ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XIV (1970)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XIV (1970)

W. Ślebodziński (Wrocław)

Le principe dynamique d'E. Cartan

On doit à E. Cartan un principe dynamique équivalent au principe de Hamilton et appelé par lui principe de la conservation de la quantité de mouvement-énergie ([1], p. 7-14).

Le principe de Cartan est plus abstrait que le principe de Hamilton, mais il a certains avantages sur le dernier. Il est basé sur une forme différentielle linéaire ω dont tous les coefficients ont une simple signification mécanique, tandis que le principe de Hamilton est basé sur l'intégrale de la moindre action, où figure une fonction n'ayant pas une signification mécanique directe. Il y a encore une autre différence importante entre les deux principes. Dans la théorie de Hamilton le temps joue un rôle privilégié, tandis que le principe de Cartan donne aux lois de Mécanique une forme indépendante du repérage de l'espace-temps.

Le principe de Cartan est, à ce que je sais, peu connu par les savants qui s'intéressent de la Mécanique. En vue de cette situation nous nous proposons de présenter le principe de Cartan par une méthode différente de celle de son livre. Nous nous servirons pour ce but de la notion de dérivée de Lie, qui, n'étant pas connue aux temps où Cartan écrivait son livre, est le mieux appropriée à exposer son principe.

Nous reprenons d'abord l'étude de deux applications du principe de Cartan, qui étaient traités par lui, à savoir le cas d'un point matériel libre soumis à une force dérivant d'une fonction des coordonnées de ce point et du temps (n° 1) et le cas général d'un système des points matériels soumis aux liaisons holonomes dépendantes du temps (n° 2). Le numéro suivant est consacré au mouvement d'un point matériel libre dans le champ gravitationel de la relativité généralisée. Dans le n° 4 nous montrerons l'application du principe de Cartan à un système des points matériels soumis aux liaisons nonholonomes.

La connaissance des formules qui se rapportent à la derivée de Lie n'étant pas rependue, nous ajouterons à la fin un Appendice contenant les formules nécessaires pour justifier les calculs employés dans cet article.

1. Cas d'un point matériel libre. Supposons que dans l'espace euclidien E_3, rapporté à un système orthogonal, se trouve un point matériel libre de masse m soumis à une force dérivant d'une fonction U des coordonnées $x^\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3$) du point de l'espace et du temps t. Les équations du mouvement de ce point ont alors la forme suivante

$$m\ddot{x}^\varkappa = \frac{\partial U}{\partial x^\varkappa} \qquad \left(\ddot{x}^\varkappa = \frac{d^2 x^\varkappa}{dt^2}\right) \tag{1.1}$$

et son énergie cinétique T est donnée par la formule

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2, \qquad x = (x^1, x^2, x^3). \tag{1.2}$$

Les équations (1.1) forment un système des équations différentielles du second ordre; pour le transformer en un système équivalent des équations du premier ordre nous poserons

$$p^\varkappa = m\dot{x}^\varkappa \tag{1.3}$$

et nous nous placerons dans l'espace affine E_7 (espace des états) aux coordonnées $x^\varkappa, p^\varkappa, t$. Le point (x, p, t) de E_7 sera appelé *état du point matériel* et à l'ensemble des états correspondant à un mouvement du point considéré nous donnerons le nom de sa *trajectoire*. Ces trajectoires, dont on fera un usage fréquent dans la suite, sont dépourvues d'une existance concrète, néanmoins leur notion a apparu comme un artifice très utile.

