenu d'un système d'équations différentielles

$$F(x, y, y') = 0, \qquad F'_{y'}(x, y, y') = 0, \tag{1.13}$$

on appelle l'*équation de la courbe discriminante* (le *discriminant*) et l'ensemble des points satisfaisant à l'équation (1.11) la *courbe discriminante* de l'équation différentielle (1.1).

Les définitions I.1–I.11 sont puisées de la monographie de W. Nikliborc [8] (v. p. 147–150 et p. 19) — voir aussi E. Kamke [3], p. 64–66. Pour la définition I.12 — voir [9], p. 133, ou [7], p. 115. Ces définitions ne déterminent pas des solutions, qui ne sont ni régulières, ni singulières. Les telles solutions peuvent exister (v. p. e. [3], p. 51, ou [8], p. 157). Dans ce travail nous donnons aussi quelques exemples des solutions de tel genre.

II. L'existence des solutions de l'équation (I) en forme des courbes discriminantes. Cas $f(t) \neq 0$. Des considérations concernant les équations différentielles implicites par rapport à la dérivée on sait que ces équations peuvent posséder les solutions en forme des courbes discriminantes ou en forme des leurs parties (v. p. e. l'équation de Clairaut [3], p. 51, et aussi [9], p. 134–138, ou [2], p. 230). À présent nous examinons ce problème pour l'équation (I), qui ne se réduit pas à l'équation de Clairaut (I.3), dans le cas, quand la fonction $f(t) \neq 0$ dans l'intervalle T. De la définition I.12, on déduit que pour l'équation (I) on obtient cette courbe par l'élimination du paramètre t du système d'équations

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} y - xt - \varphi(x)f(t) - g(t) &= 0, \\ x + \varphi(x)f'(t) + g'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Nous remarquons que s'il existe un point (t_0, x_0) satisfaisant à la deuxième équation du système (β), s'ils existent toutes les deux dérivées partielles continues du côté gauche de cette équation dans un entourage du point (t_0, x_0), et plus, s'il est remplie l'inégalité $\varphi(x_0)f''(t_0) + g''(t_0) \neq 0$, alors il existe tel entourage $X_{0\varepsilon}$ du point x_0 que la seconde équation du système (β) en définit la fonction univoque $t \doteq t(x)$. De cela on déduit qu'on peut déterminer la courbe discriminante (β) dans l'entourage $X_{0\varepsilon}$ comme la fonction univoque $y = y(x)$. En garantissant cette éventualité à suivre nous traiterons le système (β) comme le système d'équations paramétriques où le paramètre c'est t. Nous introduisons le système de conditions suivantes:

Hypothèses H.

1° *Les fonctions*: a) $f(t)$, b) $g(t)$, c) $h(t)$ *sont de la classe* C^2 *pour* $t \in T$.

2° *La fonction* $\varphi(x)$ *est de la classe* C^1 *pour* $x \in X$.

3° *La fonction* $\varphi'(x) \neq 0$ *pour chaque* $x \in X$.

4° *La fonction* $f(t) \neq 0$ *pour chaque* $t \in T$.

Nous avons le théorème suivant:

Théorème II.1. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: H 1° a, H 1° b, H 2°–H 4°,

5° *à chaque admissible* $x \in X$ *répond au plus un seul* $t \in T$ *tel que le couple* (t, x) *satisfait à l'équation* $x + \varphi(x)f'(t) + g'(t) = 0$,

6° *pour chaque couple* (t, x) *pour lequel est remplie l'hypothèse* 5° *sont remplies les conditions*:

(1) $1 + \varphi'(x)f'(t) \neq 0$, (2) $\varphi(x)f''(t) + g''(t) \neq 0$,

alors aucun élément de la bande correspondante à la courbe discriminante

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} y - xt - \varphi(x)f(t) - g(t) &= 0, \\ x + \varphi(x)f'(t) + g'(t) &= 0, \end{aligned}$$

n'est pas un élément intégral de l'équation différentielle

$$y = xy' + \varphi(x)f(y') + g(y'). \tag{I}$$

Démonstration. Soit (x_0, y_0, p_0) un élément arbitrairement fixé de la bande correspondante à la courbe discriminante (β). Pour la démonstration nous introduisons les notations suivantes:

