ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XVII (1973)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XVII (1973)

KRZYSZTOF MOSZYŃSKI (Warszawa)

Une généralisation de la méthode de séparation des variables

1. Introduction. On considère ici le problème suivant mixte aux limites,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+B(t,x)u(t,x)+f(t,x)=0, \tag{1}$$

$$Pu(t,0)=u(t,L), \tag{2}$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \tag{3}$$

pour $t\in[0,T]$, $x\in[0,L]$, $0<T<\infty$, $0<L<\infty$.

Nous allons chercher une fonction $u(t,x)$ qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions (2) et (3), dont les valeurs appartiennent à l'espace vecetoriel réel de dimension m. Les coefficients A, B, P, sont ici des matrices réelles, carrées de dimension m; $f(t,x)$ et $\varphi(x)$ sont des éléments de l'espace R^m. On suppose la matrice P non-singulière.

Soit, pour r fixé, $r>0$, Ω_r le réctangle du plan complexe défini par les inégalités:

$$0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant L, \qquad -r\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant r. \tag{4}$$

Nous aurons besoin des hypothèses suivantes:

(a) Il existe les nombres $r_A>0$, $r_B>0$, $r_f>0$ et $r_\varphi>0$, tels que pour tout t fixé, $t\in[0,T]$, les fonctions A, B, f, φ peuvent être prolongées de la manière que

$$\begin{aligned}A(t,z)&\text{ soit analytique pour tout } z\in\Omega_{r_A},\\ B(t,z)&\text{ soit analytique pour tout } z\in\Omega_{r_B},\\ f(t,z)&\text{ soit analytique pour tout } z\in\Omega_{r_f},\\ \varphi(z)&\text{ soit analytique pour tout } z\in\Omega_{r_\varphi}.\end{aligned}$$

(b) Pour tout t, $t\in[0,T]$, A et B satisfont aux conditions aux limites

$$\begin{aligned}PA(t,iy)&=A(t,L+iy)P, \qquad |y|\leqslant r_A,\\ PB(t,iy)&=B(t,L+iy)P, \qquad |y|\leqslant r_B.\end{aligned}$$

(c) Pour tout t, $t \in [0, T]$, f et φ satisfait aux conditions aux limites

$$Pf(t, iy) = f(t, L+iy), \qquad |y| \leqslant r_f,$$
$$P\varphi(t, iy) = \varphi(t, L+iy), \qquad |y| \leqslant r_\varphi.$$

Désignons par I l'ensemble des tous les nombres entiers et mettons:

$$(5) \qquad P = e^{QL}, \quad P(z) = e^{Qz}, \quad a_\nu = \frac{2\pi i}{L}\nu, \quad \nu \in I.$$

Lemme 1. *Si la matrice* $A(z)$ *satisfait aux conditions* (a) *et* (b), *on a pour tout* $x \in [0, L]$:

$$(6) \qquad A(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} P(x) A_\nu P^{-1}(x) e^{a_\nu x}$$

et

$$(7) \quad A_\nu = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-a_\nu x} P^{-1}(x) A(x) P(x)\, dx = O(e^{-|\nu| k_{r_A}}), \qquad k_{r_A} = \frac{2\pi}{L} r_A$$

(*la formule* (7) *signifie que tous les éléments de la matrice sont majorés par* $Ke^{-|\nu| k_{r_A}}$ *où* K *est une constante positive*).