Il est facile de voir que les équations d'une trajectoire peuvent être présentées sous la forme suivante

$$\frac{dx^\varkappa}{Q^\varkappa} = \frac{dp^\varkappa}{P^\varkappa} = \frac{dt}{1}, \tag{1.4}$$

$Q^\varkappa, P^\varkappa$ étant des fonctions analytiques(1) du point (x, p, t) de l'espace E_7. Il est aussi facile de voir qu'à tout mouvement du point libre correspond une trajectoire et qu'inversement à chacune trajectoire correspond un mouvement du point libre. Aux équations (1.4) correspond dans l'espace E_7 le champ des vecteurs

$$\vec{V} = (Q^1, Q^2, Q^3, P^1, P^2, P^3, 1). \tag{1.5}$$

Posons maintenant

$$\omega = p^1 dx^1 + p^2 dx^2 + p^3 dx^3 - H\,dt, \tag{1.6}$$

H étant défini par la formule

---

(1) Nous supposons dans cet article que toutes les fonctions dont nous aurons à faire sont des fonctions analytiques.

$$H = T - U.$$

Remarquons que tous les coefficients de la forme ω ont une signification mécanique simple: les trois premiers sont les composantes de la quantité de mouvement et le dernier représente l'énergie totale du point mobile. La forme ω était appelée par Cartan tenseur de mouvement-énergie; nous lui donnerons un plus convenable nom *d'élément de la mesure de mouvement-énergie*; la forme ω joue le rôle fondamental dans le principe de Cartan.

Pour énoncer le principe de Cartan imaginons dans l'espace E_7 une ligne fermée quelconque C et la suite de trajectoires issues de ses points et formant ainsi un tube. Le principe dynamique de Cartan peut maintenant être exprimé de la manière suivante:

Pour que les équations (1.4) déterminent le mouvement du point libre, il faut et il suffit que l'intégrale curviligne

$$\oint \omega,$$

étendue à une ligne fermée quelconque faisant un tour de ce tube, soit invariante pour les équations (1.4).

Or la condition énoncée dans le principe ci-dessus peut être exprimée par les relations suivantes ([2], p. 401)

$$L_V \omega = 0, \qquad \underline{\vec{V}|}\, \omega = 0. \tag{1.7}$$

Explicitons ces équations en nous servant des formules de l'Appendice. La seconde d'elles conduit à la relation

$$H = \sum_{\varkappa} p^{\varkappa} Q^{\varkappa} \tag{1.8}$$

et la première donne les relations suivantes

$$P^{\lambda} + \sum_{\varkappa} p^{\varkappa} \frac{\partial Q^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} = 0, \tag{1.9}$$

$$\sum_{\varkappa} p^{\varkappa} \frac{\partial Q^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} = 0, \tag{1.10}$$

$$\sum_{\varkappa} Q^{\varkappa} \frac{\partial H}{\partial x^{\varkappa}} + \sum_{\varkappa} P^{\varkappa} \frac{\partial H}{\partial p^{\varkappa}} - \sum_{\varkappa} p^{\varkappa} \frac{\partial Q^{\varkappa}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{1.11}$$

où les sommations sont étendues aux valeurs $\varkappa = 1, 2, 3$.

En rapprochant l'équation (1.8) on déduit de (1.11) l'équation suivante

$$\sum_{\varkappa} Q^{\varkappa} \frac{\partial H}{\partial x^{\varkappa}} + \sum_{\varkappa} P^{\varkappa} \frac{\partial H}{\partial p^{\varkappa}} = 0. \tag{1.12}$$

De même en différentiant l'équation (1.8) par rapport à x^λ on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial x^\lambda} = \sum_{\varkappa} p^\varkappa \frac{\partial Q^\varkappa}{\partial x^\lambda};$$

si l'on y porte l'expression qui figure à droite dans l'équation (1.9), on obtient

$$P^\lambda = -\frac{\partial H}{\partial x^\lambda}. \tag{1.13}$$

Si l'on différentie ensuite l'équation (1.8) par rapport à p^λ, on aura

$$Q^\lambda = \frac{\partial H}{\partial p^\lambda}. \tag{1.14}$$

Remarquons aussi que la relation (1.12) est une conséquence des équations (1.13) et (1.14).

