

J. CHABROWSKI (Katowice)

## Le premier problème de Fourier relatif au système parabolique d'équations quasi linéaires dans les domaines non cylindriques

Kusano [2] a démontré le théorème sur l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites pour le système de la forme

$$(0.1) \quad L^k [u^k] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(t, x) u_{x_i x_j}^k + \sum_{i=1}^n b_{ki}(t, x, u^k) u_{x_i}^k - u_t^k \\
 = f_k(t, x, u^1, \dots, u^N), \quad k = 1, \dots, N.$$

Dans ce théorème on peut généraliser les hypothèses concernant la régularité de la surface latérale du domaine et de la fonction donnée sur la frontière.

§ 1. D'abord nous introduisons des définitions et des notations. Soit  $x(x_1, \dots, x_n)$  un point de l'espace euclidien  $E_n$  et  $(t, x)$  un point de l'espace-temps  $E_{n+1}$ . Nous désignons les distances entre les points  $P(t, x)$  et  $P'(t', x')$  par

$$\varrho(P, P') = [(t-t')^2 + |x-x'|^2]^{1/2} \quad \text{et} \quad d(P, P') = [|t-t'| + |x-x'|^2]^{1/2}$$

où

$$|x-x'|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2.$$

On appelle  $d(P, P')$  la *distance parabolique*. Nous définissons les suivantes normes pour les fonctions déterminées dans l'ensemble  $B \subset E_{n+1}$ :

$$|u|_0^B = \sup_{P \in B} |u(P)|, \quad |u|_a^B = |u|_0^B + \sup_{\substack{P, P' \in B \\ P \neq P'}} \frac{|u(P) - u(P')|}{d(P, P')^a},$$

$$|u|_{1+a}^B = |u|_a^B + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|_a^B, \quad |u|_{2+a}^B = |u|_{1+a}^B + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|_{1+a}^B + |u_t|_a^B \quad (0 < a < 1).$$

On désigne par  $C_q(B)$  la classe des fonctions  $u(t, x)$  définies dans un domaine  $B$  et satisfaisant à la condition  $|u|_q^B < \infty$ , où  $q = 0, \alpha, 1 + \alpha, 2 + \alpha$ .

Soit un domaine  $D$  borné, ouvert, non cylindrique et contenu entre les plans  $t = 0, t = T < \infty$  et la surface latérale  $S$ . Soit  $\partial D = S \cup \Omega_0$ , où  $\Omega_{t_0} = (\bar{D} \cap (t = t_0))$ .

Nous disons que le domaine  $D$  satisfait à la condition (d), lorsque pour chaque  $t_0, 0 < t_0 < T$ , et pour tout point  $x_0 \in \Omega_{t_0}$  on peut faire correspondre à toute suite  $t_\nu$ , telle que  $0 \leq t_\nu \leq T$  et  $t_\nu \rightarrow t_0$ , une suite de points  $x_\nu$  de façon que  $x_\nu \in \Omega_{t_\nu}$  et  $x_\nu \rightarrow x_0$ .

La surface  $S$  vérifie la condition (s), lorsqu'on peut la couvrir par un nombre fini des sphères  $\{\Sigma_\nu\}$  de manière que la portion de la surface  $S$  découpée par  $\Sigma_\nu$  admet la représentation (pour certain  $i$ ) de la forme

$$x_i = h(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in T_\nu$$

et possédant des propriétés suivantes:

- (i) la fonction  $h$  appartient à la classe  $C_{2+\alpha}(T_\nu)$ ,
- (ii) les dérivées  $\partial h / \partial x_k$  vérifient la condition de Hölder par rapport à la distance  $\varrho(P, P')$ .

