ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE X (1966)
ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Serio I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE X (1966)

F. BIERSKI (Kraków)

Ogólne twierdzenie Stokesa i jego zastosowania

1. Wstęp. W teorii funkcji wielu zmiennych rzeczywistych i zespolonych podstawową rolę odgrywa twierdzenie, które nazywać będziemy *ogólnym twierdzeniem Stokesa*, lub krócej: *twierdzeniem Stokesa*, a które w literaturze nazywane jest także twierdzeniem Greena-Stokesa, twierdzeniem Gaussa itp. Twierdzenie Stokesa wykazane w niniejszej pracy stanowi uogólnienie trzech twierdzeń udowodnionych w podręczniku [1], mianowicie: twierdzenia Greena na płaszczyźnie (str. 369), twierdzenia Stokesa (str. 385) i twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego (str. 382). W wypowiedzi i dowodzie ogólnego twierdzenia Stokesa występują pewne pojęcia i twierdzenia z teorii form różniczkowych zewnętrznych i z topologii, o czym będzie mowa w dwóch następnych paragrafach.

2. Formy różniczkowe zewnętrzne. Niech E_n będzie przestrzenią euklidesową n zmiennych rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ i niech $a(x)$ będzie funkcją określoną w pewnym zbiorze punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$ danej przestrzeni; zbiór ten oznaczymy przez D.

Wyrażenie postaci

$$a(x)\,dx_{a_1} \wedge dx_{a_2} \wedge \ldots \wedge dx_{a_p} \qquad (1 \leqslant p \leqslant n), \tag{1}$$

gdzie wskaźniki $a_1, \ldots, a_p$ są dowolnym układem p spośród liczb $1, \ldots, n$, nazywamy *różniczką zewnętrzną stopnia p* o współczynniku $a(x)$. Zakładamy przy tym, że przestawienie ze sobą dwóch spośród różniczek $dx_{a_1}, \ldots, dx_{a_p}$ zmienia znak tego wyrażenia i wobec tego wyrażenie (1) równa się zeru, gdy dwie spośród różniczek mają ten sam wskaźnik.

Symbol $\wedge$ wprowadzili E. Cartan i L. Lichnerowicz [2] na oznaczenie mnożenia zewnętrznego, w którym iloczyn nie jest przemienny; wyrażenie (1) pisze się też w postaci $a(x)[dx_{a_1} \ldots dx_{a_p}]$ (patrz [3]). Symbol $[dx_{a_1} \ldots dx_{a_p}]$ przypomina symbol iloczynu wektorowego $[\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_p]$ wektorów $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$; iloczyn zewnętrzny i iloczyn wektorowy mają pewne własności wspólne. Patrz również [10].

Sumę a skończonej ilości różniczek postaci (1) tego samego stopnia p, tj.

$$a = \sum_{a_1 \ldots a_p} a_{a_1 \ldots a_p}(x)\,dx_{a_1} \wedge \ldots \wedge dx_{a_p} \tag{2}$$

o współczynnikach określonych w tym samym zbiorze D nazywamy *formą różniczkową zewnętrzną stopnia p* określoną w zbiorze D.

Na przykład wyrażenie $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ jest formą różniczkową zewnętrzną stopnia pierwszego na płaszczyźnie. Natomiast wyrażenia

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{3}$$

$$P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy, \tag{4}$$

gdzie współczynniki są funkcjami punktu (x, y, z) przestrzeni E_3, są formami odpowiednio stopnia pierwszego i drugiego.

Formy różniczkowe tego samego stopnia o współczynnikach określonych w tym samym zbiorze D można dodawać oraz odejmować podobnie jak wielomiany, w których rolę zmiennych odgrywają różniczki. Suma lub różnica dwóch form jest nową formą tego samego stopnia. Jeżeli $c(x)$ jest funkcją określoną w zbiorze D, to przez $c\cdot\alpha$ rozumiemy formę (2), w której każdy współczynnik $a_{a_1\ldots a_p}(x)$ został zastąpiony przez $c(x)a_{a_1\ldots a_p}(x)$. Przez *iloczyn zewnętrzny* $\alpha\wedge\beta$ formy (2) stopnia p przez formę

$$\beta=\sum_{\beta_1\ldots\beta_q} b_{\beta_1\ldots\beta_q}(x)\,dx_{\beta_1}\wedge\ldots\wedge dx_{\beta_q} \tag{5}$$

dowolnego stopnia q, określoną w tym samym zbiorze co forma (2), rozumiemy formę stopnia $p+q$ określoną wzorem

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{a_1\ldots a_p,\beta_1\ldots\beta_q} a_{a_1\ldots a_p}(x)\,b_{\beta_1\ldots\beta_q}(x)\,dx_{a_1}\wedge\ldots\wedge dx_{a_p}\wedge dx_{\beta_1}\wedge\ldots\wedge dx_{\beta_q}. \tag{6}$$

Z określeń tych łatwo wywnioskować, że

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha. \tag{7}$$

Iloczyn zewnętrzny nie zawsze jest przemienny.

Jeżeli wszystkie współczynniki pewnej formy są klasy C^k (tzn. mają ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu k włącznie) w pewnym zbiorze, to daną formę nazywamy *formą klasy C^k* w tym zbiorze.

Zmieniając ewentualnie znaki współczynników $a_{a_1\ldots a_p}(x)$ formy (2) możemy doprowadzić do tego, by wskaźniki $a_1, \ldots, a_p$ były uporządkowane rosnąco; redukując wyrazy zawierające te same różniczki otrzymamy formę, której ilość wyrazów nie przekracza $\binom{n}{p}$ i której można nadać postać

$$\alpha=\sum_{1\leqslant a_1<\ldots<a_p\leqslant n} a_{a_1\ldots a_p}(x)\,dx_{a_1}\wedge\ldots\wedge dx_{a_p}.$$

Gdy wszystkie współczynniki formy są identycznie równe zeru, to dana forma jest równa zeru.