Démonstration. Mettons

$$\tilde{A}(z) = P^{-1}(z) A(z) P(z)$$

donc $\tilde{A}$ est une fonction analytique. On outre, tenant compte des conditions aux limites nous avons:

$$\tilde{A}(iy) = \tilde{A}(L+iy), \qquad |y| \leqslant r_A.$$

Pour x réel, $x \in [0, L]$ on a:

$$\tilde{A}(0) = \tilde{A}(L)$$

et nous pouvons écrire

$$\tilde{A}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{a_\nu x}$$

où

$$A_\nu = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-a_\nu x} \tilde{A}(x)\, dx.$$

En intégrant, suivant la frontière du réctangle $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant L$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r_A$, on arrive à la formule

$$LA_\nu = \int_0^L e^{-a_\nu x} \tilde{A}(x)\, dx$$
$$= \Big[\int_0^L e^{-a_\nu x} \tilde{A}(x + ir_A)\, dx\Big] e^{-a_\nu r_A} + i\int_0^{r_A} [\tilde{A}(iy) - \tilde{A}(L+iy) e^{a_\nu L}] e^{ia_\nu y} dy$$

d'où comme $e^{a_\nu L} = 1$:

$$\int_0^L e^{-a_\nu x}\tilde{A}(x)\,dx = \Big[\int_0^L e^{-a_\nu x}\tilde{A}(x+ir_A)\,dx\Big]e^{\frac{2\pi\nu}{L}r_A}$$

et si $k_{r_A} = \dfrac{2\pi}{L}r_A$

$$A_\nu = O(e^{k_{r_A}\nu}), \quad \nu\in I.$$

Appliquant la même technique pour le réctangle, $0\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant L$, $-r_A\leqslant \mathrm{Im}\,z\leqslant 0$ nous arrivons à la rélation

$$A_\nu = O(e^{-k_{r_A}\nu}), \quad \nu\in I,$$

d'où finalement

$$A_\nu = O(e^{-k_{r_A}|\nu|}), \quad \nu\in I.$$

LEMME 2. *Si le vecteur* $\varphi(z)$ *satisfait aux conditions* (a) *et* (c), *on a*:

$$\varphi(x) = P(x)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\varphi_\nu e^{a_\nu x}, \tag{8}$$

où

$$\varphi_\nu = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-a_\nu x}P(x)^{-1}\varphi(x)\,dx = O(e^{-k_{r_\varphi}|\nu|}), \quad K_{r_\varphi} = \frac{2\pi}{L}r_\varphi,\ \nu\in I. \tag{9}$$

Démonstration. Mettons

$$\tilde{\varphi}(z) = P^{-1}(z)\varphi(z),$$

$\tilde{\varphi}$ est donc une fonction analytique dans Ω_{r_φ}. En outre

$$\tilde{\varphi}(iy) = e^{-iyQ}\varphi(iy),$$

$$\tilde{\varphi}(L+iy) = e^{-iyQ}P^{-1}\varphi(L+iy).$$

Mais

$$\varphi(L+iy) = P\varphi(iy),$$

d'où

$$\tilde{\varphi}(iy) = \tilde{\varphi}(L+iy).$$

Pour tout x, $x\in[0, L]$, la fonction $\tilde{\varphi}$ est donc périodique. Suivant maintenant la voie analogue à celle de la démonstration du lemme 1, on arrive à la rélation (8) et (9).

Soit C^m, l'espace vectoriel complexe de dimension (complexe) m. Nous allons chercher la solution du problème (1), (2), (3) sous la forme de la série suivante:

$$u(t, x) = P(x)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a_\nu x}c_\nu(t), \tag{10}$$

où $c_\nu(t)\in C^m$ pour $t\in[0, T]$, $x\in[0, L]$.

On vérifie facilement que dans le cas de la convergence, la série (10) satisfait à la condition (2).

Supposons maintenant la série (10) uniformément et absolument convergente, ainsi que les séries obténues par différentiation de la série (10) par rapport de t et x.

On a alors:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = P(x)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a_\nu x} c'_\nu(t),$$

(11)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = P(x)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (Q+a_\nu E) e^{a_\nu x} c_\nu(t).$$

E étant la matrice — unitée de dimension m.