En revenant aux equations (1.4), et en y tenant compte des formules (1.13) et (1.14), on leur donne la forme suivante

$$\frac{dx^\varkappa}{\dfrac{\partial H}{\partial p^\varkappa}} = \frac{dp^\varkappa}{-\dfrac{\partial H}{\partial q^\varkappa}} = \frac{dt}{1}.$$

Ces équations se confondant avec les équations de Hamilton on voit que le principe de Cartan résout complètement le problème de déterminer les équations du mouvement du point libre considéré. Ajoutons encore que des équations (1.13) et (1.14) résulte la relation

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

qui exprime le théorème des forces vives.

2. Système matériel à liaisons holonomes. En conservant les notations du n° 1 supposons que dans l'espace E_3 se trouve un système S formé de N points matériels $s_h = m_h x_h$ $(h = 1, 2, \ldots, N)$, m_h étant la masse de s_h et $x_h = (x_h^\varkappa)$ un point de E_3.

Supposons en second lieu que les points x_h soient soumis à des liaisons qui conduisent aux équations

$$x_h^\varkappa = x_h^\varkappa(q, t), \tag{2.1}$$

où $q = (q^1, q^2, \ldots, q^r)$ désigne un point d'une variété analytique M_r, connexe et finie, de dimension r, et (q, t) un point de l'espace $M_r \times t$.

Nous admettons que la matrice

$$\left[\frac{\partial x_h^\varkappa}{\partial q^\varrho}\right]\text{(2)}$$

est de rang r ce qui permet d'exprimer les variables q^ϱ en fonctions des variables $x_h^\varkappa$ et t

$$q^\varrho = \psi^\varrho(x_h^\varkappa, t). \tag{2.2}$$

Nous supposons de plus que sur chacun des points s_h agit une force extérieure $\vec{X}_h = (X_h^\varkappa)$ dérivant d'une fonction analytique $U(x_h^\varkappa, t)$ des coordonnées $x_h^\varkappa$ et du temps t. Ces forces mettent le système S en mouvement défini par les équations

$$m_h \ddot{x}_h^\varkappa = \frac{\partial U}{\partial x_h^\varkappa} \tag{2.3}$$

et ils le pourvoient de l'énergie cinétique

$$T = \sum_{h=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_h \sum_{\varkappa} (\dot{x}_h^\varkappa)^2. \tag{2.4}$$

Notons maintenant que des équations (2.1) provient la relation

$$\dot{x}_h^\varkappa = \frac{\partial x_h^\varkappa}{\partial q^\varrho}\,\dot{q}^\varrho + \frac{\partial x_h^\varkappa}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Nous allons considérer les grandeurs $\dot{q}^\varrho$ comme des quantités indépendantes en leur donnant le nom de composantes de vélocités d'un point de la variété M_r. Il résulte de (2.4) et (2.5) que l'énergie cinétique peut être présentée par une fonction de variables $(q^\varrho, \dot{q}^\varrho, t)$:

$$T = T(q, \dot{q}, t). \tag{2.6}$$

Il résulte de (2.4) et (2.5) que les termes du second ordre en $\dot{q}^\varrho$ en T donnent l'origine à une forme du second degré définie positive.

Posons

$$p_\varrho = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\varrho}; \tag{2.7}$$

les dérivées $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^\varrho}$ sont des expressions linéaires indépendantes par rapport aux variables $\dot{q}^\sigma$. En suivant la méthode du raisonnement employé au numéro précédant nous nous placerons dans l'espace affine E_{2r+1} des états (q, p, t) du système S. A un mouvement du système S, c'est-à-dire

(2) Les indices grecs ϱ, σ, τ parcourent dans ce numéro les valeurs $1, 2, \ldots, r$.