Formy różniczkowe (odpowiedniej klasy) można różniczkować i całkować. *Różniczką $d\alpha$ formy* (2) stopnia p o współczynnikach klasy C^1 nazywamy formę różniczkową stopnia $p+1$ określoną wzorem

$$(8)\qquad d\alpha = \sum_{a_1\ldots a_p}\left(\frac{\partial a_{a_1\ldots a_p}}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial a_{a_1\ldots a_p}}{\partial x_n}dx_n\right)\wedge dx_{a_1}\wedge\ldots\wedge dx_{a_p}.$$

Na przykład różniczki form (3) i (4) są odpowiednio formami:

$$(3')\qquad (R_y-Q_z)\,dy\wedge dz+(P_z-R_x)\,dz\wedge dx+(Q_x-P_y)\,dx\wedge dy,$$

$$(4')\qquad (P_x+Q_y+R_z)\,dx\wedge dy\wedge dz.$$

Łatwo stwierdzić, że dla form α i β zachodzą wzory

$$d(\alpha+\beta) = d\alpha+d\beta,\qquad d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta.$$

Formę α nazywamy (a) *zupełną*, jeżeli istnieje taka forma γ, że $d\gamma=\alpha$, (b) *zamkniętą*, jeżeli jej różniczka równa się zeru, tj. $d\alpha = 0$. Nietrudno dowieść, że różniczka każdej formy (odpowiedniej klasy) jest zamknięta, tzn. druga różniczka każdej formy równa się zeru. Na przykład różniczki różniczek (3′) i (4′), co łatwo stwierdzić, są równe zeru.

Niech forma (2) będzie określona na hiperpowierzchni p-wymiarowej zorientowanej V danej w przestrzeni E_n równaniami

$$(9)\qquad x_k = x_k(t_1,\ldots,t_p) = x_k(t),\qquad k = 1,\ldots,n,$$

gdzie funkcje $x_k(t)$ zmiennych rzeczywistych $t_1,\ldots,t_n$ są klasy C^1 w pewnym obszarze Δ przestrzeni E_p i niech przekształcenie (9) odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie obszar Δ zorientowany zgodnie z układem osi współrzędnych $t_1,\ldots,t_p$ przestrzeni E_p na obszar V z przyjętą orientacją. Forma (2) po wprowadzeniu nowych zmiennych $t_1,\ldots,t_p$ określonych związkami (9) przyjmie postać

$$(10)\qquad \left\{\sum_{a_1\ldots a_p} a_{a_1\ldots a_p}\big(x(t)\big)\frac{\partial(x_{a_1},\ldots,x_{a_p})}{\partial(t_1,\ldots,t_p)}\right\}dt_1\wedge dt_2\wedge\ldots\wedge dt_p.$$

Forma (10) ma tylko jeden współczynnik; oznaczmy go przez $A(t_1,\ldots,t_p) = A(t)$.

Całkę formy różniczkowej (2) po hiperpowierzchni V określamy wzorem

$$(11)\qquad \int_V \alpha = \int_\Delta A(t)\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_p = \int_\Delta A(t)\,dt_1\ldots dt_p,$$

gdzie przez ostatnią całkę rozumiemy zwykłą p-krotną całkę Riemanna po obszarze Δ. Można wykazać, że wartość całki (11) nie zależy od przekształcenia (9) spełniającego wymienione wyżej warunki.

PRZYKŁAD. Układ n równań ($n \geqslant 2$)

$$
(12) \qquad x_k = \begin{cases} r\prod_{j=1}^{n-1}\cos\varphi_j & \text{dla} \quad k = 1, \\ r\sin\varphi_{k-1}\prod_{j=k}^{n-1}\cos\varphi_j & \text{dla} \quad k = 2, \ldots, n-1, \\ r\sin\varphi_{n-1} & \text{dla} \quad k = n, \end{cases}
$$

gdzie $r > 0$ jest ustalone, a parametry $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ zmieniają się w przedziałach

$$
(13) \qquad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \varphi_j \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{dla} \quad j = 2, \ldots, n-1,
$$

przedstawia $(n-1)$-wymiarową sferę $S: x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$ kuli n-wymiarowej: $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2$. Liczby $(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu $(x_1, \ldots, x_n)$. Oznaczmy przez $|S|$ całkę po sferze S z następującej formy różniczkowej:

$$
(14) \qquad |S| = \int_S \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x_k}{r}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.
$$

Przy obliczaniu tej całki skorzystamy z następującego znanego wzoru ([1], str. 262 i 281):

$$
(15) \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^m x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(2\nu)!\pi}{2^{2\nu}(\nu!)^2} & \text{dla} \quad m = 2\nu, \\ \dfrac{2^{2\nu+1}(\nu!)^2}{(2\nu+1)!} & \text{dla} \quad m = 2\nu+1, \end{cases}
$$

gdzie $\nu = 0, 1, \ldots$ Wzór ten można zapisać krócej przy pomocy funkcji gamma Eulera, uwzględniając, że $\Gamma(k+1) = k!$, $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = (2k)!\sqrt{\pi}/(2^{2k}\cdot k!)$:

$$
(15') \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^m x\, dx = \frac{2^m[\Gamma(\frac{1}{2}(m+1))]^2}{\Gamma(m+1)}.
$$

Równocześnie skorzystamy z następujących wzorów na jakobiany

$$
(16) \qquad J_k = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}
$$

układu równań (12) przy ustalonym r, nietrudnych do wykazania indukcyjnie:

$$
(17) \qquad J_k = \begin{cases} r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\cos^j\varphi_j & \text{dla} \quad k = 1, \\ (-1)^{k-1}r^{n-1}\sin\varphi_{k-1}\prod_{j=1}^{k-1}\cos^{j-1}\varphi_j\prod_{j=k}^{n-1}\cos^j\varphi_j & \text{dla} \quad k = 2, \ldots, n-1, \\ (-1)^{n-1}r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\cos^{j-1}\varphi_j & \text{dla} \quad k = n. \end{cases}
$$