Utilisant les Lemmes 1 et 2, les formules (10), (11) et l'équation (1), nous arrivons à l'équation

$$P(x)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a_\nu x} C'_\nu(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(x) A_k(t) P^{-1}(x) e^{a_k x} P(x) \sum_{l=-\infty}^{\infty} (Q+a_l E) e^{a_l x} c_l(t) +$$
$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(x) B_k(t) P^{-1}(x) e^{a_k x} P(x) \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{a_l x} c_l(t) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} P(x) f_\nu(t) e^{a_\nu x} = 0.$$

Comme $a_k + a_l = a_{k+l}$, on peut changer les variables de sommation dans les sommes doubles, en mettant

$$\nu = k+l$$

ce qui donne

$$P(x)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Big\{c'_\nu(t) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [A_{\nu-l}(t)(Q+a_l E) + B_{\nu-l}(t)] c_l(t) + f_\nu(t)\Big\} e^{a_\nu x} = 0,$$

d'où, à cause de la biorthogonalité des systèmes $e^{a_\nu x}$ et $e^{-a_\mu x}$ dans $[0, L]$, il suit que:

$$c'_\nu(t) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [A_{\nu-l}(t)(Q+a_l E) + B_{\nu-l}(t)] c_l(t) + f_\nu(t) = 0. \tag{12}$$

D'autre part, la condition initiale (3) ainsi que le Lemme 2 nous fournit la suite des rélations:

$$c_\nu(0) = \varphi_\nu, \qquad \nu \in I, \tag{13}$$

où

$$\varphi(x) = P(x)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \varphi_\nu e^{a_\nu x}.$$

Le système infini des équations différentielles ordinaires (12) avec les conditions initiales (13) détermine les coefficients $C_\nu(t) \in C^m$ de la série (10), pourvu qu'il admette une telle solution qui puisse assurer la convergence uniforme et absolue de la série (10) et de ses dérivées (11).

2. Existence et unicité de la solution du problème initiale de la forme (12) (13). On applique ici les methodes utilisées par Gelfand et Šilov dans leur livre [1]. La démonstration d'existence est identique à celle de [1].

Considérons les suites infinies des éléments de l'espace C^m:

$$\xi = \{c_\nu\}_{\nu \in I}. \tag{14}$$

Soit, pour $\lambda > 0$

$$\|\xi\|_\lambda = \sup_{\nu \in I} e^{\lambda|\nu|} \|c_\nu\|. \tag{15}$$

On va désigner par Z_λ l'ensemble des tous les éléments de la forme (14), tels que

$$\|\xi\|_\lambda < \infty.$$

On démontre facilement que Z_λ est un espace de Banach, avec la norme $\| \; \|_\lambda$. En outre, si $\lambda_1 < \lambda_2$, on a

$$\|\xi\|_{\lambda_2} \geqslant \|\xi\|_{\lambda_1} \quad \text{et } Z_{\lambda_2} \subset Z_{\lambda_1}.$$

Exemple. Soit ψ une fonction qui satisfait aux conditions (a) et (c) de N° 1. Mettons

$$\psi(x) = P(x) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a_\nu x} \psi_\nu \quad \text{et } \xi = \{\psi_\nu\}_{\nu \in I}.$$

En appliquant la formule (9), nous voyons que $\xi \in Z_\lambda$ où $\lambda = \frac{2\pi}{L} r_\psi$.

Soit maintenant $\xi = \{c_\nu\}_{\nu \in I} \in Z_\lambda$ et mettons

$$F(t, \xi) = \Big\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} [A_{\nu-l}(t)(Q - a_l E) + B_{\nu-l}(t)] c_l(t) + f_\nu(t) \Big\}_{\nu \in I}, \tag{16}$$

où les symboles retiennent leur sens de la formule (10).

---

[1] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Москва 1958, p. 111—118.

LEMME 3. *Soit: a et b deux nombres réels fixés, tels que* $0 < a < b < \infty$; μ, μ', μ'' *et* λ *les nombres quelconques tels que* $a < \mu' < \mu'' \leqslant \lambda$, $a < \mu < \lambda < b$;

$$M_y(A) = \sup_{t\in[0,T]} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \|A_\nu(t)\| e^{y|\nu|},$$

$$M_y(B) = \sup_{t\in[0,T]} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \|B_\nu(t)\| e^{y|\nu|} \text{ (}^2\text{)}.$$

Si $M_\lambda(A) < \infty$ *et* $M_\lambda(B) < \infty$, *on a:*

(i) *Pour tout* $\xi \in Z_\lambda$ *et* $t \in [0, T]$, $F(t, \xi) \in Z_\mu$.

