ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XVII (1974)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XVII (1974)

A. Kapcia (Częstochowa)

Sur une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert et sur ses solutions paramétriques

Introduction. Ce travail est consacré à l'équation différentielle implicite par rapport à la dérivée en forme

$$y = xy' + \varphi(x)f(y') + g(y'). \tag{I}$$

L'équation (I) est une généralisation des équations différentielles de Clairaut et de d'Alembert, intéressantes à cause de propriétés de ses solutions. Dans le premier chapitre on formule un problème dont les solutions conduisent aux équations différentielles implicites par rapport à la dérivée. Le point de départ constitue la famille $u(p, C)$ des solutions de l'équation linéaire perturbée en forme

$$u' = a(p)\psi(u) + b(p)u + c(p), \tag{II}$$

contenant beaucoup de classes d'équations différentielles des types cennus. Dans ce problème on introduit les familles de fonctions $x(p, C)$, $y(p, C)$ définies paramétriquement dont la première est en forme $x(p, C) = \psi\big(u(p, C)\big)$ et la deuxième satisfait à la condition $y'_p(p, C) = x'_p(p, C)p$. On démontre (Théorème I.1) qu'on peut trouver la famille: $x(p, C)$, $y(p, C)$ dont l'équation différentielle est en forme (I). Chapitre II est consacré aux définitions fondamentales et aux conditions pour que l'équation (I) soit du type donné (Théorèmes II.1–II.3). Dans le chapitre III on formule des théorèmes sur l'existence et sur la construction des solutions paramétriques de l'équation (I) et des ses sous-types (Théorèmes III.1–III.3).

J'exprime mes sincères remerciements au Professeur J. Szarski qui a bien voulu m'aider dans la rédaction de ce travail.

I. Certain problème conduisant aux équations différentielles implicites par rapport à la dérivée. Introduisons les notations suivantes: on désigne l'intervalle ouvert (x_1, x_2) par X; domaine rectangulaire ouvert $(x_1, x_2; p_1, p_2)$ par $X \times P$; fonction inverse par rapport à la fonction $f(x)$ par

$f_{-1}(y)$; $f(x) \not\equiv 0$ signifiera que la fonction $f(x)$ n'est pas identiquement égale à zéro dans aucun intervalle de son domaine de définition.

Considérons à présent une équation différentielle linéaire avec une perturbation en forme (II) dans laquelle les fonctions $a(p), b(p), c(p)$ et $\psi(u)$ sont données et continues dans des intervalles convenables. L'équation (II) comprend comme cas particuliers beaucoup d'équations différentielles qu'on trouve dans la monographie de Kamke [2] p. e.: les équations linéaires, les équations à variables séparées, les équations de Riccati, l'équation généralisée de Bernoulli, une certaine sous-classe d'équations non-linéaires.

Considérons maintenant le problème suivant:

PROBLÈME I.1. *Soit donnée une famille de fonctions* $u(p, C)$ *satisfaisant à l'équation différentielle* (II) *et à la condition*

$$u'_p(p, C) \neq 0 \tag{1.1}$$

pour chaque $p \in P$ *et* C *fixé. Soient les fonctions* $a(p), b(p), c(p)$ *de la classe* C *dans l'intervalle* P *et la fonction* $\psi(u)$ *de la classe* C^1 *et telle que* $\psi'_u(u) \neq 0$ *le long de chaque solution* $u(p, C)$ *de l'équation* (II). *Considérons la famille de fonctions*

$$x(p, C) = \psi(u(p, C)), \tag{1.2}$$

de variable p *avec paramètre* C. *Soient les fonctions de la famille* $y(p, C)$ *définies à l'aide de l'identité*

$$y'_p(p, C) = x'_p(p, C)p, \tag{1.3}$$

remplie pour chaque $p \in P$ *et* C *fixé. Nous avons donc définie une famille en forme paramétrique*

$$x = x(p, C), \quad y = y(p, C). \tag{1.4}$$

Le problème consiste à trouver la forme de la famille (1.4) *et son équation différentielle.*

Nous formulons le théorème qui donne une solution partielle du problème I.1. Une certaine restriction résulte du fait que nous imposons à la fonction $a(p)$ une certaine condition qui rétrécit la classe d'équations (II) à certaines sous-classes y compris celle des équations linéaires.