Stosując do całki (14) podstawienie (12) i oznaczając przez Δ obszar określony nierównościami (13) otrzymujemy na mocy wzoru (11):

$$|S| = \int_{\Delta} \Big[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x_k}{r} J_k\Big] d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}.$$

Funkcja podcałkowa na mocy (12) i (17) wyraża się wzorem

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x_k}{r} J_k = r^{n-1} \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \dots \cos^{n-2}\varphi_{n-1},$$

zatem

$$(18) \qquad |S| = r^{n-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi_2 \, d\varphi_2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi_3 \, d\varphi_3 \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\varphi_{n-1} \, d\varphi_{n-1}.$$

Stąd na mocy (15) otrzymujemy ([9], str. 578)

$$(19) \qquad |S| = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{\nu} r^{n-1}}{(\nu-1)!} & \text{dla} \quad n = 2\nu, \\[2ex] \dfrac{2^{\nu+1}\pi^{\nu} r^{n-1}}{1\cdot 3\cdot \dots \cdot(2\nu-1)} & \text{dla} \quad n = 2\nu+1; \end{cases}$$

co na mocy (15′) wyraża się krócej wzorem

$$(19') \qquad |S| = \frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \dots$$

Wiadomo skądinąd, że całka (14) wyraża pole sfery kuli n-wymiarowej o promieniu r, a zatem pole to wyraża się wzorem (19) lub (19′).

Teorię form zewnętrznych wprowadził E. Cartan w pracy [4]. Teoria ta jest również wyłożona w książkach [5], [6] oraz w pracy [3].

3. Pojęcia pomocnicze z topologii. W przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej E_n niech będzie dany układ $p+1$ punktów $A_0, A_1, \dots, A_p$, $p \leqslant n$, nie leżących na jednej hiperpłaszczyźnie E_q, gdzie $q < p$. Najmniejszy zbiór wypukły domknięty, zawierający te punkty, nazywamy *sympleksem p-wymiarowym* (*prostoliniowym*) o wierzchołkach $A_0, A_1, \dots, A_p$ i oznaczamy symbolem $A_0A_1\dots A_p$. Każdy sympleks s-wymiarowy $(0 \leqslant s < p)$ wyznaczony przez $s+1$ wierzchołków sympleksu $A_0A_1 \dots A_p$ nazywamy *ścianą s-wymiarową* albo *podsympleksem s-wymiarowym* danego sympleksu. Na przykład w przestrzeni trójwymiarowej czworościan $A_0A_1A_2A_3$, gdzie punkty A_0, A_1, A_2, A_3 nie leżą na jednej płaszczyźnie, jest sympleksem 3-wymiarowym, a trójkąt $A_0A_1A_3$, krawędź A_0A_1, wierzchołek A_0 są ścianami (podsympleksami) odpowiednio 2, 1, 0-wymiarowymi sympleksu $A_0A_1A_2A_3$.

Każdy obraz topologiczny S sympleksu prostoliniowego $A_0'A_1' \dots A_p'$ nazywamy *sympleksem topologicznym* (lub krótko *sympleksem*). Obrazy A_k wierzchołków A_k' sympleksu $A_0'A_1' \dots A_p'$ nazywamy wierzchołkami sympleksu $\mathring{S}$, a obrazy ścian — ścianami, przy czym sympleks S oznaczamy przez $A_0 A_1 \ldots A_p$. Odwzorowanie topologiczne nie zmienia, jak wiadomo, wymiaru. Mówimy, że dany sympleks S jest *klasy* C^k, jeżeli istnieje odwzorowanie klasy C^k (ewentualnie poza zbiorem o wymiarze niższym niż $p-1$) sympleksu prostoliniowego p-wymiarowego przestrzeni E_p na dany sympleks S.

Mówimy, że *dwa sympleksy* (prostoliniowe lub nie) *są położone względem siebie prawidłowo*, jeżeli albo nie mają punktów wspólnych, albo ich część wspólna jest podsympleksem każdego z nich. Zbiór punktów przestrzeni, będący sumą skończonej ilości sympleksów p-wymiarowych klasy C^k, położonych względem siebie prawidłowo, nazywamy *wielościanem p-wymiarowym klasy* C^k, jeżeli każdy z danych sympleksów (gdy jest ich więcej niż jeden) ma przynajmniej jedną $(p-1)$-wymiarową ścianę wspólną z innym z tych sympleksów. Na przykład brzeg sympleksu p-wymiarowego $A_0 A_1 \ldots A_p$ jest wielościanem $(p-1)$-wymiarowym.

Sympleks $A_0 A_1 \ldots A_p$ nazywamy *sympleksem zorientowanym*, gdy ustalono dodatni i ujemny porządek jego wierzchołków. Jeżeli porządek $A_0, A_1, \ldots, A_p$ uznamy za dodatni, to tak zorientowany sympleks $A_0 A_1 \ldots A_p$ oznaczymy przez $(A_0 A_1 \ldots A_p)$, a gdy za ujemny to przez $-(A_0 A_1 \ldots A_p)$. Zakładamy przy tym, że przestawienie ze sobą dwóch dowolnych wierzchołków zmienia orientację na przeciwną, a więc np.

$$(A_1 A_0 A_2 \ldots A_p) = -(A_0 A_1 A_2 \ldots A_p).$$

Ogólnie, parzysta ilość przestawień nie zmienia orientacji, a nieparzysta zmienia ją na przeciwną.