On dit que la fonction  $\varphi(t, x)$  déterminée sur la frontière  $\partial D$  vérifie la condition (F), s'il existe une fonction  $\Phi(t, x) \in C_{2+\alpha}(D)$  telle que l'on ait

$$\Phi(t, x) = \varphi(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \partial D.$$

Dans ce cas nous pouvons définir la norme  $|\varphi|_{2+\alpha}^{\partial D} = \inf |\Phi|_{2+\alpha}^D$  (infimum étant pris par rapport à tous les prolongements  $\Phi \in C_{2+\alpha}(D)$ ).

Nous disons que la suite de fonctions  $f_k(t, x, u^1, \dots, u^N)$  déterminées pour  $(t, x) \in \bar{D}$  et  $(u^1, \dots, u^N)$  arbitraire, satisfait à la condition  $W$ , lorsque l'indice  $k_0$  étant fixé arbitrairement les relations  $z^{k_0} = z^{k_0}, z^j \geq z^j$  ( $j \neq k_0$ ) impliquent l'inégalité ([3])

$$f_{k_0}(t, x, Z) \leq f_{k_0}(t, x, \tilde{Z}).$$

On dit que la fonction  $\omega_Q(t, x)$  est la barrière de régularité du point  $Q \in \partial D$  pour l'équation quasi linéaire du type parabolique

$$L[v(t, x)]u(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x, v)u_{x_i} + c(t, x)u - u_t = 0,$$

si elle satisfait aux conditions suivantes:

1°  $\omega_Q(t, x)$  est continue dans la fermeture de  $D$ , de classe  $C^1$  dans  $D$  et possède les dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables  $(x_1, \dots, x_n)$  continues dans  $D$ .

2° Pour chaque point  $P \neq Q$  on a  $\omega_Q(P) > 0$  et  $\omega_Q(Q) = 0$ .

3° Pour chaque fonction  $v(t, x)$  telle que  $|v| \leq K$  ( $K$  est une certaine constante) est vérifiée l'inégalité

$$L[v(t, x)]\omega_Q(t, x) \leq -1 \quad \text{pour } (t, x) \in D.$$

§ 2. Dans nos considérations nous allons utiliser le théorème suivant:

THÉORÈME 1. Nous admettons les hypothèses

1° Le domaine  $D$  et la surface latérale  $S$  vérifient les conditions (d) et (s) respectivement.

2° Pour  $(t, x) \in \bar{D}$  et pour tout vecteur  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(t, x) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2, \quad a_0 > 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

3° Les coefficients  $a_{ij}^k(t, x)$  appartiennent à la classe  $C_\alpha(D)$  et de plus vérifient la condition de Lipschitz par rapport à la distance  $\varrho(P, P')$  sur la surface  $S$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, N$ ).

4° Les coefficients  $b_{ki}(t, x, u^k)$  déterminés pour  $(t, x) \in D$  et  $-\infty < u^k < +\infty$  vérifient la condition de Hölder par rapport à la distance  $d(P, P')$  avec l'exposant  $\alpha$  et la condition de Lipschitz par rapport à la variable  $u^k$ .

5° Les fonctions  $f_k(t, x, u^1, \dots, u^N)$  vérifient la condition  $W$  la condition de Lipschitz par rapport aux variables  $(u^1, \dots, u^N)$  et appartiennent à la classe  $C_\alpha(D)$  pour chaque suite de variables  $(u^1, \dots, u^N)$ .

6° Les fonctions  $\varphi^k(t, x)$  définies pour  $(t, x) \in \partial D$  vérifient la condition (F).