THÉORÈME I.1. *Si les hypothèses suivantes sont remplies*:

1° *les fonctions* $b(p)$ *et* $c(p)$ *sont de la classe* C *pour* $p \in P$, *la fonction* $a(p)$ *est de la forme*

$$a(p) = -\exp\int b(p)dp, \tag{1.5}$$

2° $u(p, C)$ *est la famille de solutions de l'équation différentielle* (II), 3° *la fonction* $\psi(u)$ *est de la classe* C^1 *et telle que* $\psi'_u(u) \neq 0$ *le long de chaque solution définie pour* $p \in P$,

4° *les fonctions de la famille* $u(p, C)$ *satisfont à la condition* (1.1) *pour* $p \in P$ *et* C *fixé*,

5° *les fonctions de la famille* $y(p, C)$ *sont définies à l'aide de l'identité* (1.3) *remplie pour* $p \in P$ *et* C *fixé*,

alors la famille de fonctions (1.4) *est définie paramétriquement par les formules*

$$x = \psi(u(p, C)), \quad y = \psi(u(p, C)) + u(p, C)f(p) + g(p), \tag{1.6}$$

où $p \in P$ *et les fonctions* $f(p)$ *et* $g(p)$ *sont de la forme*

$$f(p) = \exp\int\big(-b(p)\big)dp, \quad g(p) = \int\big(-c(p)f(p)\big)dp + K, \tag{1.7}$$

où K — const *arbitraire. L'équation différentielle de la famille* (1.6) *a la forme* (I) *où la fonction* $\varphi(x) \equiv \psi_{-1}(x)$.

Démonstration. Nous posons

$$x = x(p, C) = \psi(u(p, C)). \tag{1.8}$$

Différenciant (1.8) et profitant de l'identité (1.3) nous obtenons

$$y'_p(p, C) = \psi'_u(u(p, C))u'_p(p, C)p. \tag{1.9}$$

Ajoutant et sous-trayant dans l'identité (1.9) l'expression $\psi(u(p, C))$ et puis profitant du fait que la famille $u(p, C)$ satisfait à l'équation (II), nous obtenons l'identité

$$y'_p(p, C) = \psi'_u(u)u'_x p + \psi(u) - \frac{u'_p}{a(p)} + \frac{b(p)}{a(p)}u + \frac{c(p)}{a(p)}. \tag{1.10}$$

Selon la condition (1.5) nous avons donc

$$\begin{aligned} y'_p(p, C) &= \psi(u(p, C)) + \psi'_u(u(p, C))u'_p(p, C)p + \\ &+ u'_p(p, C)\Big(\exp\int\big(-b(p)\big)dp\Big) - u(p, C)b(p)\Big(\exp\int\big(-b(p)\big)dp\Big) - \\ &- c(p)\Big(\exp\int\big(-b(p)\big)dp\Big). \end{aligned} \tag{1.11}$$

En intégrant nous en obtenons

$$\begin{aligned} y(p, C) &= \psi(u(p, C))p + u(p, C)\Big(\exp\int\big(-b(p)\big)dp\Big) + \\ &\qquad + \int\Big(-c(p)\Big(\exp\int\big(-b(p)\big)dp\Big)\Big)dp + K, \end{aligned} \tag{1.12}$$

où K est une constante arbitraire. Remarquons que les deux dernières fonctions dans l'expression (1.12) sont en forme (1.7). Nous avons donc obtenu la deuxième équation (1.6). Pour déterminer l'équation différentielle de la famille (1.6) remarquons que d'après la première équation (1.6) et 3° nous avons

$$u(p, C) = \psi_{-1}\big(x(p, C)\big) \equiv \varphi\big(x(p, C)\big). \tag{1.13}$$

D'après 3° et 4° nous avons $x'_p(p, C) \neq 0$, et selon 5° il résulte que

$$y'_p(p, C)/x'_p(p, C) = p = y'_x(x) = y'. \tag{1.14}$$

D'après (1.13) et (1.14) on déduit de la deuxième équation (1.6) l'équation différentielle (I).

II. Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (I) soit du type donné et certaines définitions. Considérons l'équation différentielle implicite par rapport à la dérivée (I) où $\varphi(x), f(p), g(p)$ sont des fonctions données de la classe C^1. L'équation (I) est une généralisation des équations différentielles suivantes: de l'équation généralisée de Clairaut en forme

$$y = xy' + \varphi(x) + g(y'), \tag{I.1}$$

de l'équation différentielle de d'Alembert

$$y = xh(y') + g(y') \tag{I.2}$$

et de l'équation différentielle de Clairaut

$$y = xy' + g(y'). \tag{I.3}$$

Pour obtenir des équations (I. 1), (I. 2) et (I. 3) il suffit de mettre dans l'équation (I): 1) $f(y') \equiv 1$; 2) $\varphi(x) \equiv x$, $f(y') \equiv h(y') - y'$; 3) $\varphi(x) \equiv 0$. En connexion avec l'équation (I) nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (I) soit du type déterminé.

THÉORÈME II.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (I) *soit celle de Clairaut* (I.3) *est que la fonction* $\varphi(x) \equiv \mathrm{const}$ *ou que* $f(y') \equiv 0$.

THÉORÈME II.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (I) *soit celle de d'Alembert* (I. 2), *qui ne se réduit pas à l'équation* (I.3), *est que les fonctions* $\varphi(x)$ *et* $f(y')$ *satisfassent aux conditions*: $\varphi(x) \equiv mx+n$, *m et n — constantes*, $\varphi(x) \not\equiv \mathrm{const}$ *et* $f(y') \not\equiv 0$.

THÉORÈME II.3. *Supposons que la fonction* $\varphi(x)$ *est de la classe* C^1 *pour* $x \in X$. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (I) *soit une généralisation de l'équation de Clairaut* (I. 1), *qui ne se réduit pas à l'équation de d'Alembert* (I. 2), *est que les fonctions* $\varphi(x)$ *et* $f(y')$ *satisfassent aux conditions*: $\varphi'(x) \not\equiv 0$ *et* $f(y') \equiv \mathrm{const} \neq 0$.

Nous omettons les démonstrations des théorèmes II.1–II.3, car elles sont faciles. Nous donnons maintenant les définitions introduites par W. Nikliborc en sa monographie [6], p. 147–150. Soit donnée l'équation différentielle implicite

(2.1) $$F(x, y, y') = 0,$$

définie dans le domaine V des variables x, y, p, de la classe C^1, où $p = y'$.

DÉFINITION II.1. Nous appelons le point (x, y, p) du domaine V des arguments de la fonction F *l'élément linéaire* et le point correspondant (x, y) du plan XY le *support* de cet élément.

DÉFINITION II.2. Si pour l'élément (x_0, y_0, p_0) du domaine V est remplie l'égalité

(2.2) $$F(x_0, y_0, p_0) = 0,$$

nous appelons alors cet élément, *l'élément intégral* de l'équation (2.1).

DÉFINITION II.3. Si pour l'élément intégral (x_0, y_0, p_0) de l'équation (2.1) est remplie l'inégalité

(2.3) $$F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0,$$

nous appelons alors cet élément, *l'élément intégral régulier.*

DÉFINITION II.4. Si les fonctions

(2.4) $$x = x(t), \quad y = y(t),$$

définies et de la classe C^1 dans l'intervalle T satisfont à l'inégalité $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$, et si de plus dans l'intervalle T est définie une fonction continue $p(t)$ telle que

(2.5) $$y'_t(t) = x'_t(t) p(t),$$

alors les système de trois fonctions

(2.6) $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad p = p(t),$$

sera dit la *bande des éléments linéaires* et le système (2.4) le *support* de la bande.

De la condition de régularité $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$ et de la condition (2.5) il résulte que $x'_t(t) \neq 0$ pour $t \in T$.