Brzeg sympleksu lub wielościanu oznaczamy często przez $S^{\cdot}$. *Brzegiem sympleksu zorientowanego* $S = (A_0 A_1 \ldots A_p)$ nazywamy następującą sumę algebraiczną wszystkich jego $(p-1)$-wymiarowych ścian zorientowanych

$$S^{\cdot} = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r (A_0 A_1 \ldots A_{r-1} A_{r+1} \ldots A_p); \tag{20}$$

mówimy przy tym, że tak określony brzeg jest *zorientowany zgodnie* z danym sympleksem, albo że orientacja jego ścian jest *indukowana* przez orientację sympleksu $S = (A_0 A_1 \ldots A_p)$, [7]. Na przykład brzegami sympleksów 1-wymiarowego $s_1 = (A_0 A_1)$ oraz 2-wymiarowego $s_2 = (A_0 A_1 A_2)$ są

$$s_1^{\cdot} = A_1 - A_0, \tag{21}$$

$$s_2^{\cdot} = (A_1 A_2) - (A_0 A_2) + (A_0 A_1). \tag{22}$$

Wielościan p-wymiarowy złożony ze skończonej ilości sympleksów p-wymiarowych, położonych prawidłowo względem siebie, nazywamy *orientowalnym*, jeżeli wszystkie jego sympleksy p-wymiarowe można tak zorientować, by orientacje indukowane przez sympleksy sąsiednie na każdej $(p-1)$-wymiarowej wspólnej ścianie były przeciwne. Wielościan orientowalny po odpowiednim zorientowaniu wszystkich jego sympleksów staje się *zorientowany*. *Brzegiem wielościanu p-wymiarowego zorientowanego* nazywamy sumę algebraiczną wszystkich jego $(p-1)$-wymiarowych ścian zgodnie z nim zorientowanych (do sumy nie wliczamy wspólnych ścian dwóch sympleksów sąsiednich jako przeciwnie zorientowanych). Jeżeli każda $(p-1)$-wymiarowa ściana jest wspólna dla dwóch sąsiednich sympleksów, to brzeg tego wielościanu równa się zeru. Na przykład brzeg (22) sympleksu $s_2 = (A_0 A_1 A_2)$ jest zorientowanym wielościanem (jednowymiarowym), przy czym brzeg tego wielościanu równa się zeru, bo na podstawie wzoru (21) mamy $(s_2^{\cdot})^{\cdot} = (A_2 - A_1) - (A_2 - A_0) + (A_1 - A_0) = 0$.

Wielościan zorientowany, którego brzeg równa się zeru, nazywamy *cyklem*. Na przykład wielościan (jednowymiarowy) określony wzorem (22) jest cyklem. Łatwo stwierdzić, że zorientowana powierzchnia kuli lub torusa jest cyklem; natomiast sympleks zorientowany nie jest cyklem (bo jego brzeg zorientowany nie równa się zeru).

4. Twierdzenie Stokesa. W przestrzeni E_n niech S będzie dowolnym (niekoniecznie prostoliniowym) sympleksem zorientowanym p-wymiarowym $(1 < p \leqslant n)$ klasy C^1 o brzegu $S^{\cdot}$ zorientowanym zgodnie z S. Wykażemy następujące twierdzenie:

Jeżeli współczynniki formy stopnia $p-1$

$$a = \sum_{a_1 \ldots a_{p-1}} a_{a_1 \ldots a_{p-1}}(x)\, dx_{a_1} \wedge \ldots \wedge dx_{a_{p-1}} \tag{23}$$

są klasy C^1 *na* S, *to całka danej formy po* $S^{\cdot}$ *równa się całce z różniczki tej formy po* S, *tzn.*

$$\int_{S^{\cdot}} a = \int_S da. \tag{24}$$

D o w ó d. W przestrzeni euklidesowej E_p zmiennych $t_1, \ldots, t_p$ niech A_0 będzie początkiem układu współrzędnych i niech punkt A_r dla $r = 1, \ldots, p$ leży na dodatniej półosi t_r w odległości 1 od początku współrzędnych. Niech D będzie sympleksem prostoliniowym zorientowanym $(A_0 A_1 \ldots A_p)$ o brzegu $D^{\cdot}$ zorientowanym zgodnie z D i niech układ funkcji

$$x_k = x_k(t_1, \ldots, t_p), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

klasy C^1 w sympleksie D, odwzorowuje topologicznie D na dany sympleks S z zachowaniem orientacji. Po przekształceniu (25) forma a przejdzie w formę β tego samego stopnia i postaci

$$\beta = \sum_{k=1}^{p} f_k(t_1, \ldots, t_p)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \wedge \ldots \wedge dt_p, \tag{26}$$

zawierającą co najwyżej p wyrazów; lewa strona (24) przejdzie na $\int\limits_{D^{\cdot}}\beta$, a prawa na $\int\limits_{D} d\beta$, zatem należy dowieść, że zachodzi równość

$$\int\limits_{D^{\cdot}}\beta = \int\limits_{D} d\beta. \tag{27}$$

Wystarczy tę równość wykazać dla dowolnego wyrazu formy β, np. dla wyrazu $\beta_1 = f_1(t_1, \ldots, t_p)dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_p$. Wprowadźmy oznaczenia

$$\sigma^1 = dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_p, \qquad \sigma = dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_p; \tag{28}$$

wystarczy zatem wykazać, że

$$\int\limits_{D^{\cdot}} f_1(t_1, \ldots, t_p)\sigma^1 = \int\limits_{D} d\beta_1. \tag{29}$$

Rozważmy najpierw całkę po lewej stronie. Ściany brzegu $D^{\cdot}$, tzn. sympleksy zorientowane $d_r = (-1)^r(A_0 \ldots A_{r-1}A_{r+1} \ldots A_p)$ dla $r = 0, 1, \ldots, p$, leżą odpowiednio na $p+1$ hiperpłaszczyznach o równaniach

$$\sum_{i=1}^{p} t_i = 1, \quad t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ \ldots,\ t_p = 0; \tag{30}$$