à une solution $x_h^\varkappa = f_h^\varkappa(t)$ du système des équations (2.3), correspond un ensemble des états formant une trajectoire du système S et les équations de la trajectoire peuvent être présentées sous la forme

$$\frac{dq^\varrho}{Q^\varrho} = \frac{dp_\varrho}{P_\varrho} = \frac{dt}{1} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.8}$$

où Q^ϱ et P_ϱ désignent des fonctions analytiques du point (q, p, t) de l'espace E_{2r+1}. Au système des équations (2.8) correspond dans l'espace affine E_{2r+1} le champ des vecteurs

$$\vec{V} = (Q^1, Q^2, \ldots, Q^r, P_1, P_2, \ldots, P_r, 1). \tag{2.9}$$

Posons maintenant

$$\omega = p_\varrho dq^\varrho - H\,dt\,(^3), \tag{2.10}$$

où H, déterminé par

$$H = T - U, \tag{2.11}$$

représente l'énergie totale du système matériel S.

En appliquant un raisonnement analogue à celui du nº 1 considérons dans E_{2r+1} une ligne fermée quelconque et la suite des trajectoires issues de ses points et constituant un tube. Pour que les équations (2.8) déterminent un mouvement du système S il faut et il suffit, d'après le théorème dynamique de Cartan, que l'intégrale curviligne

$$\oint_C \omega$$

étendue à une ligne fermée quelconque C faisant un tour du tube soit invariante pour les équations (2.8). Cette condition s'exprime par les relations

$$L_V \omega = 0, \quad \underline{\vec{V}|}\,\omega = 0 \tag{2.12}$$

(v. nº 1). En explicitant ces relations on obtient les équations de Hamilton

$$\frac{dq^\varrho}{\dfrac{\partial H}{\partial p_\varrho}} = \frac{dp_\varrho}{-\dfrac{\partial H}{\partial q^\varrho}} = \frac{dt}{1} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.13}$$

ce qui montre l'équivalence des principes de Cartan et de Hamilton.

Ajoutons encore que le principe de Cartan permet aussi d'obtenir

(3) On a supprimé ici, comme d'habitude, le signe de sommation dans le premier terme.

les équations du mouvement des corps solides; pour les obtenir il faut remplacer dans les calculs précédants les sommations sur les points du système S par les intégrations sur les domaines remplis par les corps solides.

Les équations (2.13) déduites de la forme (2.10) donnent aux lois de la Mécanique une forme indépendante du repérage de l'espace E_3. Maintenant nous allons montrer qu'on peut les transformer de manière qu'elles soient indépendantes du repérage de l'espace-temps $E_3 \times t$, le temps ne jouant plus un rôle privilegié (v. [1], p. 14).

Rappelons que nous avons exprimé l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U du système S au moyen de $2r+1$ variables q^ϱ, t, $\dot{q}^\varrho$. Maintenant, pour atteindre notre but, nous allons remplacer les r variables $\dot{q}^\varrho$ par $r+1$ variables $\bar{q}^\varrho$, $\bar{t}$ liées aux précédentes par les relations

$$\bar{q}^\varrho = \bar{t}\dot{q}^\varrho. \tag{2.14}$$

Pour présenter les grandeurs qui se rapportent au système S au moyen des variables $q^\varrho, t, \bar{q}^\varrho, \bar{t}$ nous introduisons nouvelles notations en posant

$$\bar{p}_\varrho = \bar{t}p_\varrho, \qquad \bar{H} = \bar{t}H, \qquad \bar{\omega} = \bar{t}\omega.$$

On aura alors

$$\bar{\omega} = \bar{p}_\varrho dq^\varrho - \bar{H}\,d\bar{t}. \tag{2.15}$$

Pour simplifier les raisonnements nous nous bornons au cas, où le système S est naturel, c'est-à-dire où son énergie cinétique donnée par (2.6) contient seulement des termes du second degré et des termes du degré zéro en $\dot{q}^\varrho$. On peut alors se convaincre facilement que $\bar{H}$, homogène et du premier degré en $\bar{q}^\varrho, \bar{t}$, s'exprime au moyen des $q^\varrho, t, \bar{q}^\varrho, \bar{t}$.

En remplaçant dans les équations (2.12) le symbole ω par $\bar{\omega}$, on obtient en vertu du principe de Cartan les équations

$$\frac{dq^\varrho}{\bar{Q}^\varrho} = \frac{d\bar{p}_\varrho}{\bar{P}_\varrho} = \frac{d\bar{t}}{1},$$

où $\bar{Q}^\varrho$ et $\bar{P}_\varrho$ désignent des fonctions des variables $q^\varrho, t, \bar{q}^\varrho, \bar{t}$.