DÉFINITION II.5. Si la bande (2.6) se compose des éléments intégraux de l'équation (2.1) c'est-à-dire, si dans l'intervalle T est remplie l'égalité

(2.7) $$F\big(x(t), y(t), p(t)\big) = 0,$$

alors cette bande sera appelée la *solution paramétrique* de l'équation (2.1).

On formule la définition de la solution de l'équation aussi de façon suivante:

DÉFINITION II.6. Si la fonction

(2.8) $$y = \varphi(x)$$

est de la classe C^1 dans un intervalle X et satisfait à l'équation (2.1) c'est-à-dire

$$F(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0, \tag{2.9}$$

alors nous appelons cette fonction la *solution* de l'équation (2.1) (voir [6], p. 19).

DÉFINITION II.7 (Identité des solutions). Nous appelons la solution de la forme (2.8) $y = \psi(x)$ *identique* avec solution paramétrique (2.6), si l'équation $y = \psi(x)$ est équivalante au système d'équations $x = x(t)$, $y = y(t)$.

De la définition II.7. il résulte que si les solutions (2.6) et (2.8) sont identiques alors $\psi'(x(t)) = p(t)$.

THÉORÈME II.4. *A chaque solution* (2.8) *correspond* (*d'une manière triviale il suffit de mettre* $x = t, y = \psi(t), p(t) = \psi'(t)$) *une solution paramétrique* (2.6) *identique avec elle. Inversement à chaque solution paramétrique en forme* (2.6) *correspond une solution en forme* (2.8), *à savoir* $\psi = y(x_{-1})$.

Dans la suite par la solution de l'équation (2.1) nous comprendrons souvent le système de deux premières fonctions (2.6) ou bien la fonction (2.8) en négligeant la fonction $p(t)$ respectivement les fonctions $x(t)$ et $p(t)$ qui se laissent exprimer à l'aide des fonctions nommées ci-dessus.

DÉFINITION II.8. Une solution à laquelle appartiennent seulement les éléments réguliers sera appelée *solution régulière*.

DÉFINITION II.9 (Ensemble complet des solutions). L'ensemble Z des solutions d'une forme quelconque de l'équation (2.1), sera dit *ensemble complet des solutions*, si chaque solution de l'équation (2.1) est identique avec un élément de l'ensemble Z.

III. Existence et régularité des solutions de l'équation (I) en forme paramétrique. Nous nous occupons actuellement du problème de l'existence des solutions paramétriques de l'équation différentielle (I), qui ne se réduit pas à l'équation de Clairaut (I.3). Il suffit pour cela que les fonctions φ et f satisfassent aux conditions: $\varphi'(x) \neq 0$ dans l'intervalle X et $f(p) \neq 0$ dans l'intervalle P. Nous introduisons le système de conditions suivantes:

HYPOTHÈSES Z.

1° *Les fonctions* $f(p)$ *et* $g(p)$ *sont de la classe* C^1 *pour* $p \in P$.

2° *La fonction* $\varphi(x)$ *est de la classe* C^1 *pour* $x \in X$.

3° *La fonction* $\varphi'(x) \neq 0$ *pour* $x \in X$.

4° *La fonction* $f(p) \neq 0$ *pour* $p \in P$.

5° *L'expression* $x + \varphi(x)f'(p) + g'(p) \neq 0$ *pour chaque couple* $(x, p) \in$

LEMME III.1. *Si les fonctions $f(p)$, $g(p)$ et $\varphi(x)$ de l'équation* (I) *satisfont aux hypothèses Z, alors chaque solution de l'équation*

$$\text{(I)} \qquad y = xy' + \varphi(x)f(y') + g(y'),$$

de la forme $y = \psi(x)$ est identique au sens de la définition II.7 *avec la fonction définie paramétriquement par le système d'équations*

$$(\alpha) \qquad x = \varphi_{-1}\big(u(p)\big), \qquad y = \varphi_{-1}\big(u(p)\big)p + u(p)f(p) + g(p),$$

où $u(p)$ est une solution convenable de l'équation

$$(3.1) \qquad u' = -\frac{\varphi_{-1}(u)}{f(p)} - \frac{f'(p)}{f(p)}u - \frac{g'(p)}{f(p)}.$$