7° Il existe deux suites de fonctions  $\tilde{\Theta}(t, x) = \{\tilde{\Theta}^k(t, x)\}$ ,  $\underline{\Theta}(t, x) = \{\underline{\Theta}^k(t, x)\}$ ,  $k = 1, \dots, N$  qui appartiennent aux classes  $C_\alpha(\bar{D})$ ,  $C^1$  et possèdent les dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables  $(x_1, \dots, x_n)$  continues dans  $D$  et de plus vérifient les inégalités

$$f_k(t, x, \tilde{\Theta}(t, x)) - L^k[\tilde{\Theta}^k(t, x)] \geq 0 \geq f_k(t, x, \underline{\Theta}(t, x)) - L^k[\underline{\Theta}^k(t, x)]$$

pour  $(t, x) \in \bar{D} - \partial D$

$$\tilde{\Theta}^k(t, x) \geq \varphi^k(t, x) \geq \underline{\Theta}^k(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \bar{D}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Dans toutes ces hypothèses il existe l'unique solution du système (0.1) satisfaisant aux conditions limites

$$(2.1) \quad u^k(t, x) = \varphi^k(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \partial D, \quad k = 1, \dots, N$$

et de plus cette solution vérifie les inégalités

$$(2.2) \quad |u^k|_{2+\alpha_1}^A \leq C \left( F + \sum_{i=1}^N |f_i(t, x, u^1, \dots, u^N)|_0^A + \sum_{i=1}^N |u^i|_0^A + \sup_{(t,x) \in \partial D} |\varphi^k(t, x)| \right)$$

pour chaque ensemble  $\Delta$  fermé, contenu dans  $D$  et pour chaque  $a_1 \in (0, \alpha)$ . La constante  $C$  ne dépend pas de la surface latérale  $S$  et de la solution ( $F$  désigne la constante de Hölder pour fonctions  $f_k(t, x, u^1, \dots, u^N)$  par rapport aux variables  $(t, x)$ ).

Démonstration. En vertu du théorème 2.2 dans [2] il existe la solution du problème (0.1)-(2.1). L'hypothèse 5° et la condition (d) garantissent l'unicité de la solution. Nous montrerons les inégalités (2.2). On sait que la solution du problème (0.1)-(2.1) est la limite de la suite  $u_m^k(t, x)$  telle que ([2])

$$L^k[u_m^k(t, x)] + Mu_m^k(t, x) = f_k(t, x, u_{m-1}^1, \dots, u_{m-1}^N) + Mu_{m-1}^k(t, x) \\ \text{pour } (t, x) \in \bar{D} - \partial D,$$

$u_m^k(t, x) = \varphi^k(t, x)$  pour  $(t, x) \in \partial D$ ,  $u_0^k(t, x) = \tilde{\Theta}^k(t, x)$  pour  $(t, x) \in \bar{D}$ , où  $M$  désigne la constante de Lipschitz pour les fonctions  $f_k(t, x, u^1, \dots, u^N)$  par rapport aux variables  $(u^1, \dots, u^N)$ . Kusano [2] a démontré que les fonctions  $u_m^k(t, x)$  et  $u^k(t, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m^k(t, x)$  vérifient les inégalités

$$(2.3) \quad \underline{\Theta}^k(t, x) \leq u_m^k(t, x) \leq \tilde{\Theta}^k(t, x), \quad \underline{\Theta}^k(t, x) \leq u^k(t, x) \leq \tilde{\Theta}^k(t, x)$$

( $k = 1, \dots, N$ ).

En vertu du théorème 6 dans [1] nous avons

$$(2.4) \quad |u_m^k|_{2+\alpha} \leq M_1 (|f_k(t, x, u_{m-1}^1, \dots, u_{m-1}^N)|_\alpha^A + \sup_{(t,x) \in \partial D} |\varphi^k(t, x)| + M |u_{m-1}^k|_\alpha^A),$$

$$|u_{m-1}^k|_{1+\delta}^A \leq M_2 (|f_k(t, x, u_{m-2}^1, \dots, u_{m-2}^N)|_0^A + M |u_{m-2}^k|_0^A + |u_{m-1}^k|_0^A)$$