(ii) *Il existe une constante* $L_\lambda > 0$ *telle que pour tous* $\xi_1 \in Z_{\mu''}$ *et* $\xi_2 \in Z_{\mu''}$ *et tout* $t \in [0, T]$,

$$\|F(t, \xi_1) - F(t, \xi_2)\|_{\mu'} \leqslant \frac{L_\lambda}{\mu'' - \mu'} \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mu''}. \tag{17}$$

Démonstration. Nous allons commencer avec (ii). Mettons

$$\xi_1 - \xi_2 = \{d_\nu\}_{\nu\in I} \in Z_{\mu''}, \qquad a = \frac{2\pi i}{L}.$$

Nous avons

$$\|F(t, \xi_1) - F(t, \xi_2)\|_{\mu'} = \Big\| \Big\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} [A_{\nu-l}(t)(Q + a_l E) + B_{\nu-l}(t)] d_l \Big\}_{\nu\in I} \Big\|_{\mu'}$$

$$\leqslant \sup_{\nu\in I} e^{\mu'|\nu|} \Big[\sum_{l=-\infty}^{\infty} |a|\,|L|\,\|A_{\nu-l}(t)\|\,\|d_l\| + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \big(\|A_{\nu-l}(t)\|\,\|Q\| + \|B_{\nu-l}(t)\|\big)\|d_l\| \Big]$$

$$= \sup_{\nu\in I} e^{\mu'|\nu|} \Big[\sum_{l=-\infty}^{\infty} |a|\,|L|\,\|A_{\nu-l}(t)\|\,\|d_l\|\, e^{|l|\mu''} e^{-|l|\mu''} +$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \big(\|A_{\nu-l}(t)\|\,\|Q\| + \|B_{\nu-l}(t)\|\big)\|d_l\|\, e^{\mu''|l|} e^{-\mu''|l|} \Big]$$

$$\leqslant \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mu''} \|\sup_{\nu\in I} \Big[|a| \sup_{l\in I} |l|\, e^{-(\mu''-\mu')|l|} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|A_{\nu-l}(t)\|\, e^{\mu'(|\nu|-|l|)} +$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \big(\|A_{\nu-l}(t)\|\,\|Q\| + \|B_{\nu-l}(t)\|\big) e^{\mu'(|\nu|-|l|)} \Big].$$

---

(2) On peut se servir ici de la norme spectrale des matrices ou d'une autre norme équivalente.

Comme

$$|\nu - l| \geqslant \big| |\nu| - |l| \big| \qquad \text{et} \qquad \sup_{l \in I} |l| e^{-(\mu''-\mu')|l|} \leqslant \frac{e^{-1}}{\mu''-\mu'}\,,$$

nous trouvons pour $\mu' < \mu''$

$$\|F(t\xi_1) - F(t, \xi_2)\|_{\mu'} \leqslant \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mu''} \Bigg[\frac{|a|}{e(\mu''-\mu')} \sup_{\nu \in I} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|A_{\nu-l}(t)\| e^{\mu'|\nu-l|} +$$

$$+ \|Q\| \sup_{\nu \in I} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|A_{\nu-l}(t)\| e^{\mu'|\nu-l|} + \sup_{\nu \in I} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|B_{\nu-l}(t)\| e^{\mu'|\nu-l|} \Bigg],$$

mais, pour tout $\mu < \lambda$:

$$\sup_{\nu \in I} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|A_{\nu-l}(t)\| e^{\mu|\nu-l|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|A_k(t)\| e^{\mu|k|} \leqslant M_\mu(A) \leqslant M_\lambda(A),$$