$$G(t, x) \equiv x + \varphi(x)f'(t) + g'(t), \tag{2.1}$$

$$L(y) \equiv y, \quad P(x, y') = xy' + \varphi(x)f(y') + g(y'). \tag{2.2}$$

De (2.1) et de la deuxième équation (β) nous obtenons l'équation

$$G(t, x) = 0. \tag{2.3}$$

À l'équation (2.3) nous appliquons le théorème sur l'existence de la fonction implicite (v.p. e. [1], p. 371–373). Nous remarquons qu'il existe un t_0 tel que $G(t_0, x_0) = 0$ — cela résulte du fait que (x_0, y_0, p_0) c'est un élément de la bande correspondante à la courbe discriminante (β) ainsi donc (x_0, y_0) est un point de la courbe (β). Nous constatons avec facilité que la fonction (2.1) en conséquence des hypothèses H 1° a, H 1° b, H 2° et 6° 1 remplit dans le domaine $T \times X$ toutes les autres hypothèses de ce théorème. En l'appliquant nous obtenons que pour chaque arbitrairement petit ε il existe un tel nombre δ qu'à chaque valeur $t \in T_{0\delta}$ répond une solution unique $x = x(t)$ de l'équation (2.3) dont les valeurs appartiennent à $X_{0\varepsilon}$. La fonction $x = x(t)$ est continue dans l'entourage $T_{0\delta}$ et en possède la dérivée continue déterminée par la formule

$$x_t'(t) = -\frac{\varphi(x)f''(t) + g''(t)}{1 + \varphi'(x)f'(t)}, \tag{2.4}$$

où $x = x(t)$. Nous remarquons qu'en vertu de l'hypothèse 6° il existe un entourage du point t_0 dans lequel la dérivée $x_t'(t) \neq 0$. On peut donc présenter une partie de la courbe discriminante (β) dans l'entourage du point (x_0, y_0) en forme d'un système paramétrique de fonctions

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) = x(t)t + \varphi\big(x(t)\big)f(t) + g(t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour $t \in T_{0\delta}$. De la définition I.6 et du fait que la dérivée $x_t'(t) \neq 0$ on résulte que le système de fonctions (2.5) constitue le support de la bande. Pour le support (2.5) nous marquons la fonction $p = p(t)$. En profitant de l'égalité (1.6), d'après $x_t'(t) \neq 0$ et en vertu du fait que la fonction $x = x(t)$ satisfait à l'équation (2.3) dans tout l'entourage $T_{0\delta}$ nous obtenons

$$p = p(t) = t + \varphi'\big(x(t)\big)f(t). \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6) on déduit que la bande des éléments linéaires de l'équation (I) est déterminée par le système de fonctions

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} x = x(t), \quad y = y(t) &= x(t)t+\varphi\big(x(t)\big)f(t)+g(t), \\ p = p(t) &= t+\varphi'\big(x(t)\big)f(t). \end{aligned}$$

Nous démontrons maintenant que l'élément (x_0, y_0, p_0) n'est pas un élément intégral. Pour une valeur t_0 de l'entourage $T_{0\delta}$ nous créons l'élément linéaire de la bande (2.7). Nous avons

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0) &= x(t_0)t_0+\varphi\big(x(t_0)\big)f(t_0)+g(t_0), \\ p_0 = p(t_0) &= t_0+\varphi'\big(x(t_0)\big)f(t_0). \end{aligned}$$

Substituant l'élément (2.8) dans les expressions (2.2) nous obtenons

$$(2.9)\qquad L(y_0) = y_0 = x_0t_0+\varphi(x_0)f(t_0)+g(t_0),$$

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} P(x_0, p_0) = x_0\big(t_0+\varphi'(x_0)f(t_0)\big)+\varphi(x_0)f\big(t_0+\varphi'(x_0)f(t_0)\big)+ \\ +g\big(t_0+\varphi'(x_0)f(t_0)\big). \end{aligned}$$

D'après les hypothèses H 3° et H 4° le nombre $\varphi'(x_0)f(t_0)$ est différent de zéro. Nous désignons ce nombre par k. L'expression (2.10) obtient donc la forme

$$(2.11)\qquad P(x_0, p_0) = x_0(t_0+k)+\varphi(x_0)f(t_0+k)+g(t_0+k).$$

Appliquant maintenant à l'expression $\varphi(x_0)f(t_0+k)+g(t_0+k)$ le théorème sur les accroissements finis dans l'intervalle (t_0, t_0+k) et profitant de (2.9) nous obtenons de (2.11) la formule

$$(2.12)\qquad P(x_0, p_0) = L(y_0)+k\{x_0+\varphi(x_0)f'(t_0+\theta k)+g'(t_0+\theta k)\},$$