Ces équations sont covarientemant liées à la forme (2.15) pour les transformations des variables $q^\varrho, \bar{t}$ de l'espace-temps.

3. Point matériel libre dans l'espace d'Einstein. Soient q^ϱ ($\varrho = 1, 2, 3, 4$) les coordonnées d'un point dans l'espace-temps E_4 dont la métrique est définie par la forme

$$ds^2 = g_{\varrho\sigma}dq^\varrho dq^\sigma \tag{3.1}$$

de signature (3.1), s désignant le temps propre d'un point mouvant (Eigenzeit).

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse propre m (Eigenmaß), soumis aux forces de gravitation est égale à l'expression

$$T = \tfrac{1}{2} m g_{\varrho\sigma} \dot{q}^{\varrho} \dot{q}^{\sigma} \quad \left(\dot{q}^{\varrho} = \frac{dq^{\varrho}}{ds}\right). \tag{3.2}$$

Nous définissons les composantes p_{ϱ} du mouvement de la même manière qu'au nº 2 (v. (2.7)) en posant

$$p_{\varrho} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\varrho}}, \tag{3.3}$$

ce qui, d'après (3.2), conduit à l'équation

$$p_{\varrho} = m g_{\varrho\sigma} \dot{q}^{\sigma}. \tag{3.4}$$

En multipliant cette équation par $g^{\varrho\tau}$ et en sommant par rapport à ϱ on obtient

$$p^{\tau} = g^{\varrho\tau} p_{\varrho}. \tag{3.4'}$$

Si l'on tient compte de cette formule, l'équation (3.2) devient

$$T = \frac{1}{2m} g^{\varrho\sigma} p_{\varrho} p_{\sigma}. \tag{3.5}$$

En suivant un raisonnement analogue a celui du nº 2 et en remarquant que l'énergie totale H du point matériel m se réduit à l'énergie cinétique T et que t doit être remplacé par s, nous introduisons la forme ω en se servant de l'expression (2.10). On aura alors

$$\omega = p_{\varrho} dq^{\varrho} - T ds. \tag{3.6}$$

Nous nous placerons maintenant dans l'espace affine E_9 composé des points d'état (q, p, s) et nous emploierons la notion de trajectoires de l'élément matériel m (v. nº 2). Les équations différentielles de ces trajectoires peuvent donc être présentées sous la forme

$$\frac{dq^{\varrho}}{Q^{\varrho}} = \frac{dp_{\varrho}}{P_{\varrho}} = \frac{ds}{1} \quad (\varrho = 1, 2, 3, 4),$$

où Q^{ϱ}, P_{ϱ} désignent fonctions des variables $q^{\sigma}, p_{\sigma}, s$.

Introduisons maintenant dans l'espace affine E_9 le champ des vecteurs

$$\vec{V} = (Q^1, Q^2, Q^3, Q^4, P_1, P_2, P_3, P_4, 1).$$

Le principe de Cartan se traduit par les relations

$$L_V\,\omega = 0, \qquad \underline{V}\big|\,\omega = 0 \tag{3.7}$$

auxquelles doivent obéir les trajectoires du système S. Si l'on explicite les relations (3.7) (v. Appendice), on obtient les équations suivantes

$$\frac{dq^\varrho}{\dfrac{\partial T}{\partial p_\varrho}} = \frac{dp_\varrho}{-\dfrac{\partial T}{\partial q^\varrho}} = \frac{ds}{1} \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 4). \tag{3.8}$$