$$\sup_{\nu \in I} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|B_{\nu-l}(t)\| e^{\mu|\nu-l|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|B_k(t)\| e^{\mu|k|} \leqslant M_\mu(B) \leqslant M_\lambda(B),$$

et finalement

$$\|F(t, \xi_1) - F(t, \xi_2)\|_{\mu'} \leqslant \frac{\|\xi_1 - \xi_2\|_{\mu''}}{\mu''-\mu'} \Bigg[\frac{|a|}{e} M_\lambda(A) +$$

$$+ (\mu''-\mu')\big(\|Q\| M_\lambda(A) + M_\lambda(B)\big) \Bigg],$$

d'où, en mettant

$$L_\lambda = \frac{|a|}{e} M_\lambda(A) + (b-a)[\|Q\| M_\lambda(A) + M_\lambda(B)]$$

nous arrivons à la formule (17).

Soit maintenant ξ un élément quelconque l'espace Z_λ. Utilisant la formule (17):

$$\begin{aligned} \|F(t, \xi)\|_\mu &\leqslant \|F(t, 0)\|_\mu + \|F(t, \xi) - F(t, 0)\|_\mu \\ &= \|\{f_\nu(t)\}_{\nu \in I}\|_\mu + \|F(t, \xi) - F(t, 0)\|_\mu \\ &\leqslant \|\{f_\nu(t)\}_{\nu \in I}\|_\mu + \frac{L_\lambda}{\lambda - \mu} \|\xi\|_\lambda < \infty; \end{aligned}$$

le Lemme est donc demontré.

Lemme 4. *Soit $\varepsilon > 0$, un nombre quelconque. Supposons que pour $\lambda > 0$:*

(18) $$\sup_{\nu \in I} \|A_\nu(t)\| e^{(\lambda+\varepsilon)|\nu|} < \infty,$$

alors

(19) $$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \|A_\nu(t)\| e^{\lambda|\nu|} < \infty.$$

Démonstration.

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \|A_\nu(t)\| e^{\lambda|\nu|} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \|A_\nu(t)\| e^{(\lambda+\varepsilon)|\nu|} e^{-\varepsilon|\nu|}$$

$$\leqslant \sup_{\nu\in I} \|A_\nu(t)\| e^{(\lambda+\varepsilon)|\nu|} \Big(1+2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\nu}\Big).$$

Mais $\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\nu} < \infty$, d'où suit (19).

Théorème d'existence et d'unicité. *Soit:*
λ un nombre fixé, $0 \leqslant a < \lambda < b$;
Z_μ, $a < \mu < b$ une famille d'espaces de Banach, telle que pour tout μ' et μ'', $a < \mu' < \mu'' < b$

(a) $Z_{\mu''} \subset Z_{\mu'}$;

(b) *si* $\xi \in Z_{\mu''} \subset Z_{\mu'}$, *alors* $\|\xi\|_{\mu'} \leqslant \|\xi\|_{\mu''}$;

F: $[0, T] \times \bigcup_{\mu\in(a,b)} Z_\mu \to \bigcup_{\mu\in(a,b)} Z_\mu$ *une fonction, telle que:*

(c) *pour tout μ' et μ'', $a < \mu' < \mu'' < b$,*

$$F([0, T] \times Z_{\mu''}) \subset Z_{\mu'};$$

(d) *pour tout μ, $a < \mu < b$ et ξ fixé, $\xi \in Z_{\mu'}$, F est continue comme la fonction de la variable t, $t \in [0, T]$ et dont les valeurs appartiennent à l'espace $Z_{\mu'}$, pour tout μ', $a < \mu' < \mu < b$;*

(e) *pour tout t, $t \in [0, T]$, $F(t, 0) \in Z_\lambda$;*

(f) *il existe une constante $L_\lambda > 0$, telle que pour tout μ' et μ'', $a < \mu' < \mu'' \leqslant \lambda < b$ pour tout $\xi_1 \in Z_{\mu''}\, \xi_2 \in Z_{\mu''}$ et tout $t \in [\varrho, T]$*

$$\|F(t, \xi_1) - F(t, \xi_2)\|_{\mu'} \leqslant \frac{L_\lambda}{\mu'' - \mu'} \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mu''};$$

ζ, un element de l'espace Z_λ.