ściana d_0 ma równanie $\sum\limits_{i=1}^{p} t_i = 1$, a ściana d_r — równanie $t_r = 0$ dla $r = 1, \ldots, p$. Zgodnie z określeniem (20) mamy $D^{\cdot} = d_0+d_1+ \ldots +d_p$. Zauważmy, że forma β_1 równa się zeru na ścianach d_r dla $r = 2, \ldots, p$, bo dla $r = 2, \ldots, p$ na ścianie d_r mamy $t_r = 0$, a więc różniczka $dt_r = 0$; zatem lewa strona (29) redukuje się do dwóch wyrazów, mianowicie:

$$\int\limits_{D^{\cdot}}\beta_1 = \sum_{r=0}^{p}\int\limits_{d_r}\beta_1 = \int\limits_{d_0}\beta_1 + \int\limits_{d_1}\beta_1 = \int\limits_{(A_1\ldots A_p)}\beta_1 - \int\limits_{(A_0A_2\ldots A_p)}\beta_1. \tag{31}$$

Do przedostatniej całki zastosujemy przekształcenie: $t_1 = \sum\limits_{i=2}^{p} t_i$, $t_k = t_k$ dla $k = 2, \ldots, p$; przeprowadza ono sympleks $(A_1 \ldots A_p)$ w sympleks $(A_0A_2 \ldots A_p)$ położony na hiperpłaszczyźnie $t_1 = 0$, formę $\beta_1 = f_1(t_1, \ldots, t_p)\sigma^1$ w formę $f_1(1-t_2- \ldots -t_p, t_2, \ldots, t_p)\sigma^1$, a całkę $\int\limits_{(A_1\ldots A_p)} f_1(t_1, \ldots, t_p)\sigma^1$ w całkę $\int\limits_{(A_0A_2\ldots A_p)} f_1(1-t_2- \ldots -t_p, t_2, \ldots, t_p)\sigma^1$. Ostatnia całka we wzorze (31) jest równa całce $\int\limits_{(A_0A_2\ldots A_p)} f_1(0, t_2, \ldots, t_p)\sigma^1$, bo $t_1 = 0$ na sympleksie $(A_0A_2 \ldots A_p)$. Zatem wzór (31) przybiera postać

$$\int\limits_{D^{\cdot}}\beta_1 = \int\limits_{(A_0A_2\ldots A_p)} [f_1(1-t_2-t_3- \ldots - t_p, t_2, \ldots, t_p)-f_1(0, t_2, \ldots t_p)]\sigma^1$$

a na mocy (11):

$$\int\limits_{D^{\cdot}}\beta_1 = \int\limits_{(A_0A_2\ldots A_p)} \Big[f_1\Big(1 - \sum_{i=2}^{p} t_i, t_2, \ldots, t_p\Big)-f_1(0, t_2, \ldots, t_p)\Big]dt_2 \ldots dt_p. \tag{32}$$

Całka po prawej stronie wzoru (29) na mocy wzorów (8), (11) i oznaczeń (28) przybiera postać

$$\int_D d\beta_1 = \int_D \frac{\partial f_1}{\partial t_1}\sigma = \int_D \frac{\partial f_1}{\partial t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_p.$$

Zamieniając ostatnią całkę na całkę iterowaną otrzymujemy

$$(33) \qquad \int_D d\beta_1 = \int_{(A_0A_2\dots A_p)} \left(\int_0^{1-t_2-\dots-t_p} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} dt_1 \right) dt_2 \dots dt_p =$$

$$= \int_{(A_0A_2\dots A_p)} [f_1(1-t_2-\dots-t_p, t_2, \dots, t_p)-f_1(0, t_2, \dots, t_p)]\, dt_2 \dots dt_p.$$

Prawe strony wzorów (32) i (33) są równe, zatem równość (29), a przez to i równość (24) jest wykazana.

Oznaczmy przez W wielościan p-wymiarowy zorientowany klasy C^1 w przestrzeni E_n o brzegu $(p-1)$-wymiarowym $W^{\cdot}$ zgodnie z nim zorientowanym. Twierdzenie poprzednie daje się uogólnić w następujący sposób (zob. [2] i [6]):

Jeżeli współczynniki formy (23) *są klasy* C^1 *na wielościanie domkniętym* W, *to całka danej formy po* $W^{\cdot}$ *równa się całce z różniczki tej formy po* W, *tzn.*

$$(34) \qquad \int_{W^{\cdot}} a = \int_W da.$$

Istotnie, wykazaliśmy, że równość (34) jest słuszna dla sympleksów, a ponieważ całka po sumie skończonej ilości zbiorów jest równa sumie całek po tych zbiorach, więc równość (34) jest słuszna dla wielościanu, bo wielościan W jest sumą skończonej ilości sympleksów.

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *twierdzenia Stokesa.*

Uwaga. Łatwo stwierdzić, że twierdzenie Greena na płaszczyźnie ([1], str. 369), tj.

$$(35) \qquad \int_{D^{\cdot}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_D d\big(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\big) =$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy,$$

twierdzenie Stokesa w przestrzeni 3-wymiarowej ([1], str. 385), tj.

$$(36) \qquad \int_{S^{\cdot}} P dx+Q dy+R dz = \int_S d(P dx+Q dy+R dz) =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy,$$

oraz twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego ([1], str. 382), tj.

$$(37)\qquad \int_{V^{\cdot}} P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy =$$

$$= \int_V d\{P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy\} = \int_V \left\{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right\} dx\wedge dy\wedge dz$$

są przypadkami szczególnymi twierdzenia Stokesa dla wielościanu.