Nous écrirons ces équations de la manière suivante

$$\frac{dq^\varrho}{ds} = \frac{\partial T}{\partial p_\varrho}, \qquad \frac{dp_\varrho}{ds} = -\frac{\partial T}{\partial q^\varrho}$$

ou, si l'on tient compte des formules (3.5) et (3.2),

$$\dot{q}^\varrho = \frac{1}{2m}\, g^{\varrho\sigma} p_\sigma, \qquad \dot{q}_\varrho = -\tfrac{1}{2} m \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial q^\varrho}\, \dot{q}^\sigma \dot{q}^\tau.$$

Si l'on différentie la première de ces relations, un calcul un peu long mais très facile nous permettra d'obtenir d'elles les équations

$$\ddot{q}^\varrho + \sum_{\sigma\tau} \left\{ {\sigma\tau \atop \varrho} \right\} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\tau = 0, \tag{3.9}$$

les $\left\{ {\sigma\tau \atop \varrho} \right\}$ désignant les bien connus symboles de Christoffel.

Les (3.9) étant les équations des géodésiques dans l'espace-temps E_4 on voit bien que le principe dynamique de Cartan embrasse le cas d'un point matériel libre dans la théorie relativiste généralisée.

Remarquons encore que dans le cas considéré ici les trajectoires des états ont une existance réelle.

4. Système matériel à liaisons nonholonomes ([3], § 29). En conservant les notations et conventions adoptées au commencement du nº 2 supposons que les coordonnées $x_h^\varkappa, t$ $(h = 1, 2, \ldots, N;\ \varkappa = 1, 2, 3)$ d'un point de l'espace-temps $E_3 \times t$ sont assujetties à satisfaire aux équations d'un système de Pfaff composé de $s < 3N+1$ équations suivantes

$$\Lambda^p = \sum_{h=1}^{N} \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} a_{h\lambda}^p\, dx_h^\lambda + a_h^p\, dt \Big) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, s) \tag{4.1}$$

dont les coefficients sont fonctions des variables $x_h^\varkappa, t$.

Nous supposons que le système des équations (4.1), linéaires et indépendantes par rapport aux différentielles $dx_h^\varkappa, dt$ n'est pas complètement intégrable. Dans le cas contraire l'intégrale générale des équations

(4.1) conduirait à des liaisons holonomes et l'on reviendrait au cas du n° 2. En raison de cela nous allons faire une hypothèse plus générale en supposant que le système des équations (4.1) soit en involution par rapport à un nombre $n < 3N+1$ des variables choisies parmi les variables $x_h^\varkappa$, t (4).

Nous changerons maintenant les notations en ecrivant les formes (4.1) de la manière suivante

$$\Lambda^p = dz^p - a_i^p dx^i,$$

où les coefficients a désignent des fonctions des variables x^i, y^t, z^p $(i = 1, 2, \ldots, n; p = 1, 2, \ldots, s; t = 1, 2, \ldots, q)$, le nombre total de ces variables étant égal à $s+q+n = 3N+1$.

Le système des équations (4.1) prend alors la forme

$$\begin{aligned} \Lambda^1 &= dz^1 - a_i^1 dx^i = 0, \\ \Lambda^2 &= dz^2 - a_i^2 dx^i = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Lambda^s &= dz^s - a_i^s dx^i = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dans ces équations nous allons considérer les variables x^i comme indépendantes et les variables z^p, y^t comme des inconnues.

Le système (4.2), étant supposé en involution par rapport aux variables x^i, son intégrale générale peut être présentée par les formules de la forme suivante

$$z^p = \varphi^p(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad y^t = \psi^t(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{4.3}$$

les fonctions z^p, y^t étant indépendantes par rapport aux variables x^i. En éliminant de ces équations les variables x^i on obtient des relations entre les variables z^p, y^t ou, en revenant aux notations primitives, entre les variables $x_h^\varkappa$, t. Nous disons que le degré de liberté du système à relations nonholonome (4.2) est égal à n.

Le raisonnement ci-dessus aboutit ainsi à réduire les liaisons nonholonomes à un système de liaisons holonomes analogue à celui considéré au n° 2. Nous pouvons donc appliquer la méthode développée plus haut pour obtenir les équations de mouvement d'un système dynamique à liaisons nonholonomes, si l'on suppose que sur les points matériels $m_h x_h^\varkappa$ agissent des forces dérivant d'une fonction $U(x_h^\varkappa, t)$.