Sous ces conditions il existe, pour tout μ, $a < \mu < \lambda < b$:
une constante T_μ^λ, $0 < T_\mu^\lambda \leqslant T$;
une, et une seule fonction ξ

$$\xi\colon [0, T_\mu^\lambda) \to Z_\mu$$

telle que

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = F\big(t, \xi(t)\big), \tag{20}$$

$$\xi(0) = \zeta \tag{21}$$

pour $t \in [0, T_\mu^\lambda)$.

Démonstration. (a) Existence. Soit μ et λ tels que $a < \mu < \lambda < b$. Mettons pour n entier, $n > 0$

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{\lambda - \mu}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\mu_0 = \lambda, \qquad \mu_n = \mu$$

et

$$\xi_{k+1}(t) = \zeta + \int_0^t F(\tau, \xi_k(\tau)) d\tau, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$\xi_0 = 0.$$

On vérifie facilement que ξ_k est continue dans $[0, T]$ et $\xi_{k+1}(t) \in \boldsymbol{Z}_{\mu_k}$ pour $t \in [0, T]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

En outre

$$\|\xi_{k+1}(t) - \xi_k(t)\|_{\mu_k} \leqslant \int_0^t \|F(\tau, \xi_k(\tau)) - F(\tau, \xi_{k-1}(\tau))\|_{\mu_k} d\tau$$

$$\leqslant \frac{nL_\lambda}{\lambda - \mu} \int_0^t \|\xi_k(\tau) - \xi_{k-1}(\tau)\|_{\mu_{k-1}} d\tau$$

d'où

$$\|\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\|_\mu \leqslant \left(\frac{nL_\lambda}{\lambda - \mu}\right)^n \frac{t^n}{n!} q_\lambda$$

où

$$q_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \|\xi_1(t)\|_\lambda.$$

Comme la série $q_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nL_\lambda}{\lambda - \mu}\right)^n \frac{t^n}{n!}$ converge pour

$$0 \leqslant t < \operatorname{Min}\left[T, \frac{\lambda - \mu}{eL_\lambda}\right] = \tilde{T}_\mu^\lambda$$

donc si $t \in [0, \tilde{T}_\mu^\lambda)$, elle est une majorante de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)).$$

Comme $\boldsymbol{Z}_\mu$ est complet, la suite $\xi_n(t)$ converge à un élément $\xi(t)$ de $\boldsymbol{Z}_\mu$ pour tout $t \in [0, \tilde{T}_\mu^\lambda)$, la convergence étant uniforme dans tout sous-intervalle fermé de $[0, \tilde{T}_\mu^\lambda)$.

La fonction ξ est donc continue dans $[0, \tilde{T}^\lambda_\mu)$, et alors

$$\xi(t) = \zeta + \int_0^t F(\tau, \xi(\tau))\,d\tau$$

pour $t \in [0, \tilde{T}^\lambda_\mu)$, ce qui termine la démonstration d'existence.

(b) Unicité. Soit $0 < \mu' < \mu < \lambda < b$, $0 < T_1 < \operatorname{Min}\left[T, \frac{\mu-\mu'}{L_\lambda e}\right]$ et supposons qu'il existe deux solutions ξ et $\tilde{\xi}$ de (20), (21) telles que:

$$\xi\colon [0, T_1] \to \boldsymbol{Z}_\mu; \qquad \tilde{\xi}\colon [0, T_1] \to \boldsymbol{Z}_\mu,$$

qui diffèrent sur $[0, T_1]$.