5. Dwa twierdzenia Greena. Niech $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$ będzie funkcją określoną w pewnym obszarze D przestrzeni E_n. W dalszym ciągu przez Δf oznaczać będziemy jak zwykle laplasjan $\sum_{k=1}^{n}(\partial^2 f/\partial x_k^2)$, a przez σ i σ^k następujące formy różniczkowe stopni n i $n-1$:

$$(38)\qquad \begin{aligned} \sigma &= dx_1\wedge \ldots \wedge dx_n, \\ \sigma^k &= (-1)^{k-1}dx_1\wedge \ldots \wedge dx_{k-1}\wedge dx_{k+1}\wedge \ldots \wedge dx_n, \qquad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Stosując wzór (34) wykażemy, że:

Jeżeli w obszarze n-wymiarowym zorientowanym D(¹) *ograniczonym hiperpowierzchnią $(n-1)$-wymiarową $D^{\cdot}$ klasy C^1 zgodnie zorientowaną z D dane są dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ klasy C^2 w $D+D^{\cdot}$*(²)*, to zachodzą następujące związki:*

$$(39)\qquad \int_{D^{\cdot}} g\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\sigma^k = \int_D \left(g\Delta f+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\sigma,$$

$$(40)\qquad \int_{D^{\cdot}} \sum_{k=1}^{n}\left(g\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}-f\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)\sigma^k = \int_D (g\Delta f - f\Delta g)\sigma.$$

Dowód. Podstawiając we wzorze (34) $a = \sum_{k=1}^{n} g(\partial f/\partial x_k)\sigma^k$ otrzymujemy bezpośrednio równość (39). Zastąpmy teraz we wzorze (39) g przez f oraz f przez g; odejmując powstałą równość stronami od (39) otrzymujemy (40) (dowód dla $n = 2$ i $n = 3$ znajduje się w [1], str. 372 i 384 oraz w [8], str. 215).

Związki (39) i (40) nazywamy *pierwszym i drugim twierdzeniem Greena*. Opierając się na tych twierdzeniach otrzymujemy następujący

WNIOSEK. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest klasy C^2 w $D+D^{\cdot}$*(²)*, przy czym jest harmoniczna w D* (*tzn.* $\Delta f(x) = 0$), *a obszar D i jego brzeg spełniają*

(¹) Zakładamy, że D jest n-wymiarowym wielościanem klasy C^1.

(²) Wystarczy klasa C^1 w $D+D^{\cdot}$, oraz istnienie drugich pochodnych ciągłych i ograniczonych w D.

założenia poprzedniego twierdzenia, to

(41) $$\int_{D^{\cdot}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sigma^k = 0,$$

(42) $$\int_{D^{\cdot}} f \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sigma^k = \int_{D} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2.$$

Istotnie, przyjmując we wzorze (39) $g = \text{const}$ otrzymujemy równość (41), a przyjmując $g = f$ otrzymujemy związek (42).

Uwaga. Niech $f(x)$ i D spełniają założenia poprzedniego wniosku. Jeżeli przez $\operatorname{grad} f$ oznaczymy wektor o składowych $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$, przez $\boldsymbol{n}$ wektor jednostkowy normalny do hiperpowierzchni $S = D^{\cdot}$ zorientowany na zewnątrz D, a przez dS element tej hiperpowierzchni, to związkom (41) i (42) można nadać następującą postać wektorową:

(41′) $$\int_{D^{\cdot}} (\operatorname{grad} f)\boldsymbol{n}\, dS = 0,$$

(42′) $$\int_{D^{\cdot}} \tfrac{1}{2}(\operatorname{grad} f^2)\boldsymbol{n}\, dS = \int_{D} |\operatorname{grad} f|^2 dv,$$

gdzie $|\operatorname{grad} f|$ oznacza długość danego wektora.

6. Wzory Greena. Opierając się na poprzednich twierdzeniach wykażemy trzy wzory Greena, z których jeden dotyczy funkcji $f(x)$ harmonicznej w kuli n-wymiarowej, a dwa dalsze dotyczą funkcji klasy C^2 w obszarach dość dowolnych. Niech K będzie w przestrzeni E_n kulą n-wymiarową, zorientowaną zgodnie z układem współrzędnych, mającą środek $\zeta = \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, promień $r > 0$ i brzeg S zorientowany zgodnie z K. Niech $|S|$ oznacza pole hipersfery S (zob. wzór (19′)). Wykażemy następujące *twierdzenie o wartości średniej dla funkcji harmonicznych*:

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją harmoniczną w kuli K, klasy C^1 w $K+S$, to

(43) $$f(\zeta) = \frac{1}{|S|} \int_{S} f(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \zeta_k}{r} \sigma^k,$$

gdzie σ^k jest określone wzorem (38).

Dowód. Niech S' będzie hipersferą drugiej kuli o tym samym środku i o promieniu $r' < r$ i niech D będzie obszarem ograniczonym przez S i S', zorientowanym zgodnie z układem współrzędnych; wtedy jego brzegiem (zorientowanym zgodnie z D) jest $S - S'$. W obszarze D funkcje $f(x)$ i $\gamma = \gamma(x, \zeta) = 1/\varrho(x, \zeta)^{n-2}$, gdzie

(44) $$\varrho = \varrho(x, \zeta) = \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \zeta_i)^2\right\}^{1/2},$$

są harnomiczne, wobec tego na mocy związku (40) mamy (biegun ζ funkcji $\gamma(x,\zeta)$ nie należy do obszaru D):

$$\int\limits_{S-S'}\sum_{k=1}^{n}\left(\gamma\frac{\partial f}{\partial x_k}-f\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\right)\sigma^k=0,\quad\text{zatem}\quad\int\limits_{S'}=\int\limits_{S}.$$

Na hiperpowierzchniach S i S' jest $\gamma=\text{const}$, więc na mocy (41) całka $\int\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\sigma^k$, gdy całkujemy po S lub po S', równa się zeru. Zatem

$$\int\limits_{S'}f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\sigma^k=\int\limits_{S}f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\gamma}{\partial x_n}\sigma^k.$$

Ponieważ $\partial\gamma/\partial x_k=(2-n)(x_k-\zeta_k)\varrho^{-n}$, przy czym $\varrho=r$ na S oraz $\varrho=r'$ na S', zatem

$$\frac{2-n}{r'^{n-1}}\int\limits_{S'}f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\zeta_k}{r'}\sigma^k=\frac{2-n}{r^{n-1}}\int\limits_{S}f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\zeta_k}{r}\sigma^k.$$