où les constantes  $M_1$  et  $M_2$  ne dépendent pas de la surface  $S$  et de  $m$ . D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} & d(P, \bar{P})^{-\alpha} |f_k(t, x, u_{m-1}^1(t, x), \dots, u_{m-1}^N(t, x)) - \\ & \quad - f_k(\bar{t}, \bar{x}, u_{m-1}^1(\bar{t}, \bar{x}), \dots, u_{m-1}^N(\bar{t}, \bar{x}))| \\ & \leq d(P, \bar{P})^{-\alpha} |f_k(t, x, u_{m-1}^1(t, x), \dots, u_{m-1}^N(t, x)) - \\ & \quad - f_k(\bar{t}, \bar{x}, u_{m-1}^1(t, x), \dots, u_{m-1}^N(t, x))| + \\ & \quad + d(P, P)^{-\alpha} |f_k(\bar{t}, \bar{x}, u_{m-1}^1(\bar{t}, \bar{x}), \dots, u_{m-1}^N(\bar{t}, \bar{x})) - \\ & \quad - f_k(\bar{t}, \bar{x}, u_{m-1}^1(\bar{t}, \bar{x}), \dots, u_{m-1}^N(\bar{t}, \bar{x}))| \\ & \leq F + \sum_{i=1}^N M d(P, P)^{-\alpha} |u_{m-1}^i(t, x) - u_{m-1}^i(\bar{t}, \bar{x})|. \end{aligned}$$

Il résulte l'inégalité dernière et de (2.4) en prenant  $\delta = a$  que

$$\begin{aligned} |u_m^k|_{2+a}^A &\leq M_1 |f_k(t, x, u_{m-1}^1, \dots, u_{m-1}^N)|_0^A + \\ &+ M_1 \left[ F + \sum_{i=1}^N M (M_2 |f_i(t, x, u_{m-2}^1, \dots, u_{m-2}^N)|_0^A + \right. \\ &+ M M_2 |u_{m-2}^i|_0^A + M_2 |u_{m-1}^i|_0^A) \left. \right] + M_1 \sup_{(t,x) \in \partial D} |\varphi^k(t, x)| + \\ &+ M_1 M_2 M (|f_k(t, x, u_{m-2}^1, \dots, u_{m-2}^N)|_0^A + M |u_{m-2}^k|_0^A + |u_{m-1}^k|_0^A). \end{aligned}$$

D'ici, en choisissant des constantes convenablement, nous obtenons

$$(2.5) \quad |u_m^k|_{2+a}^A \leq \tilde{C} \left( F + |f_k(t, x, u_{m-1}^1, \dots, u_{m-1}^N)|_0^A + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N |f_i(t, x, u_{m-2}^1, \dots, u_{m-2}^N)|_0^A + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N |u_{m-2}^i|_0^A + \sum_{i=1}^N |u_{m-1}^i|_0^A + \sup_{(t,x) \in \partial D} \varphi^k(t, x) \right)$$

où  $C$  ne dépend pas de  $m$  et de la surface  $S$ . Il résulte des inégalités (2.5) et (2.3) qu'il existe une constante  $C_1$  non dépendant de  $m$  et telle que  $|u_m^k|_{2+a}^A \leq C_1$ . Donc on peut supposer que  $|u_m^k|_{2+\alpha_1}^A \rightarrow |u^k|_{2+\alpha_1}^A$ , parce que la suite  $u_m^k$  est compacte au sens de la norme  $| \cdot |_{2+\alpha_1}^A$ ,  $\alpha_1 < a$ . D'autre part nous avons  $|u_m^k|_{2+\alpha_1}^A \leq \text{const} \cdot |u_m^k|_{2+a}^A$ , où la constante ne dépend que du diamètre du domaine  $\Delta$ , donc le passage à la limite dans l'inégalité (2.5) nous donne l'estimation (2.2).

§ 3. Avant de passer à la démonstration du notre théorème nous introduisons encore la suivante désignation.

Par  $S_\eta$  nous désignons l'ensemble des points du domaine  $\bar{D}$ , pour lesquels la distance de la surface latérale  $S$  est inférieure à  $\eta$ .