Démonstration. Soit $y = \psi(x)$ une solution de l'équation (I) au sens de la définition II.6, définie dans l'intervalle X. Substituant cette solution en équation (I) nous avons l'identité

$$(3.2) \qquad \psi(x) = x\psi'(x) + \varphi(x)f\big(\psi'(x)\big) + g\big(\psi'(x)\big)$$

pour $x \in X$. Pour deux valeurs quelconques $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ appartenant à l'intervalle X et telles que $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$ nous formons la différence

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} \psi(\hat{x}_2) - \psi(\hat{x}_1) = {} & (\hat{x}_2 - \hat{x}_1)\psi'(\hat{x}_2) + \hat{x}_1\{\psi'(\hat{x}_2) - \psi'(\hat{x}_1)\} + \\ & + \{\varphi(\hat{x}_2) - \varphi(\hat{x}_1)\}f\big(\psi'(\hat{x}_2)\big) + \varphi(\hat{x}_1)\big\{f\big(\psi'(\hat{x}_2)\big) - f\big(\psi'(\hat{x}_1)\big)\big\} + \\ & + \big\{g\big(\psi'(\hat{x}_2)\big) - g\big(\psi'(\hat{x}_1)\big)\big\}. \end{aligned}$$

Appliquant aux trois dernières expressions dans les parenthèses le théorème sur les accroissements finis dans l'intervalle $\langle \hat{x}_1, \hat{x}_2 \rangle$, et divisant par $\hat{x}_2 - \hat{x}_1$, nous obtenons

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} \frac{\psi(\hat{x}_2) - \psi(\hat{x}_1)}{\hat{x}_2 - \hat{x}_1} = {} & \psi'(\hat{x}_2) + \varphi'(\xi_1)f\big(\psi'(\hat{x}_2)\big) + \\ & + \big\{\hat{x}_1 + \varphi(\hat{x}_1)f'\big(\psi'(\xi_2)\big) + g'\big(\psi'(\xi_3)\big)\big\}\frac{\psi'(\hat{x}_2) - \psi'(\hat{x}_1)}{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}. \end{aligned}$$

Selon Z 5° nous en obtenons

$$(3.5) \qquad \frac{\dfrac{\psi(\hat{x}_2) - \psi(\hat{x}_1)}{\hat{x}_2 - \hat{x}_1} - \psi'(\hat{x}_2) - \varphi'(\xi_1)f\big(\psi'(\hat{x}_2)\big)}{\hat{x}_1 + \varphi(\hat{x}_1)f'\big(\psi'(\xi_2)\big) + g'\big(\psi'(\xi_3)\big)} = \frac{\psi'(\hat{x}_2) - \psi'(\hat{x}_1)}{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}.$$

Soit $\hat{x}_2 \to \hat{x}_1$, alors ξ_1, ξ_2, ξ_3 tendent vers $\hat{x}_1$, et d'après Z 1°, Z 2°, Z 5° et la définition II.6 — la limite du membre gauche de l'identité (3.5) existe et par conséquent celle du membre droit existe aussi. De (3.5) et selon Z 3°, Z 4° nous obtenons donc

$$(3.6) \qquad \lim_{\hat{x}_2 \to \hat{x}_1} \frac{\psi'(\hat{x}_2) - \psi'(\hat{x}_1)}{\hat{x}_2 - \hat{x}_1} = \frac{-\varphi'(\hat{x}_1)f\big(\psi'(\hat{x}_1)\big)}{\hat{x}_1 + \varphi(\hat{x}_1)f'\big(\psi'(\hat{x}_1)\big) + g'\big(\psi'(\hat{x}_1)\big)} \neq 0.$$

On en conclut que la solution $\psi(x)$ de l'équation (I) possède en chaque point de l'intervalle X la seconde dérivée $\psi''(x) \neq 0$. Différenciant (3.2) nous obtenons

$$(3.7) \qquad -f\big(\psi'(x)\big)\varphi'(x) = \big\{x+\varphi(x)f'\big(\psi'(x)\big)+g'\big(\psi'(x)\big)\big\}\frac{d\psi'}{dx}.$$