où $\theta \in (0, 1)$. Nous remarquons que l'expression dans la cube parenthèse c'est la valeur de la fonction (2.1) dans le point $(t_0+\theta k, x_0)$ et plus, en vertu de l'hypothèse 5° et par suite du fait que le point (t_0, x_0) satisfait à l'équation (2.3) c'est-à-dire $G(t_0, x_0) = x_0+\varphi(x_0)f'(t_0)+g'(t_0) = 0$, cette expression est différente de zéro. Comme aussi le nombre $k \neq 0$ nous avons donc de (2.12)

$$L(y_0)-P(x_0, p_0) \neq 0.$$

Cela désigne (en vertu des notations admis v. (2.2) et (I)) que l'élément (x_0, y_0, p_0) de la bande (2.7) n'est pas un élément intégral de l'équation (I).

Des corollaires du théorème II.1 sont les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME II.2. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: H 1° b, H 2°–H 3°,

4° *la fonction* $g''(t) \neq 0$ *pour chaque* $t \in T$,
alors aucun élément de la bande correspondante à la courbe discriminante

$$(\beta_1) \qquad \begin{aligned} y - xt - \varphi(x) - g(t) &= 0, \\ x + g'(t) &= 0, \end{aligned}$$

n'est pas un élément intégral de l'équation différentielle

$$(\mathrm{I}.1) \qquad y = xy' + \varphi(x) + g(y').$$

La démonstration de ce théorème est évidente, quand nous posons dans le théorème II.1 $f(t) = 1$ pour chaque $t \in T$. L'hypothèse correspondante à l'hypothèse 5° du théorème II.1 est inutile car elle résulte de l'hypothèse 4° du théorème II.2.

THÉORÈME II.3. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: H 1° b, H 1° c,

2° *l'expression* $h(t) - t \neq 0$ *pour chaque* $t \in T$,

3° *à chaque admissible* $x \in X$ *répond au plus un seul* $t \in T$ *tel que le couple* (t, x) *satisfait à l'équation* $xh'(t) + g'(t) = 0$,

4° *pour chaque couple* (t, x) *pour lequel est remplie l'hypothèse* 3° *sont remplies les conditions*:

(1) $h'(t) \neq 0$, (2) $xh''(t) + g''(t) \neq 0$,

alors aucun élément de la bande correspondante à la courbe discriminante

$$(\beta_2) \qquad y - xh(t) - g(t) = 0, \qquad xh'(t) + g'(t) = 0,$$

n'est pas un élément intégral de l'équation de d'Alembert

$$(\mathrm{I}.2) \qquad y = xh(y') + g(y').$$

Démonstration. Ce théorème est un cas particulier du théorème II.1, si nous en posons les fonctions $f(t)$ et $\varphi(x)$ en forme: $f(t) \equiv h(t) - t$ pour $t \in T$, $\varphi(x) \equiv x$ pour $x \in X$.

Nous avons considéré tous les cas intéressants de l'équation (I) quand la fonction $f(t) \neq 0$ dans l'intervalle T (v. aussi le travail [6]). Le cas quand la fonction $f(t) \not\equiv 0$ nous considérerons dans le chapitre III. À présent nous citons le théorème quand $f(t) \equiv 0$ pour $t \in T$. C'est le cas de Clairaut.

THÉORÈME II.4. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: H 1° b, 2° *la fonction* $g''(t) \neq 0$ *pour* $t \in T$, *alors l'équation différentielle de Clairaut*

$$(\mathrm{I}.3) \qquad y = xy' + g(y')$$

possède une solution en forme de la courbe discriminante définie par les équations paramétriques

$$(\beta_3) \qquad x = -g'(t), \qquad y = -g'(t)t + g(t),$$

quand $t \in T$; *à la solution* (β_3) *correspond une solution unique* $y = \psi(x)$, *définie dans l'intervalle* X, *quand*

$$x_1 = \inf_{t_1<t<t_2} \big(-g'(t)\big), \qquad x_2 = \sup_{t_1<t<t_2} \big(-g'(t)\big).$$

Théorème II.4 on peut démontrer en profitant des fragments de la démonstration du théorème II.1. Le théorème II.4 avec les hypothèses un peu faibles on peut trouver dans la monographie de E. Kamke [3], p. 51 (avec les hypothèses citées plus haut v. [8], p. 156, ou [7], p. 131). On sait que la solution (β_3) est une solution singulière.

