ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XII (1968)
ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XII (1968)

J. Ambrosiewicz (Ciechanowiec)

O pewnym problemie związanym z wartościami własnymi macierzy

W artykule [1] A. Fadiniego rozwiązany jest następujący problem. Dana jest macierz n-tego stopnia $G = (g_{ij})$. Szuka się macierzy tego samego stopnia $F = (f_{ij})$, dla której macierz GF miałaby zadany ciąg wartości własnych

$$v_1, v_2, \ldots, v_n. \tag{1}$$

Zakłada się przy tym, że macierz G jest nieosobliwa i rzeczywista, a w ciągu (1) wszystkie liczby są rzeczywiste, różne między sobą i różne od zera.

Celem tej pracy jest rozwiązanie następującego zagadnienia. Niech będzie dana macierz A i ciąg liczb

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n. \tag{2}$$

Szukamy takiej macierzy B przemiennej z A, aby macierz AB miała wartości własne (2).

Zagadnienie to można rozwiązać korzystając z twierdzenia Hamiltona-Cayleya. Jeżeli mamy wartości własne macierzy AB, to można znaleźć wielomian charakterystyczny tej macierzy. Niech to będzie wielomian $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Stosując twierdzenie Hamiltona-Cayleya otrzymujemy równanie macierzowe

$$(AB)^n + a_1(AB)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(AB) + a_nE = 0.$$

Równanie to jest równoważne układowi n^2 równań algebraicznych o n^2 niewiadomych b_{ij} dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$, będących elementami szukanej macierzy B. Ta metoda jest bardzo uciążliwa już dla $n = 2$.

W tym artykule pokażę inną metodę rozwiązania tego zagadnienia. Metoda ta pozwala ominąć rozwiązywanie układu równań algebraicznych wyższych stopni. Sprowadza ona zagadnienie do rozwiązywania układu równań, z których każde jest równaniem liniowym.

Niech $\varkappa^{(i)} = \varkappa\varepsilon + H$, $\beta^{(i)} = \beta_{11}\varepsilon + \beta_{12}H + \beta_{13}H^2 + \ldots + \beta_{1i}H^{i-1}$, $\alpha^{(i)} = \alpha\varepsilon$, gdzie (i) oznacza stopień kwadratowych macierzy $\varkappa^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Lemat 1. *Jeżeli zachodzi równość* $\varkappa^{(i)}\beta^{(i)} = \alpha^{(i)}$, *to* $\beta_{1p} = (-1)^{p-1}\alpha\varkappa^{-p}$ *dla* $p = 1, 2, \ldots, i$.

Dowód. Po przeprowadzeniu prostych rachunków dostajemy

$$\beta^{(i)}\varkappa^{(i)} = \varkappa^{(i)}\beta^{(i)} = \tag{3}$$
$$= \beta_{11}\varkappa\varepsilon + (\beta_{12}\varkappa + \beta_{11})H + \ldots + (\beta_{1i-1}\varkappa + \beta_{1i-2})\varkappa^{i-2} + (\beta_{1i}\varkappa + \beta_{1i-1})H^{i-1}.$$

Uwzględniając przyjęte oznaczenia i założenie lematu 1 dostajemy równości

$$\beta_{11}\varkappa = \alpha, \quad \beta_{12}\varkappa + \beta_{11} = 0, \quad \ldots, \quad \beta_{i1}\varkappa + \beta_{1i-1} = 0. \tag{4}$$

Z (4) natychmiast otrzymujemy tezę lematu.

Niech

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{12} \\ & & & a_{11} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą o rozmiarach $l\times k$, $l > k$ oraz

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{1k+1} & b_{1k+2} & \ldots & b_{1k+l} \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & b_{1k+2} \\ & & 0 & & & & b_{1k+1} \end{bmatrix}$$

o rozmiarach $l\times k+l$.

Lemat 2. *Jeżeli*

$$\varkappa^{(l)}M_1 = 0, \quad \varkappa^{(l)}M_2 = 0, \tag{5}$$

to odpowiednio $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1k} = 0$ *i* $b_{1k+1} = b_{1k+2} = \ldots = b_{1k+l}$.

Dowód. Jeżeli wykonamy mnożenie macierzy po lewych stronach równań macierzowych (5), to otrzymamy odpowiednio dwa układy równości

$$\varkappa a_{11} = 0, \quad \varkappa a_{12} + a_{11} = 0, \quad \ldots, \quad \varkappa a_{1k} + a_{1k-1} = 0,$$

$$\varkappa b_{1k+1} = 0, \quad \varkappa b_{1k+2} + b_{1k+1} = 0, \quad \ldots, \quad \varkappa b_{1k+l} + b_{1k+l-1} = 0,$$

z których bezpośrednio wynika teza lematu.

Dla macierzy A stopnia n istnieje taka nieosobliwa macierz T, że

$$T^{-1}AT = J = \operatorname{diag}(\varkappa_1^{(l_1)}, \varkappa_2^{(l_2)}, \ldots, \varkappa_p^{(l_p)}), \tag{6}$$

gdzie $\varkappa_i^{(l_i)} = \varkappa_i \varepsilon + H$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$. l_i oznacza stopień klatki $\varkappa_i^{(l_i)}$ i $l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_p = n$.