THÉORÈME 2. Nous supposons que les hypothèses 2°, 4°, 5° du théorème 1 sont vérifiées et que

1° Dans chaque point de la frontière parabolique  $\partial D$  il existe la barrière de régularité  $\omega_Q(t, x)$  commune pour tous les opérateurs  $L^k[v^k]u^k$ .

3° Il existe une suite d'ensembles non cylindriques (cf. définition du § 1)  $D_m$  telle, que  $\bar{D}_m \subset D$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m = D$ ,  $D_m \subset D_{m+1}$  pour  $m = 1, 2, \dots$  et chaque ensemble  $D_m$  vérifie les conditions (d) et (s). Le domaine  $D$  vérifie la condition (d).

6°  $a_{ij}^k(t, x)$  appartiennent à la classe  $C_a(D)$  et satisfont à la condition de Lipschitz par rapport aux variables  $(t, x)$  pour  $(t, x) \in S_\eta$  (pour un certain  $\eta > 0$ ),  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

7° Les fonctions  $\varphi^k(t, x)$  sont continues pour  $(t, x) \in \partial D$ .

8° Il existe deux suites de fonctions  $\{\tilde{\Theta}^k(t, x)\}, \{\underline{\Theta}^k(t, x)\}, k = 1, \dots, N$  qui appartiennent aux classes  $C_\alpha(\bar{D})$  et  $C^1$  et possèdent les dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables  $(x_1, \dots, x_n)$  continues dans  $D$  et de plus vérifient les inégalités

$$f_k(t, x, \tilde{\Theta}(t, x)) - L^k[\tilde{\Theta}^k(t, x)] \geq 0 \geq f_k(t, x, \underline{\Theta}(t, x)) - L^k[\underline{\Theta}^k(t, x)]$$

pour  $(t, x) \in \bar{D} - \partial D$  et

$$\tilde{\Theta}^k(t, x) > \varphi^k(t, x) > \underline{\Theta}^k(t, x)$$

pour  $(t, x) \in \partial D, k = 1, \dots, N$ .

Dans toutes ces hypothèses il existe l'unique solution du système (0.1) satisfaisant aux conditions aux limites

$$u^k(t, x) = \varphi^k(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \partial D, k = 1, \dots, N.$$

Démonstration. D'abord nous démontrerons notre théorème sous l'hypothèse additionnelle que les fonctions données sur la frontière satisfont à la condition (F) et ensuite nous nous débarrasserons de cette hypothèse. Supposons donc que les fonctions  $\varphi^k(t, x)$  satisfassent à la condition (F). Soit  $\{D_m\}$  une suite d'ensembles vérifiant l'hypothèses 3° et considérons le problème de Fourier

$$(3.1) \quad L^k[u^k(t, x)] = f_k(t, x, u^1(t, x), \dots, u^N(t, x)),$$

$$(3.1^m) \quad u^k(t, x) = \Phi_m^k(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \partial D_m$$

où

$$\Phi_m^k(t, x) = \Phi^k(t, x)|_{\partial D_m}$$

et  $\Phi^k(t, x)$  désigne un prolongement appartenant à la classe  $C_\alpha(D)$  de la fonction  $\varphi^k(t, x)$  et telle que  $\underline{\Theta}^k(t, x) \leq \Phi^k(t, x) \leq \tilde{\Theta}^k(t, x)$  pour  $(t, x) \in \bar{D}$ . On peut supposer que les ensembles  $S_m$  sont contenus dans  $S_n$ , alors en vertu du théorème 2.2 dans [2] il existe l'unique solution du problème (3.1)-(3.1<sup>m</sup>). Il résulte du théorème 1 que pour  $\alpha_1 < \alpha$  nous avons