III. L'existence et la singularité des solutions en forme des fonctions linéaires de l'équation (I) et ses sous-types. Cas $f(t) \not\equiv 0$. Soit donnée une fonction $f(t) \not\equiv 0$ (v. la désignation dans le chapitre I, p. 22). Considérons maintenant le problème de l'existence des solutions de l'équation (I) dans ce cas. Nous avons: 1) la fonction $f(t) \neq 0$ pour tous $t \in T$, 2) la fonction $f(t) \neq 0$ dans sous-intervalles de l'intervalle T et existent les valeurs isolées $t_0 \in T$ (au moins une) pour lesquelles $f(t_0) = 0$. L'existence des solutions régulières, dans le premier cas, nous avons déjà considéré dans l'article [6] (théorèmes III.1–III.3) et l'existence des solutions en forme des courbes descriminantes l'aussi dans le chapitre II (théorèmes II.1–II.4) de ce travail. Dans le second cas, quand $f(t) \neq 0$ dans sous-intervalles de l'intervalle T nous en pouvons appliquer les mêmes théorèmes. Il reste donc à considérer le problème de l'existence des solutions et leurs singularités dans le cas quand $f(t_0) = 0$ pour les valeurs isolées t_0 de l'intervalle T. Nous introduisons une définition et les systèmes d'hypothèses suivantes:

DÉFINITION III.1. La fonction linéaire en forme

$$(\gamma) \qquad y = t_0 x + g(t_0),$$

définie pour chaque $x \in X$, sera dit la fonction en forme (γ).

HYPOTHÈSES U.

1° *Les fonctions*: a) $f(t)$, b) $g(t)$, c) $h(t)$ *sont de la classe* C *pour* $t \in T$.

2° *La fonction* $\varphi(x)$ *est de la classe* C *pour* $x \in X$.

HYPOTHÈSES V.

1° *La fonction* $\varphi(x)$ *est de la classe* C^2 *pour* $x \in X$.

2° *La dérivée* $\varphi''(x) \neq 0$ *pour chaque* $x \in X$.

HYPOTHÈSES Z_1.

1° *Les fonctions* a) $f(t)$, b) $g(t)$ — *sont de la classe* C^1 *pour* $t \in T$.

2° *Pour une certaine valeur isolée* $t_0 \in T$ *la valeur* $f(t_0) = 0$.

HYPOTHÈSES Z_2.

1° *Les fonctions*: a) $g(t)$, b) $h(t)$ — *sont de la classe* C^1 *pour* $t \in T$.

2° *Pour une certaine valeur isolée* $t_0 \in T$ *l'expression* $h(t_0) - t_0 = 0$.

Nous avons les théorèmes suivantes:

THÉORÈME III.1. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: U 1° a, U 1° b, U 2°, Z_1 2°, *alors l'équation différentielle*

$$y = xy' + \varphi(x)f(y') + g(y') \tag{I}$$

possède dans l'intervalle X la solution en forme (γ).

COROLLAIRE III.1. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: U 1° b, U 1° c, Z_2 2°, *alors l'équation différentielle de d'Alembert*

$$y = xh(y') + g(y') \tag{I.2}$$

possède dans l'intervalle X la solution en forme (γ).

COROLLAIRE III.2. *Si la fonction $g(t)$ remplie l'hypothèse* U 1° b, *alors l'équation de Clairaut*

$$y = xy' + g(y') \tag{I.3}$$

possède une famille de solutions en forme (γ), *où t_0 c'est un paramètre qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle T.*

Corollaire III.2 c'est bien connu théorème sur les solutions de l'équation de Clairaut (v. [3], p. 51, ou [8], p. 156).

THÉORÈME III.2. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: U 1° a, U 1° b, H 2°, H 3°,

4° *pour une certaine valeur $t_0 \in T$ la valeur $f(t_0) \neq 0$, alors l'équation* (I) *ne possède pas la solution en forme* (γ).

COROLLAIRE III.3. *Si les conditions suivantes sont remplies*: U 1° b H 2°, H 3°, *alors l'équation différentielle de Clairaut généralisée*

$$y = xy' + \varphi(x) + g(y') \tag{I.1}$$

ne possède pas la solution en forme (γ).

COROLLAIRE III.4. *Si les conditions suivantes sont remplies*: U 1° b, U 1° c,

2° *pour une certaine valeur $t_0 \in T$ l'expression $h(t_0) - t_0 \neq 0$, alors l'équation différentielle de d'Alembert* (I.2) *ne possède pas la solution en forme* (γ).