Jeżeli macierz B jest przemienna z macierzą A, to $T^{-1}BT = J_1 = (\beta_{sv})$, $s, v = 1, 2, \ldots, p$, gdzie $\beta_{ii} = a_{i1}\varepsilon + a_{i2}H + \ldots + a_{il_i}H^{l_i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, i jeśli $\beta_{ii}, \beta_{i+1,i+1}, \ldots, \beta_{i+k,i+k}$ mają na głównych przekątnych liczby równe, to $\beta_{ii+1}, \beta_{ii+2}, \ldots, \beta_{ii+k}, \beta_{i+1i}, \beta_{i+2i}, \ldots, \beta_{i+ki}$ mają postać M_1 lub M_2, a wszystkie pozostałe β_{ij} są zerami ([2], str. 178-184).

Iloczynem macierzy J i J_1 jest macierz

$$JJ_1 = (k_s^{(l_s)}\beta_{sv}), \quad s, v = 1, 2, \ldots, p. \tag{7}$$

Wyrazy na głównej przekątnej macierzy (7) mają postać (3), a pozostałe postać lewych stron w równaniach (5). Ponieważ $T^{-1}AT = J$ i $T^{-1}BT = J_1$, to $A = TJT^{-1}$ i $B = TJ_1T^{-1}$, więc $AB = TJJ_1T^{-1}$. Zatem wartości własne macierzy AB są takie same jak wartości własne macierzy JJ_1, bo macierze podobne mają te same wartości własne.

Wartościami własnymi macierzy (7) są liczby znajdujące się na przekątnej głównej tej macierzy. Prawdziwość tego zdania wynika z faktu, że w wyznaczniku macierzy (7) wszystkie podwyznaczniki kątowe główne mają wiersz lub kolumnę składającą się z samych zer, z wyjątkiem elementu leżącego na przekątnej głównej. Zwróćmy uwagę na to, że macierz (7) ma tyle różnych wartości własnych, ile różnych wartości własnych ma macierz A. Dlatego postawione zagadnienie będzie rozwiązalne, gdy w ciągu (2) przyjmiemy tyle różnych liczb, ile różnych wartości własnych ma macierz A. Załóżmy więc, że macierz A ma q różnych wartości własnych $k_1, k_2, \ldots, k_q$. Wtedy za ciąg (2) możemy przyjąć $v_1, v_2, \ldots, v_q$ różnych liczb. Liczby $k_1, k_2, \ldots, k_q$ są rozmieszczone w p klatkach macierzy (6), $p \geqslant q$. W ten sposób rozmieśćmy też liczby $v_1, v_2, \ldots, v_q$ w p klatkach macierzy

$$V = \operatorname{diag}(\underbrace{v_1, \ldots, v_1}_{l_i}, \ldots, \underbrace{v_p, \ldots, v_p}_{l_p}) = \operatorname{diag}(v_1^{(l_1)}, \ldots, v_p^{(l_p)}). \tag{8}$$

Porównując (7) i (8), dostajemy równanie macierzowe $JJ_1 = V$. W oparciu o lemat 2, równanie to możemy zastąpić układem równań $k_i^{(l_i)}\beta_{ii} = v_i^{(l_i)}$, $i = 1, 2, \dots, p$. Na mocy lematu 1 każde z tych równań macierzowych ma oddzielne rozwiązanie dane wzorami $\alpha_{i1} = (-1)^{s-1}\cdot v_i k_i^{-s}$ dla $s = 1, 2, \dots, l_i$; $i = 1, 2, \dots, p$. W ten sposób macierz J_1 jest jednoznacznie wyznaczona dla przyjętego porządku liczb $v_1, v_2, \dots, v_q$, a tym samym $B = TJ_1T^{-1}$, co oznacza rozwiązanie postawionego zagadnienia.

Z q różnych liczb $v_1, v_2, \dots, v_q$ jest $q!$ permutacji, dlatego zagadnienie ma $q!$ różnych rozwiązań.

Literatura cytowana

[1] A. Fadini, *Beitrag zur Lösung eines inversen Eigenwertproblems*, Z. angew. Math. und Mech. 44, Nr 10/11 (1964), str. 506-508.

[2] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва 1954.

J. Ambrosiewicz (Ciechanowiec)

ON A CERTAIN PROBLEM RELATED TO CHARACTERISTIC ROOTS OF MATRICES

SUMMARY

The following problem is stated and solved: Given any sequence $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (with repetitions allowed) of non-zero numbers and a non-singular matrix A, find matrices X and Y, Y non-singular, such that

$$AX = XA,$$

$$AX = Y^{-1}J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)Y,$$

where $J(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ is a Jordan matrix with the characteristic roots $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Under some natural conditions on the multiplicity of the characteristic roots of A, the author shows that the problem has a solution. Moreover, it is possible to give the elements of the matrices X and Y in an explicit form.