Maintenant nous allons illustrer la méthode générale developpée précédemment au moyen d'un simple exemple.

Considérons pour ce but dans l'espace euclidien E_3 un simple point matériel $s = mx$ $\big(x = (x^\varkappa) \in E_3\big)$ assujettit aux liaisons définies par une équation de Pfaff

(4) Pour tout ce qui concerne le système de Pfaff en involution v. [2], Part two Ch. V.

$$A = a_\varkappa dx^\varkappa + a\,dt = 0, \tag{4.4}$$

dont les coefficients sont fonctions des variables $x^\varkappa$, t. La classe c de l'équation (4.4) peut être égale à 1 ou 3 (v. [2], § 79). Nous laissons de coté l'hypothèse $c = 1$, car dans ce cas l'équation (4.4) conduit à une liaison holonome. Si $c = 3$ l'équation (4.4) peut être transformée en la suivante

$$dq^1 - q^2 dq = 0 \tag{4.5}$$

(forme canonique d'une équation de Pfaff, [2], § 81) au moyen d'une transformation analytique

$$x^\varkappa = \psi^\varkappa(q, q^1, q^2), \qquad t = \psi(q, q^1, q^2), \tag{4.6}$$

où q, q^1, q^2 désignent des variables indépendantes. Il résulte de l'équation (4.5) qu'il doit être

$$q^1 = \varphi(q), \qquad q^2 = \varphi'(q), \tag{4.7}$$

où $\varphi(q)$ désigne une fonction arbitraire de la variable q. On voit ainsi que le degré de liberté du point matériel s est égal à un et que la liaison nonholonome (4.4) conduit aux liaisons holonomes definies par les relations (4.7).

Supposons maintenant que sur le point matériel s agit une force dérivant d'une fonction $U(x^\varkappa, t)$; sous l'action de cette force le point s prend le mouvement défini par l'équation

$$m\ddot{x}^\varkappa = \frac{\partial U}{\partial x^\varkappa} \tag{4.8}$$

et son énergie cinétique est donnée par la formule

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2. \tag{4.9}$$

Considérons le vecteur $\dot{x} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$; si l'on calcule les différentielles $dx^\varkappa$ et dt en partant des équations (4.6) et (4.7), on se convaincra facilement que les grandeurs $\dot{x}^\varkappa = \dfrac{dx^\varkappa}{dt}$ et l'énergie cinétique T s'exprimerons comme fonctions des variables q, t; il en sera de même de la fonction $U(x^\varkappa, t)$ et du vecteur

$$p = m\dot{x}. \tag{4.10}$$

Il résulte des formules (4.9) et (4.10) que l'enérgie cinétique T s'exprimera comme fonction des variables q, p, t.

Posons maintenant

$$\omega = p\,dq - H\,dt, \tag{4.11}$$

ou l'énergie totale $H = T - U$ du point materiel s est, d'après ce que nous avons vu, une fonction des variables q, p, t. En suivant la méthode developpée dans les n$^{\text{os}}$ précédents introduisons l'espace affine E_3 des états (q, p, t) du point matériel s et ses trajectoires. Les équations d'une trajectoire peuvent être présentées sous la forme

$$\frac{dq}{Q} = \frac{dp}{P} = \frac{dt}{1}, \tag{4.12}$$

Q et P étant des fonctions des variables q, p, t. Aux équations (4.12) correspond dans l'espace des états le champ des vecteurs $V(Q, P, 1)$.

D'après le principe de Cartan il doit être

$$L_V \omega = 0, \qquad V \rfloor \omega = 0.$$

En développant ces équations on obtient

$$\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}} = \frac{dp}{-\dfrac{\partial H}{\partial q}} = \frac{dt}{1}; \tag{4.13}$$

nous avons ainsi montré que le mouvement du point matériel s satisfaisant à la condition nonholonome (4.4) est déterminé par les équations hamiltoniennes (4.13).