Nous omettons les démonstrations des théorèmes III.1 et III.2 car elles sont faciles. Les corollaires cités ci-dessus résultent des théorèmes III.1 et III.2, quand nous en posons: 1) pour l'équation (I.1) $f(t) \equiv 1$; 2) pour l'équation (I.2) $f(t) \equiv h(t) - t$, $\varphi(x) \equiv x$; 3) pour l'équation (I.3) $f(t) \equiv 0$. Nous remarquons encore que les théorèmes III.1 et III.2 et évidemment les corollaires III.1 – III.4 restent véritables quand nous en remplaçons les hypothèses U 1° par les hpothèses plus fortes Z_1 1° et Z_2 1° et U 2° par H 2°.

Maintenant nous allons considérer les problèmes de la singularité des solutions de l'équation (I) et ses sous-types en forme (γ), si ces solutions existent. Comme le premier nous considérons le cas de l'équation (I) qui ne se réduit pas à ses sous-types. Pour cela il suffit que les fonctions $\varphi(x)$ et $f(t)$ satisfassent aux conditions $\varphi''(x) \neq 0$ pour chaque $x \in X$ et $f(t) \neq \text{const}$ pour $t \in T$.

LEMME III.1. *Si les hypothèses* V *sont remplies, alors la fonction*

$$G(x) = -\{x + c_1\varphi(x) + c_2\}, \tag{3.1}$$

où c_1 et c_2 désignent les nombres réels arbitraires, possède au plus deux lieux de zéro.

Démonstration. Il est évident que la fonction (3.1) est définit dans l'intervalle X. Nous avons les deux cas: 1) $c_1 = 0$. La fonction (3.1) admet la forme d'une fonction linéaire, qui d'après la valeur de son coefficient angulaire, possède au plus un lieu de zéro dans l'intervalle X. 2) $c_1 \neq 0$. Différenciant (3.1) nous avons:

$$G'(x) = -\{1 + c_1\varphi'(x)\}, \tag{3.2}$$

$$G''(x) = -c_1\varphi''(x). \tag{3.3}$$

D'après V 2° et du fait que $c_1 \neq 0$, nous obtenons que la dérivée (3.3) est différente de zéro dans l'intervalle X. En vertu de cela la dérivée (3.2) est une fonction strictement monotone dans l'intervalle X. De cela résulte que la fonction (3.1) n'est pas la constante dans aucun sous-intervalle d'intervalle X. D'après le fait cité plus haut et en conséquence que $G''(x) \neq 0$ dans l'intervalle X nous obtenons que la fonction (3.1) est une fonction convexe ou concave — donc elle possède au plus deux lieux de zéro dans l'intervalle X. Des raisonements faits aux points 1) et 2) on déduit la thèse du lemme III.1.

THÉORÈME III.3. *Si les hypothèses* V *et* Z_1 *sont remplies, alors l'équation* (I) *possède une solution en forme* (γ) *à laquelle peuvent appartenir au plus deux éléments irréguliers, tous les autres éléments de la solution* (γ) *sont régiliers.*

Démonstration. L'existence de la solution (γ) résulte du théorème III.1. Des définitions I.3 et I.4 résulte que la régularité et l'irrégularité des éléments intégraux dépendent de la valeur quelle aura la dérivée $F'_{y'}$ du côté gauche de l'équation (1.1) pour ces éléments. Cette dérivée pour l'équation (I) a la forme

$$F'_{y'}(x, y, y') = -\{x + \varphi(x)f'(y') + g'(y')\} \tag{3.4}$$

et les éléments intégraux appartenant à la solution (γ) ont la forme

$$\{x, t_0x + g(t_0), t_0\}, \tag{3.5}$$

quand $x \in X$. Pour ces éléments nous avons

$$F'_{y'}\big(x, t_0 x + g(t_0), t_0\big) = -\{x + \varphi(x) f'(t_0) + g'(t_0)\}. \tag{3.4.1}$$

Nous remarquons que le membre droit de la formule (3.4.1) c'est une fonction définie dans l'intervalle X et plus, c'est un cas particulier de la fonction (3.1). En vertu des hypothèses V nous en pouvons appliquer le lemme III.1. Il en résulte que la fonction (3.4.1) possède au plus deux lieux de zéro. Cela désigne, d'après la définition I.4 que la solution (γ) possède au plus deux éléments irréguliers. Tous les autres éléments de cette solution sont évidemment réguliers.