Dzieląc ostatnią równość stronami przez $2(2-n)\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ otrzymujemy

$$\frac{1}{|S'|}\int\limits_{S'}f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\zeta_k}{r'}\sigma^k=\frac{1}{|S|}\int\limits_{S}f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\zeta_k}{r}\sigma^k,\tag{45}$$

gdzie $|S'|$ jest polem hipersfery S'. Zastosujmy do całki

$$I=\int\limits_{S'}f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\zeta_k}{r}\sigma^k\tag{46}$$

podstawienie (12), w którym r należy zastąpić przez r', a x_k przez $x_k-\zeta_k$ dla $k=1,2,\ldots,n$; wtedy na mocy (11) otrzymujemy

$$I=\int\limits_{\Delta}f(P)(r')^{n-1}\left(\prod_{k=2}^{n-1}\cos^{k-1}\varphi_k\right)d\varphi_1 d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-1},\tag{47}$$

gdzie Δ jest obszarem określonym nierównościami (13), P jest w obszarze Δ obrazem punktu $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

W obszarze Δ funkcja $f(P)$ jest ciągła, a wyrażenie $r'^{n-1}\prod\limits_{k=2}^{n-1}\cos^{k-1}\varphi_k$ jest nieujemne, zatem na mocy twierdzenia o wartości średniej całka (47) równa się

$$f(P')\int\limits_{\Delta}r'^{n-1}\left(\prod_{k=2}^{n-1}\cos^{k-1}\varphi_k\right)d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1},$$

gdzie P' jest punktem obszaru Δ, przy czym $f(P') = f(x')$, gdzie x' jest odpowiednim punktem sfery S'. Ostatnia całka na podstawie wzoru (19′) równa się polu $|S'|$ sfery S'. Wobec tego wyrażenie (47) równa się $|S'|f(x')$, a zatem lewa strona (45) równa się $f(x')$. Niech $r' \to 0$, wówczas sfera S' zdąża do punktu ζ, a więc $f(x') \to f(\zeta)$, a równość (45) przechodzi w równość (43), c.b.d.o.

Niech teraz D będzie obszarem ograniczonym w przestrzeni E_n, zorientowanym zgodnie z układem współrzędnych $(x_1, \ldots, x_n)$, o brzegu $D^{\bullet}$ klasy C^1 zorientowanym zgodnie z D i niech $g(x, \zeta)$ oznacza funkcję postaci

$$(48) \qquad g(x, \zeta) = (2-n)^{-1}\varrho^{2-n} + h(x) \qquad (n > 2),$$

gdzie $\zeta = \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ jest dowolnie ustalonym punktem obszaru D, $\varrho = \varrho(x, \zeta)$ jest odległością punktów określoną wzorem (44), a $h(x)$ jest dowolną funkcją klasy C^2 w obszarze domkniętym $D+D^{\bullet}$ (na płaszczyźnie $g(x, \zeta) = -\ln \varrho(x, \zeta) + h(x)$). Wykażemy, że

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją klasy C^2 w obszarze domkniętym $D+D^{\bullet}$, to jej wartość w punkcie $\zeta \in D$ wyraża się każdym z dwóch wzorów:

$$(49) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{|S|}\left[\int\limits_{D^{\bullet}} \sum_{k=1}^{n} \left(f(x)\frac{\partial g}{\partial x_k} - g(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\sigma^k - \int\limits_{D} (f\Delta g - g\Delta f)\sigma\right],$$

$$(50) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{|S|}\left[\int\limits_{D^{\bullet}} f(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\sigma^k - \int\limits_{D} \left(f\Delta g + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)\sigma\right],$$

gdzie różniczki σ^k i σ są określone wzorami (38), $|S|$ *oznacza pole sfery kuli jednostkowej* (*zob. wzór* (19) *lub* (19′), *str.* 63.)

D o w ó d. Podamy dowód wzoru (49); dowód wzoru (50) jest analogiczny. Niech K będzie hiperkulą: $(x_1 - \zeta_1)^2 + \ldots + (x_n - \zeta_n)^2 \leqslant r^2$ zawartą w D wraz ze swym brzegiem $K^{\bullet}$ i niech obszar $D_r = D - K$ będzie zorientowany zgodnie z układem współrzędnych, a jego brzeg $D^{\bullet} - K^{\bullet}$ niech będzie zgodnie zorientowany z D_r. Funkcje f i g są klasy C^2 w obszarze D_r, bo biegun ζ funkcji g leży zewnątrz D_r; na mocy (40), gdzie D należy zastąpić przez D_r, a $D^{\bullet}$ przez $D^{\bullet} - K^{\bullet}$, mamy

$$(51) \qquad \int\limits_{D^{\bullet}} \sum_{k=1}^{n} \left(g\frac{\partial f}{\partial x_k} - f\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)\sigma^k - \int\limits_{K^{\bullet}} \sum_{k=1}^{n} \left(g\frac{\partial f}{\partial x_k} - f\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)\sigma^k = \int\limits_{D_r} (g\Delta f - f\Delta g)\sigma.$$

Ponieważ na $K^{\cdot}$ jest $\partial g/\partial x_k = (x_k - \zeta_k)/r^n + \partial h/\partial x_k$, więc druga całka po lewej stronie (51) równa się sumie algebraicznej trzech całek:

$$(52)\qquad I_1+I_2+I_3 =$$

$$= \int\limits_{K^{\cdot}} \sum_{k=1}^{n} \left(h\frac{\partial f}{\partial x_k} - f\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)\sigma^k + \frac{r^{2-n}}{2-n}\int\limits_{K^{\cdot}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\sigma^k - r^{1-n}\int\limits_{K^{\cdot}} f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\zeta_k}{r}\sigma^k.$$

Prawa strona (51) i całki (52) zależą od r.