$$|u_m^k|_{2+\alpha_1}^{\bar{D}_l} \leq C \left( F + \sum_{i=1}^N |f_i(t, x, u_m^1, \dots, u_m^N)|_0^{\bar{D}_l} + \sum_{i=1}^N |u_m^i|_0^{\bar{D}_l} + \sup_{(t, x) \in \partial D_l} |\varphi^k(t, x)| \right)$$

pour  $m > 1$ , où la constante  $C$  ne dépend pas des surfaces latérales  $S_m$ , des domaines  $D_m$  et de  $m$ . D'après l'inégalité (2.3) nous obtenons qu'il existe une constante  $C_2$  non dépendant des surfaces  $S_m$  et de  $m$  et telle que

$$|u_m^k|_{2+\alpha_1}^{\bar{D}_l} \leq C_2.$$

En appliquant le théorème d'Arzelà et la méthode diagonale nous en concluons l'existence d'une suite partielle  $\{u_{v_m}^k\}$  presque uniformément

convergente dans  $D$  avec les dérivées  $\partial/\partial x_i, \partial^2/\partial x_i \partial x_j, \partial/\partial t, i, j = 1, \dots, n$ . Evidemment les limites  $u^k(t, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m^k(t, x)$  satisfont au système

(0.1). Maintenant nous montrerons que les limites  $u^k(t, x)$  coïncident avec les fonctions données sur la frontière  $\partial D$ . Soit  $\varepsilon > 0$  un nombre arbitraire. D'après la continuité de la fonction  $\Phi^k(t, x)$  nous choisissons la boule  $V_Q$  de centre  $Q$  de façon que l'on ait

$$(3.2) \quad \varphi^k(Q) - \varepsilon \leq \Phi^k(t, x) \leq \varphi^k(Q) + \varepsilon \quad \text{pour } (t, x) \in V_Q \cap \bar{D}.$$

Pour  $(t, x) \in V_Q \cap \bar{D}_m = G_m$  nous définissons les fonctions auxiliaires

$$\bar{v}_m^k(t, x) = \varphi^k(Q) + \varepsilon + C\omega_Q(t, x) - u_m^k(t, x),$$

$$\underline{v}_m^k(t, x) = \varphi^k(Q) - \varepsilon - C\omega_Q(t, x) - u_m^k(t, x) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Désignons par  $\partial D'_m$  la partie de l'ensemble  $\partial D_m$  située dans  $G_m$  et par  $F'(V_Q)$  la partie de la surface de la boule  $V_Q$  contenue dans  $\bar{D}$ . En vertu de (3.2) et (3.1<sup>m</sup>) nous avons

$$(3.3) \quad \bar{v}_m^k(t, x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{v}_m^k(t, x) \leq 0 \quad \text{pour } (t, x) \in \partial D'_m.$$

Ces inégalités sont valables aussi pour  $(t, x) \in F'(V_Q)$  pour  $C$  assez grand, parce que la fonction  $\omega_Q(t, x)$  atteint un minimum positif sur la frontière  $F'(V_Q)$  et les fonctions  $u_m^k$  sont bornées indépendamment de  $m$ . Donc, les inégalités (3.3) sont valables sur la frontière de l'ensemble  $G_m$ . D'autre part en vertu de la définition de la barrière et de (2.3) nous avons

$$(3.4) \quad L^k[u_m^k] \bar{v}_m^k = CL^k[u_m^k] \omega_Q(t, x) - f_k(t, x, u_m^1, \dots, u_m^N) < 0$$

pour  $(t, x) \in G_m$  et pour  $C$  assez grand. D'une façon analogue on obtient

$$(3.5) \quad L^k[u_m^k] \underline{v}_m^k > 0 \quad \text{pour } (t, x) \in G_m.$$