De la définition I.5 et du théorème III.3 on déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE III.5. *Si les hypothèses* V *et* Z_1 *sont remplies, alors les éléments irréguliers appartenant à la solution* (γ), *s'ils existent, sont singuliers et plus, la solution* (γ) *possède au plus deux éléments singuliers.*

De la définition I.11 du théorème III.3 et du corollaire III.5 résulte le théorème

THÉORÈME III.4. *Si les hypothèses* V *et* Z_1 *sont remplies, alors la solution de l'équation* (I) *en forme* (γ) *n'est pas une solution singulière* (au sens de la définition I.11).

Il est évident que d'après du corollaire III.3 l'équation (I.1) ne possède pas la solution singulière en forme (γ). De cela et du théorème II.2 nous obtenons le théorème

THÉORÈME III.5. *Si les hypothèses* H 1° b, H 2°, H 3° *et* 4° *du théorème* II.2 *sont remplies, alors l'équation* (I.1) *ne possède pas des solutions singulières ni en forme* (γ) *ni en forme* (β_1).

Maintenant nous considérons les problèmes de la régularité et de la singularité de la solution en forme (γ) de l'équation (I.2). Nous avons

THÉORÈME III.6. *Si les hypothèses* Z_2 *sont remplies et si l'hypothèse* 3° $h'(t_0) \neq 0$ *est remplie, alors l'équation de d'Alembert* (I.2) *possède une solution en forme* (γ) *à laquelle peut appartenir au plus un élément irrégulier, tous les autres éléments de la solution* (γ) *sont réguliers.*

Démonstration. Du corollaire III.1 et des Z_2 résulte qu'il existe la solution en forme (γ) de l'équation (I.2). Pour les éléments linéaires (3.5) de la solution (γ) définies pour $x \in X$ la dérivée $F'_{y'}$ pour l'équation (I.2) prend la forme

$$F'_{y'}\big(x, t_0 x + g(t_0), t_0\big) = -\{h'(t_0) x + g'(t_0)\}. \tag{3.4.2}$$

On voit que le côté droit de l'expression (3.4.2) est une fonction linéaire. De cela, de l'hypothèse 3° et des définitions I.3 et I.4 résulte la thèse du théorème.

Du théorème III.6 et de la définition I.5 résulte le corollaire suivant:

COROLLAIRE III.6. *Si les hypothèses* Z_2 *et* 3° *du théorème* III.6 *sont remplies, alors l'élément irrégulier appartenant à la solution* (γ), *s'il existe est singulier et plus la solution* (γ) *possède au plus un élément singulier.*

En vertu de la définition I.11, du corollaire III.6 et du théorème III.6 on peut formuler le théorème suivant:

THÉORÈME III.7. *Si les hypothèses* Z_2 *et* 3° *du théorème* III.6 *sont remplies, alors la solution en forme* (γ) *de l'équation de d'Alembert* (I.2) *n'est pas une solution singulière* (au sens de la définition I.11).

LEMMA III.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle* (I.2) *pour laquelle sont remplies les hypothèses* Z_2 *possède la solution en forme* (γ) *à laquelle appartiennent seulement les éléments intégraux irréguliers, définie dans l'intervalle* X, *est que les fonctions* $h(t)$ *et* $g(t)$ *satisfassent aux conditions* $h'(t_0) = 0$ *et* $g'(t_0) = 0$.

Démonstration. Nous remarquons que pour les éléments linéaires de la solution (γ) nous avons la formule (3.4.2). C'est une fonction linéaire définie pour $x \in X$. De la définition I.4 résulte que tous les éléments intégraux de la solution (γ) sont irréguliers si la fonction (3.4.2) est identiquement égale à zéro dans l'intervalle X. On sait que pour cela il faut et il suffit que $h'(t_0) = 0$ et $g'(t_0) = 0$.

THÉORÈME III.8. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*: H 1° b, H 1° c, Z_2 2°,

3° $h'(t_0) = 0$ *et* $g'(t_0) = 0$,

4° *l'expression* $h(t) - t \neq 0$ *hors du point* t_0,

5° *l'expression* $xh'(t) + g'(t) \neq 0$ *pour* $x \in X$, $t \in (t_1, t_0)$ *et pour* $t \in (t_0, t_2)$, *alors l'équation différentielle de d'Alembert* (I.2) *possède la solution singulière en forme* (γ) *définie pour* $x \in X$.