Comme $\psi''(x) \neq 0$ dans l'intervalle X, la dérivée de la solution $-\ \psi'(x)$ possède une fonction inverse. En posant

$$(3.8) \qquad \psi'(x) = p,$$

nous obtenons la fonction inverse par rapport à la dérivée $\psi'(x)$ en forme

$$(3.9) \qquad x = \psi'_{-1}(p) = x(p),$$

définie dans l'ensemble P des valeurs de la fonction $\psi'(x)$. De (3.9) il résulte que

$$(3.10) \qquad x'(p) = \frac{d}{dp}\{x(p)\} = \frac{1}{\psi''(x)}.$$

Divisant l'identité (3.7) par $\psi''(x)$ et profitant de (3.8), (3.9) et (3.10) nous avons

$$(3.11) \qquad -f(p)\varphi'\big(x(p)\big)x'(p) = x(p)+\varphi\big(x(p)\big)f'(p)+g'(p).$$

Les fonctions $\varphi'\big(x(p)\big)$, $\varphi\big(x(p)\big)$ sont définies parce que la fonction $x(p)$ prend les valeurs appartenantes à l'intervalle X dans lequel les fonctions $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$ sont définies. Posons

$$(3.12) \qquad \varphi\big(x(p)\big) = u(p).$$

D'après Z 3°, la fonction $\varphi(x)$ possède la fonction inverse

$$(3.13) \qquad x(p) = \varphi_{-1}\big(u(p)\big).$$

Différenciant l'égalité (3.12) par rapport à p nous obtenons

$$(3.14) \qquad \varphi'\big(x(p)\big)x'(p) = u'(p).$$

La fonction $u'(p)$ est différente de zéro, parce que $\varphi'\big(x(p)\big) \neq 0$ et $x'(p) \neq 0$. Substituant (3.12), (3.13) et (3.14) dans l'identité (3.11) et divisant cette identité par $-f(p)$ nous obtenons l'équation (3.1).

Remarquons encore qu'on a l'identité suivante

$$(3.15) \qquad \psi\big(x(p)\big) = \varphi_{-1}\big(u(p)\big)p+u(p)f(p)+g(p).$$

En effet, posant dans l'identité (3.2) $x = x(p)$ nous avons

$$\psi\big(x(p)\big) = x(p)\psi'\big(x(p)\big)+\varphi\big(x(p)\big)f\Big(\psi'\big(x(p)\big)\Big)+g\Big(\psi'\big(x(p)\big)\Big),$$

d'où, selon (3.9), (3.12) et (3.13), résulte l'identité (3.15).

Démontrons maintenant que la solution $y = \psi(x)$ est identique au sens de la définition II.7 avec la fonction définie paramétriquement par le système d'équations (α), où $u(p)$ est la fonction définie par les relations (3.9) et (3.12). Soit donné un point arbitraire (x_0, y_0) qui remplit l'équation $y = \psi(x)$. En posant alors $p_0 = \psi'(x_0)$ nous obtenons, en vertu de (3.9), (3.13) et de l'identité (3.15)

$$x_0 = x(p_0) = \varphi_{-1}(u(p_0)),$$
$$y_0 = \psi(x_0) = \varphi_{-1}(u(p_0))p_0 + u(p_0)f(p_0) + g(p_0).$$

Nous avons donc démontré qu'une solution arbitraire (x_0, y_0) de l'équation $y = \psi(x)$ satisfait au système (α). Inversement, si pour un $p_0 \in P$ le point (x_0, y_0) remplit le système

$$x_0 = \varphi_{-1}(u(p_0)), \qquad y_0 = \varphi_{-1}(u(p_0))p_0 + u(p_0)f(p_0) + g(p_0), \tag{3.16}$$

alors de (3.13) et de la première relation (3.16) nous avons $x_0 = x(p_0)$, d'où en vertu de l'identité (3.15) et de la deuxième relation (3.16) nous obtenons $y_0 = \psi(x_0)$. Nous avons démontré qu'une solution arbitraire (x_0, y_0) du système (α) satisfait à l'équation $y = \psi(x)$.