Donc

$$q_\mu = \sup_{t \in [0, T_1]} \|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)\|_\mu \neq 0, \qquad q_{\mu'} = \sup_{t \in [0, T_1]} \|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)\|_{\mu'} \neq 0. \tag{22}$$

Mettons pour $n > 0$, entier

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{\mu-\mu'}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\mu_0 = \mu, \qquad \mu_n = \mu'.$$

Comme

$$\xi(t) - \tilde{\xi}(t) = \int_0^t \left[F(\tau, \xi(\tau)) - F(\tau, \tilde{\xi}(\tau))\right] d\tau$$

nous avons

$$\|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)\|_{\mu_{k+1}} \leqslant \frac{nL_\lambda}{\mu-\mu'} \int_0^t \|\xi(\tau) - \tilde{\xi}(\tau)\|\,d\tau,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

d'où

$$\|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)\|_{\mu'} \leqslant \left(\frac{nL_\lambda}{\mu-\mu'}\right)^n \frac{t^n}{n!} q_\mu$$

et finalement

$$q_{\mu'} \leqslant \left(\frac{nL_\lambda}{\mu-\mu'}\right)^n \frac{T_1}{n!} q_\mu.$$

Mais on voit facilement que

$$\left(\frac{nL_\lambda}{\mu-\mu'}\right)^n \frac{T_1}{n!} \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, donc, contrairement à (22), $q_{\mu'} = 0$.

Mettons maintenant

$$T_\mu^\lambda = \mathrm{Min}\left[T, \frac{\lambda-\mu}{eL_\lambda}, \frac{\mu-a}{eL_\lambda}\right];$$

le problème (20), (21) admet donc dans $[0, T_\mu^\lambda)$ la solution unique telle que

$$\xi\colon [0, T_\mu^\lambda) \to \boldsymbol{Z}_\mu.$$

3. Conclusions.

1. Nous pouvons maintenant formuler le suivant théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (1) (2) (3) sous la forme de la série (10):

Si $A(t, x)$, $B(t, x)$, $f(t, x)$ *et* $\varphi(x)$ *satisfont aux hypothèses* (a) (b) (c) *du* N° 1, *avec*

$$r_\varphi = r_f > 0, \quad r_A > r_f, \quad r_B > r_f,$$

le problème (1), (2), (3) *admet, pour tout* μ, $0 < \mu < \lambda = \dfrac{2\pi}{L} r_f$ *et* $t \in [0, T_\mu^\lambda)$, $T_\mu^\lambda = \mathrm{Min}\left[T, \dfrac{\lambda-\mu}{L_\lambda e}, \dfrac{\mu}{L_\lambda e}\right]$ *la solution unique sous la forme de la série* (10), *telle que*

$$\{c_\nu(t)\}_{\nu\in I} \in \boldsymbol{Z}_\mu.$$

2. Considérons maintenant le problème (1) avec les conditions aux limites de la forme

$$Mu(t, 0) + Nu(t, L) = 0 \tag{23}$$

où M et N, deux matrices carrées de la dimension m, et les conditions initiales (3).

Si on suppose l'existence d'une matrice P non-singulière, telle que

$$M + NP = 0, \tag{24}$$

on peut appliquer la méthode présentée ci dessus, afin de construire la série (10), étant la solution du problème (1), (23), (3).

Le cas, où la condition (24) est satisfaite avec une matrice P non-singulière est, quand même, assez particulier, loin de couvrir tous les problèmes interessants de la forme (1), (23), (3). Il parait d'ailleurs qu'en abandonnant l'hypothèse sur la non-singularité de la matrice P, on envisage des complications serieuses, et la méthode, telle quelle a été présentée ici, ne s'applique pas directement.

Marquons encore, que, si $P = TJT^{-1}$, J-étant la matrice de Jordan, det $(J) \neq 0$, la condition (24) s'écrit comme il suit

$$MT + NTJ = 0. \tag{25}$$

C'est un problème propre généralisé, pour deux matrices M et N. La condition de la non-singularité de la matrice P signifie qu'on exige que toutes les valeurs propres de (25) soient différentes de zéro.