Démonstration. Il est évident que l'équation (I.2) en vertu des hypothèses admises possède la solution en forme (γ) (v. corollaire III.1 qui à présent est aussi véritable). D'après H 1° b, H 1° c, Z_2 2° et 3° nous y pouvons appliquer le lemme III.2 duquel résulte que tous les éléments intégraux appartenant à la solution (γ) sont irréguliers. Nous démontrerons donc que tous les éléments de la solution (γ) sont singuliers (v. définitions I.5 et I.11).

Soit (x_0, y_0, t_0) un élément irrégulier arbitrairement choisi appartenant à la solution (γ) — c'est-à-dire l'élément

$$(x_0, t_0 x_0 + g(t_0), t_0) \tag{3.6}$$

(pour la solution (γ) $p_0 = t_0$). En vertu de la définition I.5 il suffit de démontrer que dans un entourage arbitrairement petit du support de l'élément (3.6) se trouvent les éléments intégraux réguliers ayant les supports différents de l'élément (3.6). D'après les hypothèses H 1° b,

H 1° c, 4°, 5° de ce théorème nous pouvons appliquer à l'équation (I.2) dans le domaine $(t_0, t_2; x_1, x_2)$ le théorème III.3 du travail [6] (v. aussi [4], p. 32, ou [3], p. 57). De ce théorème résulte que la solution régulière (α_2) de l'équation (I.2) d'après l'équation (3.1.2) du travail [6] possède la forme

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{h'(p)}{p-h(p)}\,dp\right)\times \\
&\qquad \times\left\{x_0+\int_{t_0}^{t} \frac{g'(p)}{p-h(p)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{h'(p)}{p-h(p)}\,dp\right)dp\right\}, \\
y(t) &= x(t)h(t)+g(t),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

quand $t \in (t_0, t_2)$. Ses éléments intégraux réguliers sont en forme $(x(t), y(t), t)$ (v. définition I.9). Les fonctions sous-intégrales

$$
\frac{h'(t)}{t-h(t)}, \qquad \frac{g'(t)}{t-h(t)}
\tag{3.8}
$$

possèdent en point t_0 les singulartés qui ne sont pas essentielles, car d'après des hypothèses H 1° b, H 1° c, Z_2 2° et 3° existent les limites

$$
\lim_{t\to t_0+} \frac{h'(t)}{t-h(t)} = h''(t_0), \qquad \lim_{t\to t_0+} \frac{g'(t)}{t-h(t)} = g''(t_0).
\tag{3.9}
$$

Admettant les limites (3.9) comme les valeurs des fonctions (3.8) en point t_0 nous obtenons la continuité à droite de ces fonctions. De cela résulte que les intégrales dans la première des formules (3.7) sont des intégrales définies. La fonction $x(t)$ est continue à droité en point t_0. Nous avons donc

$$
\lim_{t\to t_0+} x(t) = x_0.
\tag{3.10}
$$

Cela signifie que, à tout nombre positif ε_1 donné, il existe un nombre δ_1 tel que, pour tous t satisfaisant à l'inégalité $t_0 < t < t_0+\delta_1$ est remplie l'inégalité

$$
|x(t)-x_0| < \varepsilon_1.
\tag{3.11}
$$

D'après la continuité à droite de la fonction $x(t)$ en t_0 il suffit de démontrer que, à tout nombre positif ε_2 donné, il existe un nombre δ_2 tel que pour tous t satisfaisant à l'inégalité $t_0 < t < t_0+\delta_2$ est remplie l'inégalité

$$
|y(t)-y_0| < \varepsilon_2.
\tag{3.12}
$$

En effet, d'après (3.7) et en vertu de $y_0 = t_0x_0+g(t_0)$ nous avons

$$
|y(t)-y_0| < |x(t)-x_0|\,M+|h(t)-t_0|\,|x_0|+|g(t)-g(t_0)|,
\tag{3.13}
$$

où M satisfait à la condition $|h(t)| < M$ pour chaque $t \in (t_0, t_0 + \delta_1)$. D'après de l'existence des limites (3.10) et

$$\lim_{t \to t_0} h(t) = t_0, \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = g(t_0), \tag{3.14}$$

nous obtenons qu'il existe la limite du côté droit de l'inégalité (3.13) quand $t \to t_0+$, égale à zéro. De cela résulte, en vertu de l'inégalité (3.1) qu'il existe la limite du côté gauche aussi égale à zéro. Nous avons donc démontré que l'inégalité (3.12) est remplie pour chaque $t \in (t_0, t_0 + \delta_2)$.

