ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XIII (1969)
ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XIII (1969)

L. KUBIK (Warszawa)

Sur un problème de M. D. Dugué

Dugué a remaqué(1) que le couple des fonctions caractéristiques

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{1+it}, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{1-it}$$

vérifie la condition

$$\frac{\varphi_1(t)+\varphi_2(t)}{2} = \varphi_1(t)\varphi_2(t). \tag{1}$$

En plus, il a posé le problème d'existence d'autres couples des fonctions caractéristiques satisfaisant à la condition (1).

Dans cette note on donne deux classes de tels couples. Elles seront englobées dans des classes des couples satisfaisant à la condition

$$p\varphi_1(t)+q\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t), \quad p+q = 1,\ p>0,\ q>0, \tag{2}$$

qui pour $p = \frac{1}{2} = q$ se reduit à la condition (1).

La première classe est formée par la famille à deux paramètres des couples des fonctions caractéristiques

$$\varphi_1(t) = \frac{a}{a+it}, \quad \varphi_2(t) = \frac{pa}{pa-itq}, \quad a>0. \tag{3}$$

Il est facile à verifier que $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont des fonctions caractéristiques des variables aléatoires X_1 et X_2 définies par les densités de probabilité

$$p_1(x) = \begin{cases} ae^{ax} & \text{pour} \quad x<0, \\ 0 & \text{pour} \quad x>0 \end{cases}$$

et

$$p_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x<0, \\ \dfrac{p}{q}ae^{-\frac{p}{q}ax} & \text{pour} \quad x>0 \end{cases}$$

(1) Voir D. Dugué, *Arithmétique des lois de probabilités*, Mem. Sci. Math. 137 (Paris 1957), p. 21.

respectivement. La variable aléatoire $X = X_1+X_2$ a pour fonction caractéristique

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = \frac{pa^2}{(a+it)(pa-itq)}$$

et pour densité de probabilité

$$p(x) = \begin{cases} pae^{ax} & \text{pour} \quad x<0, \\ pae^{-\frac{p}{q}ax} & \text{pour} \quad x>0. \end{cases}$$

La deuxième classe est formée par la famille à deux paramètres des couples des fonctions caractéristiques

$$(4) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(t) &= q+p\cos tb - ip\sin tb, \\ \varphi_2(t) &= p+q\cos tb + iq\sin tb. \end{aligned}$$

Ce sont évidemment des fonctions caractéristiques des variables aléatoires X_1 et X_2 ayant comme distributions

$$P(X_1 = -b) = p, \quad P(X_1 = 0) = q$$

et

$$P(X_2 = 0) = p, \quad P(X_2 = b) = q$$

respectivement. La variable aléatoire $X = X_1+X_2$ a pour fonction caractéristique

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = 2pq+(p^2+q^2)\cos tb+i(q^2-p^2)\sin tb$$

et pour distribution

$$P(X = -b) = p^2, \quad P(X = 0) = 2pq, \quad P(X = b) = q^2.$$

En posant $p = q = \frac{1}{2}$ dans les formules (3) et (4) nous obtenons deux classes des couples des fonctions caractéristiques satisfaisant à la condition (1). En posant $p = q = \frac{1}{2}$ et $a = 1$ dans les formules (3) nous obtenons le couple des fonctions caractéristiques considéré par M. D. Dugué.

On peut poser le problème de la caractérisation de l'ensemble de tous les couples des fonctions caractéristiques qui satisfont à la condition (1) ou à la condition (2) qui l'englobe. Jusqu'à présent il n'est pas encore resolu.

CHAIRE DE LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE