



A. GRUŻEWSKI et A. SCHINZEL (Varsovie)

Sur les itérations d'une fonction arithmétique

Soit une fonction arithmétique f et soit la suite

$$(1) \quad n, f(n), ff(n), \dots$$

Il est bien connu que pour certaines fonctions f cette suite est pour chaque n périodique (cf. [3], [4], [5]). Toutes ces fonctions étudiées sont définies à l'aide du développement decimal de n , donc à l'aide de la structure additive de n .

Le cas des fonctions f définies à l'aide de la structure multiplicative de n est beaucoup moins étudié. On n'a démontré la périodicité de (1) que pour des valeurs particulières de n (cf. [1], [2]).

Let but de cette note est d'étudier le comportement de la suite (1) dans un cas où $f(n)$ depend d'une façon explicite de la structure multiplicative de n .

Soient p_1, \dots, p_k tous les facteurs premiers de n dans l'ordre non-décroissant, c'est-à-dire que

$$n = p_1 p_2 \dots p_k \quad \text{et} \quad p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k.$$

Posons

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 \cdot p_k + p_1 \cdot p_{k-1} + \dots + p_k \cdot 1 \\ &= \begin{cases} 2(p_k + p_{k-1} p_1 + \dots + p_{(k-1)/2} p_{(k+1)/2}) & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 2(p_k + p_{k-1} p_1 + \dots + p_{k/2-1} p_{k/2+1} + p_{k/2}^2) & \text{si } k \text{ est pair,} \end{cases} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est une convolution de la suite $1, p_1, p_2, \dots, p_k$ avec elle-même.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME. *Pour tout n naturel la suite (1) est périodique avec la période pur ou mixte (16), (18), (35, 39) ou (22, 26, 30).*

LEMME 1. *Si $n > 78$ et*

$$(2) \quad f(n) > \frac{1}{2}n - 4$$

on a $n = p, pq$ ou $4q$, où p et q sont des nombres premiers.

Démonstration. Soit $n = p_1 p_2 \dots p_k$, $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$, $k \geq 3$ et supposons d'abord que k est impair, $k = 2l + 1 \geq 3$.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n - f(n) &= \frac{1}{2}p_1 p_2 \dots p_{2l+1} - 2(p_{2l+1} + p_{2l} p_1 + \dots + p_{l+1} p_l) \\ &\geq 2p_{2l+1}(2^{l-3} p_l^{l+1} - p_l l - 1) \geq 4 + 2p_l p_{2l+1}(2^{l-3} p_l^l - l - 1) \end{aligned}$$

et (2) implique

$$2^{l-3} p_l^l - l - 1 \leq 0,$$

d'où $l = p_l = 2$ ou $l \leq 1$.

Si $l = p_l = 2$ on a $p_1 = 2$ et

$$\frac{1}{2}n - f(n) > 2p_5(p_3 p_4 - 5),$$

donc (2) entraîne $p_3 p_4 = 4$. Il en résulte $p_3 = p_4 = 2$, $\frac{1}{2}n - f(n) = 8p_5 - 2(p_5 + 8)$ et (2) implique $p_5 \leq 3$, $n \leq 48$. Si $l = 1$ on a

$$\frac{1}{2}n - f(n) = \frac{1}{2}(p_1 p_2 - 4)(p_3 - 4) - 8,$$

donc (2) entraîne $(p_1 p_2 - 4)(p_3 - 4) \leq 24$ et ou bien $n = p_1 p_2 p_3 \leq 78$ ou bien $p_1 p_2 = 4$.

Supposons maintenant que k est pair, $k = 2l \geq 4$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n - f(n) &= \frac{1}{2}p_1 p_2 \dots p_{2l} - (2p_{2l} + 2p_{2l-1} p_1 + \dots + 2p_{l+1} p_{l-1} + p_l^2) \\ &\geq p_{2l}(\frac{1}{2}p_1 \dots p_{2l-1} - 2 - 2p_1 - \dots - 2p_{l-1} - p_l) \\ &\geq p_{2l}(2^{l-2} p_l^l - 2l p_l) = 2p_l p_{2l}(2^{l-3} p_l^{l-1} - l) \end{aligned}$$

et (2) implique $l = 2$, $p_2 \leq 3$. Il en résulte

$$\frac{1}{2}n - f(n) = \frac{1}{2} \left(p_1 p_3 - \frac{4}{p_2} \right) (p_2 p_4 - 4) - p_2^2 - \frac{8}{p_2}$$

et

$$\left(p_1 p_3 - \frac{4}{p_2} \right) (p_2 p_4 - 4) \leq 2p_2^2 + \frac{16}{p_2} + 8.$$

Si $p_2 = 3$ on obtient $n = p_1 p_2 p_3 p_4 \leq 54$, si $p_2 = 2$ alors $n \leq 60$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 2. Soit $n > 78$ et $f(n) \geq n$. Alors ou 1) $n = p$ ou 2) $n = 2p$ ou 3) $n = p^2$ ou enfin 4) $n = p(p+2)$. Dans les cas 1), 2), 3) p est un nombre premier, dans le cas 4) p et aussi $p+2$ sont des nombres premiers.

Démonstration. Vu Lemme 1 il ne reste qu'examiner les cas $n = pq$ et $n = 4q$, où q est un nombre premier. Supposons d'abord que $n = pq$, $p > 2$ et $q > p + 2$.

Si $p = 3$ on a $q > 26$ et $n - f(n) = 3q - 2q - 9 = q - 9 > 0$.

Si $p \geq 5$ on a $q \geq p + 4$ et $n - f(n) = q(p-2) - p^2 \geq (p+4) \times (p-2) - p^2 = 2(p-4) > 0$.

Supposons maintenant que $n = 4q$. Alors $q > 19$ et $n - f(n) = 2(q - 4) > 0$.

LEMME 3. Si $p > 37$, p est un nombre premier, on a

$$p > \begin{cases} f_3(p) & \text{si } p+2 \text{ est un nombre composé,} \\ f_4(p) & \text{si } p+2 \text{ est un nombre premier,} \end{cases}$$

où f_k est k -ième itération de la fonction f .

Démonstration. On a $f_2(p) = 2(p+2)$ et si $p+2$ est un nombre composé on obtient de Lemme 1

$$f_3(p) = f(f_2(p)) < \frac{1}{2}f_2(p) - 4 = p - 2.$$

Si $p+2$ est un nombre premier on a $f_3(p) = 2(p+4)$. D'autre part p et $p+2$ étant premiers on a $p \equiv -1 \pmod{3}$. Alors, $p+4 \equiv 0 \pmod{3}$ et comme $2(p+4)$ n'est pas de la forme $4q$ on obtient en vertu de Lemme 1

$$f_4(p) = f(f_3(p)) < \frac{1}{2}f_3(p) - 4 = p.$$

LEMME 4. Si $p > 7$, p est un nombre premier, on a

$$p^2 > \begin{cases} f_2(p) & \text{si } p+2 \text{ est un nombre composé,} \\ f_3(p) & \text{si } p+2 \text{ est un nombre premier.} \end{cases}$$

Démonstration. On a $f(p^2) = p(p+2)$ et si $p+2$ est un nombre composé on obtient de Lemme 1

$$f_2(p^2) = f(f(p)) < \frac{1}{2}f(p) - 4 = \frac{1}{2}p(p+2) - 4 < p^2.$$

Si $p+2$ est un nombre premier, on a

$$f_2(p^2) = p^2 + 2p + 4.$$

D'autre part p et $p+2$ étant premiers on a $p \equiv -1 \pmod{3}$ et $p^2 + 2p + 4 \equiv 0 \pmod{3}$. Si $(p^2 + 2p + 4)/3$ est composé on obtient de Lemme 1

$$f_3(p^2) = f(f_2(p^2)) < \frac{1}{2}f_2(p^2) - 4 = \frac{1}{2}p(p+2) - 2 < p^2.$$

Si $(p^2 + 2p + 4)/3$ est premier, $p^2 + 2p + 4 = 3q$, alors

$$f_3(p^2) = f(f_2(p^2)) = 9 + 2q = 9 + \frac{2}{3}(p^2 + 2p + 4) < p^2.$$

LEMME 5. Supposons que 1) $n = 2p$ ou 2) $n = p(p+2)$, où p est un nombre premier et soit $n > 78$. Si le nombre $p+2$ est composé alors

$$n > f_2(n) \text{ dans le cas 1), } \quad n > f(n) \text{ dans le cas 2)}$$

et si le nombre $p+2$ est premier alors

$$n > f_3(n) \text{ dans le cas 1), } \quad n > f_2(n) \text{ dans le cas 2).}$$

Démonstration. Comme $2p = f(p)$ et $p(p+2) = f(p^2)$ le lemme résulte directement de Lemmes 3 et 4.

Démonstration du théorème. Soit n un nombre naturel quelconque est soit m un élément minimal dans la suite (1). Comme $m \leq f_i(m)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, il résulte de Lemmes 2-5 que $m < 78$. La table suivante donne les valeurs de $f(n)$ pour $m < 80$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	2	4	6	8	10	10	14	12	15
1	14	22	14	26	18	19	16	34	18	38
2	18	23	26	46	18	35	30	24	22	58
3	22	62	20	31	38	39	22	74	42	35
4	22	82	26	86	30	28	50	94	22	63
5	30	43	34	106	27	32	26	47	62	118
6	26	122	66	32	24	36	34	134	42	55
7	34	142	26	146	78	40	46	71	42	158

On a aussi $82 \rightarrow 86 \rightarrow 90 \rightarrow 31$, $94 \rightarrow 98 \rightarrow 42$, $106 \rightarrow 110 \rightarrow 42$, $118 \rightarrow 122 \rightarrow 126 \rightarrow 35$, $134 \rightarrow 138 \rightarrow 58$, $142 \rightarrow 146 \rightarrow 150 \rightarrow 39$, où $A \rightarrow B$ désigne que $B = f(A)$. Ces données numériques suffisent pour vérifier le théorème.

Nous nous permettons ici de remercier M. K. Tatarkiewicz d'avoir bien voulu corriger notre français.

Travaux cités

[1] L. Alaoglu, and P. Erdős, *A conjecture in elementary number theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), pp. 881-882.

[2] L. E. Dickson, *Theorems and tables on the sum of the divisors of a number*, Quart. J. Pure Appl. Math. 44 (1913), pp. 264-296.

[3] K. Iséki, *A problem of number theory*, Proc. Japan Acad. 36 (1960), pp. 578-583.

[4] W. Sierpiński, *Sur les itérations de certaines fonctions numériques*, Rend. Circolo Mat. Palermo (2) 13 (1964), pp. 257-262.

[5] B. M. Stewart, *Sums of functions of digits*, Canadian J. Math. 12 (1960), pp. 374-380.