Des faits (3.11) et (3.12) et aussi parce que les nombres ε_1 et ε_2 sont arbitrairement choisis, on déduit que dans un entourage arbitraire du support (x_0, y_0) de l'élément irrégulier (3.6) se trouvent les supports des éléments réguliers $\big(x(t), y(t), t\big)$ et en conséquance que l'élément (3.6) est singulier. Comme l'élément (3.6) était arbitrairement choisi, alors chaque élément $\big(x, t_0 x + g(t_0), t_0\big)$ appartenant à la solution (γ) est singulier. D'après la définition I.11 la solution (γ) est singulière.

THÉORÈME III.9. *Si sont remplies les hypothèses* Z_2 *et l'hypothèse*

3° $h'(t_0) = 0$ *et* $g'(t_0) \neq 0$,

alors l'équation de d'Alembert (I.2) *possède la solution régulière en forme* (γ) *définie pour* $x \in X$ (au sens de la définition I.10).

Démonstration. L'existence de la solution (γ) résulte du corollaire III.1 (on peut l'appliquer car les hypothèses Z_2 sont plus fortes des hypothèses de ce corollaire). Pour les éléments intégraux (3.5) de la solution (γ) la dérivée (3.4.2) en vertu de 3° est différente de zéro pour chaque $x \in X$. Alors tous les éléments de cette solution sont réguliers (v. définition I.4). En profitant de la définition I.10 nous obtenons que la solution (γ) est régulière.

THÉORÈME III. 10. *Si la fonction* $g(t)$ *satisfait à l'hypothèse* Z_1 1° a, *alors sur chaque solution de l'équation différentielle de Clairaut* (I.3) *appartenant à la famille de fonctions*

$$y = cx + g(c), \tag{γ_1}$$

où $c \in T$ *existe au plus un élément singulier.*

Démonstration. L'existence des solutions en forme (γ) est évidente. La dérivée $F'_{y'}$ pour l'équation (I.3) a la forme

$$F'_{y'}(x, y, y') = -\{x + g'(y')\}, \tag{3.15}$$

et pour les éléments intégraux de la solution (γ) — avec c fixé prend la forme

$$F'_{y'}\big(x, cx + g(c), c\big) = -\{x + g'(c)\}, \tag{3.16}$$

où $c \in T$ et $x \in X$. On voit que la fonction (3.16) est linéaire, non identiquement égale à constante et c'est pourquoi elle peut prendre dans l'inter-

valle X au plus une fois la valeur zéro. Comme c était arbitrairement choisi alors sur chaque solution appartenant à la famille (γ_1) peut se trouver au plus un élément irrégulier. En vertu de susdit, d'après les définitions I.3, I.4 et I.5 nous avons que sur chaque solution appartenant à la famille (γ_1) il peut exister au plus un élément singulier.

Des théorèmes bien connus concernant à l'équation de Clairaut (I.3) on sait que l'ensemble des points singuliers correspondants aux supports des éléments singuliers (s'ils existent) constitue l'enveloppe de la famille de solutions (γ_1). (v. [7], p. 31, ou [3], p. 51) Du théorème III.10 résulte le théorème suivant:

THÉORÈME III.11. *Si l'hypothèse du théorème* III.10 *est remplie, alors aucune des solutions appartenant à la famille* (γ_1) *quand* $c \in T$ *n'est pas une solution singulière de l'équation de Clairaut* (I.3).

À la fin nous remarquons que dans les théorèmes III.3 et III.6 ont été donnés les cas des solutions qui ne sont ni régulière ni singulière et aussi que cette note avec les travaux [5] et [6] constituent la révue comparée des plus importants théorèmes et résultats obtenus pour l'équation (I) et ses sous-types.

Travaux cités

[1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Tom I, Warszawa 1964.
[2] G. Julia, *Exercices d'analyse*, Tome III, Fasc. I, *Équations différentielles*, Paris 1958, Nouveau tirage.
[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen I*, Leipzig 1962.
[4] — *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, Gewönliche Differentialgleichungen*, Leipzig 1959.
[5] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy. I. Une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert transformée aux équations des types connus*, Publ. Inst. Math. Belgrade, Nouvelle série 12 (26) (1971), p. 51–61.
[6] — *Sur une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert et sur ses solutions paramétriques*, Comm. Math. 17 (1974), p. 399–410.
[7] N. M. Matwiejew, *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, Warszawa 1970.
[8] W. Nikliborc, *Równania różniczkowe*, Część I, Warszawa–Wrocław 1951.
[9] W. W. Stiepanow, *Równania różniczkowe*, Warszawa 1956.

INSTITUT MATHÉMATIQUE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, CZĘSTOCHOWA