Le résultat obtenu résout un intéressant problème mécanique.

Supposons que sur une plaque horizontale rugueuse se trouve une petite roue de masse m, douée d'un bord aigu et perpendiculaire à la plaque. Rapportons le plan de la plaque à un repère orthogonal xOy et désignons par x et y les coordonnées du point de contact de la roue avec la plaque. Supposons que sous l'action d'une force extérieure parallèle à la roue elle se meut dans son plan. Ce mouvement doit obéir à la relation nonholonome

$$dy - \operatorname{tg}\theta\, dx = 0$$

(v. [3], p. 39 ou [4], p. 227), ou θ désigne l'angle du plan de la roue avec l'axe Ox. Il est visible que, abstraction faite des notations, la dernière relation se confond avec l'équation (4.5), par conséquent le mouvement de la roue est décrit par les équations (4.13).

Appendice

Soit

$$\omega = a_h dx^h \qquad (h, i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

une forme différentielle C^1 et

$$V = (X^1, X^2, \ldots, X^n)$$

un vecteur C^1. Les opérateurs $V \lrcorner\, \omega$ et $L_V \omega$ sont définis respectivement par les formules

$$(2) \qquad V \lrcorner\, \omega = a_h X^h \quad \text{et} \quad L_V \omega = \left(X^i \partial_i a_h - a_i \frac{\partial X^i}{\partial x^n} \right) dx^h$$

(v. [2], p. 390 et p. 396).

1° Pour appliquer ces formules à la forme (1.6) et au vecteur (1.5) il faut y poser $n = 7$, $x^4 = t$, $a_1 = p^1$, $a_2 = p^2$, $a_3 = p^3$, $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, $a_7 = -H$; $X^1 = Q^1$, $X^2 = Q^2$, $X^3 = Q^3$; $X^4 = P^1$, $X^5 = P^2$, $X^6 = P^3$; $X^7 = 1$.

Cela posé les formules (2) conduiront respectivement aux équations (1.8)-(1.11).

2° De même pour assimiler les équations (1) et (2) à la forme (2.10) et au vecteur (2.9) il faut poser $n = 2r+i$, $x^\varrho = q^\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$; $x^{r+1} = p_1$, $x^{r+2} = p_2, \ldots, x^{2r} = p_r$, $x^{2r+1} = t$; $a_\varrho = p_\varrho$, $a_{r+1} = a_{r+2} = \ldots = a_{2r} = 0$, $a_{2r+1} = -H$; $V^\varrho = Q^\varrho$, $V^{r+1} = P_1$, $V^{r+2} = P_2, \ldots, V^{2r} = P_r$, $V^{2r+1} = 1$.

Si l'on fait ces changements des notations, on obtient la forme (2.10) et les équations (2.8).

3° Pour obtenir des formules (2) les équations du n° 3 il faut poser $n = 9$, $x^\varrho = q^\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, 4)$, $x^5 = p_1$, $x^6 = p_2$, $x^7 = p_3$, $x^8 = p_4$, $x^9 = s$; $a_\varrho = p_\varrho$, $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$, $a_9 = -T$; $V^\varrho = Q^\varrho$, $V^5 = P_1$, $V^6 = P_2$, $V^7 = P_3$, $V^8 = P_4$, $V^9 = 1$.

4° Si enfin on veut obtenir les équations (4.11), il faut poser $n = 3$, $x^1 = q$, $x^2 = p$, $x^3 = t$; $a_1 = p$, $a_2 = 0$, $a_3 = -H$; $V^1 = Q$, $V^2 = P$, $V^3 = 1$.

Travaux cités

[1] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris 1922.
[2] W. Ślebodziński, *Exterior forms and their applications*, Warszawa 1970.
[3] J. L. Synge, *Classicaldynamics*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960.
[4] E. T. Whittaker, *Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper*, Berlin 1924.