Niech $r\to 0$. Rozważmy po kolei całki występujące po lewej stronie wzoru (51). Pierwsza całka pozostaje bez zmiany, gdyż nie zależy od r. Druga całka jest równa sumie trzech całek (52). Oznaczmy

$$(53)\qquad F_k = h\frac{\partial f}{\partial x_k} - f\frac{\partial h}{\partial x_k},\qquad k = 1,\ldots,n,$$

i zastosujmy do całki I_1 podstawienie (12), w którym x_k zastąpiono przez $x_k - \zeta_k$, dla $k = 1,\ldots,n$. Na mocy (11) otrzymamy

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{K^{\cdot}} F_k\sigma^k = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Delta} F_k J_k d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1},$$

gdzie J_k jest jakobianem (17), a Δ—obszarem określonym nierównościami (13). Moduł funkcji (53) jest z założenia ograniczony w D (a zatem również w Δ), np. przez liczbę $M_1 > 0$ dla każdego k, a ze wzoru (17) widzimy, że moduł J_k jest nie większy od r^{n-1}, zatem

$$|I_1| \leqslant nM_1 r^{n-1}\int\limits_{\Delta} d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} = 2nM_1 r^{n-1}\pi^{n-1},$$

skąd $I_1\to 0$, gdy $r\to 0$. Oznaczając teraz przez $M_2 = \max\limits_{x\in D}|\partial f/\partial x_k|$ dla każdego k i stosując do całki I_2 podstawienie (12), otrzymujemy w podobny sposób

$$|I_2| \leqslant nM_2\frac{r^{2-n}}{n-2}r^{n-1}\int\limits_{\Delta} d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} = \frac{2n\pi^{n-1}}{n-2}M_2 r,$$

zatem $I_2\to 0$, gdy $r\to 0$. Stosując do ostatniej całki (52) postępowanie zastosowane do identycznej całki (46) i uwzględniając, że pole sfery $K^{\cdot}$ równa się $|S|r^{n-1}$ otrzymujemy, gdy $r\to 0$

$$I_3 = r^{1-n}|S|r^{n-1}f(x')\to |S|f(\zeta).$$

Zatem lewa strona (51) przy $r\to 0$ dąży do

$$(54)\qquad \int\limits_{D^{\cdot}}\sum_{k=1}^{n}\left(g\frac{\partial f}{\partial x_k} - f\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)\sigma^k - |S|f(\zeta).$$

Prawej stronie (51), po uwzględnieniu wzoru (48) i tożsamości $\Delta\varrho \equiv 0$ w obszarze D_r, można nadać postać

$$\int_{D_r} \frac{1}{2-n}\cdot\frac{1}{\varrho^{n-2}}\,\Delta f\sigma + \int_{D_r} (h\Delta f - f\Delta h)\sigma = I_4 + I_5.$$

W całce I_5 funkcja podcałkowa nie zależy od r, bo f i g są klasy C^2 w całym obszarze D; zatem gdy $r \to 0$, całka ta dąży do całki po całym obszarze D. Do całki I_4 wprowadzimy współrzędne biegunowe określone wzorami (12), gdzie x_k należy zastąpić przez $x_k - \zeta_k$, a r — przez ϱ. Metodą indukcji nietrudno wykazać, że jakobian tego przekształcenia wyraża się wzorem

$$J = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\varrho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \varrho^{n-1}\prod_{k=2}^{n-1}\cos\varphi_k,$$

gdzie $\varrho \geqslant r$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \varphi_k \leqslant \frac{1}{2}\pi$ dla $k = 2, \ldots, n-1$. Całka I_4 zależy od r i w nowych współrzędnych wyraża się wzorem

$$I_4 = \int_{\Delta_r} \frac{1}{2-n}\cdot\frac{1}{\varrho^{n-2}}\,\Delta f J\, d\varrho \wedge d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_{n-1},$$

czyli na mocy (11)

$$I_4 = \int_{\Delta_r} \frac{\Delta f}{2-n}\,\varrho\left(\prod_{k=2}^{n-1}\cos\varphi_k\right) d\varrho\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1},$$

gdzie Δ_r jest obrazem obszaru D_r we współrzędnych biegunowych. Funkcja podcałkowa w ostatniej całce jest ograniczona nie tylko w Δ_r, ale w obszarze Δ_0, będącym obrazem całego obszaru D. Zatem całka I_4 dąży do granicy skończonej, gdy $r \to 0$. Wobec tego, gdy $r \to 0$, czyli $D_r \to D$, prawa strona (51) dąży do granicy skończonej, która równa się

$$\int_D (g\Delta f - f\Delta g)\sigma.$$

Stąd i z (54) wynika równość (49).

Dowód wzoru (50) jest analogiczny. Wzory (43), (49) i (50) nazywamy *wzorami Greena* (dowód dla $n = 3$ znajduje się w [8], str. 219).

Prace cytowane

[1] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1965.

[2] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Roma 1955.

[3] W. Ślebodziński, *Algorytm form zewnętrznych*, Prace Matematyczne 1 (1955), str. 71-92.

[4] E. Cartan, *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff,* Ann. de l'École N. S. 16 (1899), str. 239-322.

[5] — *Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géométriques,* Paris 1955.

[6] G. De Rham, *Variétés différentiables,* Paris 1955.

[7] P. S. Aleksandrow i W. A. Jefremowicz, *Zarys podstawowych pojęć topologii,* Warszawa 1955.

[8] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik,* t. II, 1937.

[9] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego,* Część I, Warszawa 1957.

[10] A. Goetz i inni, *Zewnętrzne formy różniczkowe i pewne ich zastosowania,* Warszawa 1965.

F. Bierski (Kraków)

THE GENERAL THEOREM OF STOKES AND ITS APPLICATIONS

SUMMARY

The author presents an introductory presentation of exterior forms of E. Cartan, their differentials, a proof of the identity $\int_{W^{\cdot}} a = \int_{W} da$ for an oriented polyhedron W, proofs of two formulas of Green type and some formulas for harmonic functions.