Il résulte des inégalités (3.3), (3.4) et (3.5) que

$$(3.6) \quad \bar{v}_m^k \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{v}_m^k \leq 0 \quad \text{pour } (t, x) \in G_m,$$

parce que  $\bar{v}_m^k$  ne peut pas atteindre un minimum négatif dans  $G_m$  et  $\underline{v}_m^k$  ne peut pas atteindre un maximum positif dans  $G_m$ . D'après les dernières inégalités nous avons

$$(3.7) \quad \varphi^k(Q) - \varepsilon - C\omega_Q(t, x) \leq u_m^k(t, x) \leq \varphi^k(Q) + \varepsilon + C\omega_Q(t, x)$$

d'où il résulte que

$$\varphi^k(Q) - \varepsilon \leq \liminf_{(t, x) \rightarrow Q} u^k(t, x) \leq \limsup_{(t, x) \rightarrow Q} u^k(t, x) \leq \varphi^k(Q) + \varepsilon$$

parce que  $\omega_Q(Q) = 0$ , ce qui signifie que

$$u^k(Q) = \lim_{(t, x) \rightarrow Q} u^k(t, x) = \varphi^k(Q) \quad \text{pour } Q \in \partial D.$$

Maintenant supposons que les fonctions  $\varphi^k(t, x)$  soient seulement continues. Par  $\Phi^k(t, x)$  nous désignons le prolongement continu de la fonction  $\varphi^k(t, x)$  sur l'ensemble  $\bar{D}$ . En vertu de l'hypothèse 8° on peut choisir ce prolongement de façon que l'on ait

$$\underline{\Theta}^k(t, x) < \Phi^k(t, x) < \tilde{\Theta}^k(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \bar{D}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Soit  $\psi_m^k$  une suite de fonctions de classe  $C_{2+a}(D)$  uniformément convergente vers la fonction  $\Phi^k(t, x)$ . D'après l'inégalité dernière on peut la choisir de sorte que

$$\underline{\Theta}^k(t, x) \leq \psi_m^k(t, x) \leq \tilde{\Theta}^k(t, x), \quad k = 1, \dots, N$$

pour chaque  $m$  et pour  $(t, x) \in \bar{D}$ . Considérons le problème de Fourier

$$(3.8) \quad L^k[u_m^k(t, x)] = f_k(t, x, u_m^1(t, x), \dots, u_m^N(t, x)),$$

$$(3.9) \quad u_m^k(t, x) = \psi_m^k(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \partial D, \quad k = 1, \dots, N.$$

Il résulte de la première partie de la démonstration qu'il existe l'unique solution du problème (3.8), (3.9). Il est facile de montrer à l'aide du théorème 1 que

$$|u_m^k|_{2+a_1}^{\Delta} < C \left( F + \sum_{i=1}^N |f_i(t, x, u_m^1, \dots, u_m^N)|_{\Delta}^{\Delta} + \sup_{(t,x) \in \partial D} |\Psi_m^k(t, x)| \right)$$

où  $\Delta$  est un domaine arbitraire, fermé, contenu dans  $D$ , et la constante  $C$  ne dépend pas de  $m$ . C'est pourquoi nous pouvons supposer que la suite  $u_m^k(t, x)$  est presque uniformément convergente dans  $D$  avec les dérivées  $\partial/\partial x_i$ ,  $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$ ,  $\partial/\partial t$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . En appliquant la barrière nous démontrons que la fonction  $u^k(t, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m^k(t, x)$  vérifie la condition  $u^k(Q) = \varphi^k(Q)$  pour  $Q \in \partial D$ , et de plus il est facile de montrer que la suite de fonctions  $u^1(t, x), \dots, u^N(t, x)$  satisfait au système (0.1).

#### Travaux cités

[1] Л. Камынин, В. Масленникова, *О решении первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрических областях*, Матем. Сб. Т. 57 (99), № 2 (1962), pp. 241-264.

[2] T. Kusano, *On the first boundary problem for quasi-linear systems of parabolic differential equations in non-cylindrical domains*, Funkcialaj Ekvacioj (Serio Internacia), V. 7 (1965) Tokyo, pp. 163-178.

[3] J. Szarski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), pp. 15-20.