LEMME III.2. *Si les fonctions $f(p)$, $g(p)$ et $\varphi(x)$ satisfont aux hypothèses* Z, *alors le système d'équations* (α), *où $u(p)$ est une solution arbitraire de l'équation* (3.1), *définit une solution de l'équation différentielle* (I). *Les solutions en forme* (α) *sont régulières.*

Démonstration. Supposons que $u(p)$ soit une solution de l'équation (3.1) et considérons le système de fonctions (α). Démontrons d'abord que la formule

$$y'_p(p) = x'_p(p)p \tag{3.17}$$

a lieu. Nous avons

$$y'_p(p) = \varphi'_{-1}(u(p))u'_p(p)p + \varphi_{-1}(u(p)) + u'_p(p)f(p) + u(p)f'(p) + g'(p),$$
$$x'_p(p) = \varphi'_{-1}(u(p))u'_p(p).$$

Profitant du fait que $u(p)$ est une solution de l'équation (3.1), nous en obtenons la relation (3.17). De (3.1) il résulte que

$$u'_p(p) = -\frac{\varphi_{-1}(u(p))}{f(p)} - \varphi(\varphi_{-1}(u(p)))\frac{f'(p)}{f(p)} - \frac{g'(p)}{f(p)},$$

d'où en vertu de Z 4°, Z 5° (après la substitution de $x = \varphi_{-1}(u(p))$) nous obtenons que $u'_p(p) \neq 0$. Comme selon Z 3° — $\varphi'_{-1}(u(p)) \neq 0$, on en déduit

$$x'_p(p) \neq 0. \tag{3.18}$$

Il résulte de (3.17) et (3.18) que le système (α) constitue une bande (définition II.4). Nous démontrerons que cette bande est une solution de l'équation (I). En effet, de la deuxième équation du système (α) nous avons

$$y(p) = \varphi_{-1}(u(p))p+u(p)f(p)+g(p),$$

d'où, en vertu de la première équation du système (α) ainsi que de l'identité $\varphi(x(p)) = u(p)$ nous obtenons

$$y(p) = x(p)p+\varphi(x(p))f(p)+g(p).$$

Nous avons démontré alors que la bande $x(p)$, $y(p)$, p est une solution de l'équation (I). Pour la démonstration de la régularité des solutions de la forme (α) montrons que chaque élément de cette solution, c'est-à-dire $x(p), y(p), p$ est un élément régulier. La dérivée $F'_{y'}$ pour l'équation (I) a la forme

$$F'_{y'}(x, y, y') = -\{x+\varphi(x)f'(y')+g'(y')\}.$$

En substituant $x = x(p), y' = p$ nous obtenons l'expression qui selon Z 5° est différente de zéro. Cela signifie d'après les définitions II.3 et II.8 que la solution (α) est régulière. Profitant maintenant de la définition II.9, appliquée aux solutions de l'équation (I), ainsi que des lemmes III.1 et III.2 on peut formuler le théorème suivant:

Théorème III.1. *Si les fonctions $f(p)$, $g(p)$ et $\varphi(x)$ satisfont aux hypothèses Z, alors l'ensemble complet des solutions de l'équation différentielle*

$$\text{(I)} \qquad y = xy'+\varphi(x)f(y')+g(y')$$

est donné par les formules

$$(\alpha) \qquad x = \varphi_{-1}(u(p)), \qquad y = \varphi_{-1}(u(p))p+u(p)f(p)+g(p),$$

où $u(p)$ est une solution arbitraire de l'équation

$$(3.1) \qquad u' = -\frac{\varphi_{-1}(u)}{f(p)}-\frac{f'(p)}{f(p)}u-\frac{g'(p)}{f(p)}.$$

Toutes les solutions de l'équation différentielle (I) *sont régulières.*

Il n'est pas difficile à conclure que pour la solution donnée $y = \psi(x)$ l'identité de cette solution avec une solution correspondante en forme (α), est déjà garantie si l'on remplace l'hypothèse Z 5° par une hypothèse plus faible, à savoir

$$x+\varphi(x)f'(\psi'(x))+g'(\psi'(x)) \neq 0$$

dans l'intervalle dans lequel la fonction $y = \psi(x)$ est définie. Des corollaires du théorème III.1 sont les deux théorèmes suivants:

Théorème III.2. *Si les fonctions $g(p)$ et $\varphi(x)$ satisfont aux hypothèses* Z 1°–Z 3° *et si l'on a en plus:*

4° *l'expression* $x+g'(p) \neq 0$ *pour chaque couple* $(x,p) \in X \times P$, *alors l'ensemble complet des solutions d'une généralisation de l'équation différentielle de Clairaut*

$$y = xy' + \varphi(x) + g(y') \tag{I.1}$$

est donné par des formules

$$x = \varphi_{-1}(u(p)), \quad y = \varphi_{-1}(u(p))p + u(p) + g(p), \tag{α_1}$$

où $u(p)$ *est une solution arbitraire de l'équation*

$$u' = -\varphi_{-1}(u(p)) - g'(p). \tag{3.1.1}$$

Toutes les solutions de l'équation différentielle (I.1) *sont régulières.*

Démonstration du théorème III.2 est évidente.

THÉORÈME III.3. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites:*

1° $g(p)$ *et* $h(p)$ *sont de la classe* C^1 *dans l'intervalle* P,

2° *l'expression* $h(p) - p \neq 0$ *pour* $p \in P$,

3° *l'expression* $xh'(p) + g'(p) \neq 0$ *pour chaque couple* $(x,p) \in X \times P$, *alors l'ensemble complet des solutions de l'équation différentielle de d'Alembert*

$$y = xh(y') + g(y') \tag{I.2}$$

est donné par les formules

$$x = x(p), \quad y = x(p)h(p) + g(p), \tag{α_2}$$

où $x(p)$ *est une solution arbitraire de l'équation différentielle*

$$x' = \frac{h'(p)}{p - h(p)}\, x + \frac{g'(p)}{p - h(p)}. \tag{3.1.2}$$

Toutes les solutions de l'équation différentielle (I.2) *sont régulières.*

Démonstration. Ce théorème est un cas particulier du théorème III.1, lorsque les fonctions f et φ sont de la forme: $f(p) \equiv h(p) - p$, pour $p \in P$; $\varphi(x) \equiv x$ pour $x \in X$. La fonction $u(p)$ est alors identique avec la fonction $x(p)$. Comme on le sait la solution (α_2) peut être toujours effectivement déterminée, parce que l'équation (3.1.2) est linéaire. Nous avons obtenu le théorème III.3 comme la conclusion du théorème III.1. On peut le trouver dans les monographies de Kamke [3] et de Nikliborc [6].

L'équation différentielle (I) a été aussi l'objet des considérations dans les travaux [1], [4] et [5] dans lesquels on peut trouver beaucoup de systèmes de fonctions $f(p)$, $g(p)$ et $\varphi(x)$ pour lesquels la généralisation (I) se réduit aux équations différentielles bien connues en forme normale.

Travaux cités

[1] C. Ginalski et A. Kapcia, *O pewnej klasie równań rozwiązanych względem funkcji,* Zesz. Nauk. Polit. Częst. 7, Nauki podst. 1 (1960), p. 3–6.
[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, Gewönliche Differentialgleichungen,* Leipzig 1959.
[3] — *Differentialgleichungen I,* Leipzig 1962.
[4] A. Kapcia, *O pewnym uogólnieniu wyników D. S. Mitrinovićia,* Zesz. Nauk. Polit. Częst. 21, Nauki podst. 4 (1962), p. 79–104.
[5] — *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy. I. Une généralisation des équations de Clairaut et de d'Alembert transformée aux équations des types connus,* Publ. Inst. Math. Beograd, Nouvelle *série* 12 (26) (1971), p. 51–61.
[6] W. Nikliborc, *Równania różniczkowe,* Część I, Warszawa–Wrocław 1951.

INSTYTUT MATEMATYKI
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA