ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1971)

Sur l'unicité du problème de Cauchy dans une classe de fonctions non bornées

par J. Chabrowski (Katowice)

Considérons l'équation linéaire parabolique

$$(1)\qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)u_{x_i} + c(t, x)u - u_t = 0$$

($a_{ij} = a_{ji}$), dont les coefficients sont définis dans une couche $H = (0, T]\times \times E_n$ (E_n étant l'espace euclidien à n dimensions).

Dans le présent travail je démontre un théorème concernant l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (1) dans la classe des fonctions qui vérifient l'inégalité

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u-(t, x)\exp(-a|x|^2)\,dx < \infty,$$

où l'on a posé

$$u-(t, x) = \max\big(-u(t, x), 0\big), \qquad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

a étant une constante positive. Cette classe contient évidemment la classe des fonctions telles que

$$u(t, x) \geqslant -M\exp(a|x|^2),$$

classe qui a été déjà considérée par P. Besala et M. Krzyżański (voir [2]) et A. Friedman (voir [6], chap. 2, sec. 4). La classe, qui sera étudiée dans cette note, a été traitée par M. Nicolescu et C. Foias (voir [9] et [10]) pour l'équation de la propagation de la chaleur. P. Mustată [8] a étendu leur résultat à l'équation de la forme

$$u_t = a(t, x)u_{xx} + b(t, x)u_x + c(t, x)u.$$

On suppose que les coefficients de l'équation (1) sont soumis aux hypothèses suivantes:

I. Les coefficients sont hölderiens par rapport aux variables (t, x), ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'au second ordre par rapport aux variables spatiales x_j ($j = 1, \ldots, n$).

II. Il existe des constantes positives K_1, K_2 et K_3 telles que

$$|a_{ij}(t,x)| \leqslant K_1, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(t,x)\right|, |b_i(t,x)| \leqslant K_2(|x|^2+1)^{1/2},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial x_i} b_i(t,x)\right|, |c(t,x)| \leqslant K_3(|x|^2+1)$$

$(i,j = 1, \ldots, n)$ pour $(t,x) \in H$.

III. La forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ est uniformément définie positive.

L'hypothèse I concernant les dérivées des coefficients garantit les estimations suivantes (voir [5], chap. 1, § 5) de la solution fondamentale:

$$G(t,x;\tau,y) \leqslant C(t-\tau)^{-n/2}\exp\left(-\mu\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right), \tag{2}$$

$$|G_{x_i}(t,x;\tau,y)| \leqslant C(t-\tau)^{-(n+1)/2}\exp\left(-\mu\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right),$$

$$|G_{x_ix_j}(t,x;\tau,y)| + |G_t(t,x;\tau,y)| \leqslant C(t-\tau)^{-(n+2)/2}\exp\left(-\mu\frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right)$$

$(i,j = 1, \ldots, n)$ pour $(t,x), (\tau,y) \in H$ $(t > \tau)$ (C et μ étant des constantes positives), dont nous faisons usage dans la démonstration du théorème qui suit et du théorème 3.

Les solutions traitées dans ce travail seront régulières dans H (c'est-à-dire continues dans $\bar{H}$ et ayant des dérivées $u_{x_i}, u_{x_ix_j}, u_t, i,j = 1, \ldots, n$, continues dans H).

1. Les hypothèses I, II et III étant admises, nous pouvons énoncer nos théorèmes.

THÉORÈME 1. *Soit $u(t,x)$ une solution régulière dans H de l'équation* (1) *et satisfaisant aux conditions*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u_-(t,x)\exp(-a|x|^2)dx < \infty \tag{3}$$

et

$$u(0,x) \geqslant 0 \tag{4}$$

pour tout $x \in E_n$ (a étant une constante positive).

On a l'inégalité $u(t,x) \geqslant 0$ pour $(t,x) \in \bar{H}$.

Démonstration. Soit

$$L^*v = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(t,x)v)_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n}(b_i(t,x)v)_{x_i} + c(t,x)v + v_t$$

l'opérateur adjoint à L. On sait que l'égalité suivante (voir [6] chap. 1, sec. 8)

$$(5)\qquad \int_0^s dt \int_{E_n} (vLw - wL^* v)\,dx = \int_{E_n} v(0, x)w(0, x)\,dx - \int_{E_n} v(s, x)w(s, x)\,dx, \quad 0 < s \leqslant T$$

est valable pour des fonctions w et v suffisamment régulières. Nous montrerons d'abord que $u(t, x) \geqslant 0$ dans une couche $(0, \delta] \times E_n$ convenablement choisie. Fixons un point $(\bar t, \bar x) \in (0, \delta] \times E_n$. Posons dans l'identité (5)

$$v(t, x) = h(x)G(\bar t, \bar x; t, x), \qquad w(t, x) = u(t, x), \qquad s = \bar t - \varepsilon, \ \varepsilon > 0,$$

$h(x)$ étant une fonction de classe $C^2(E_n)$ jouissant des propriétés suivantes $h(x) = 1$ pour $|x - \bar x| \leqslant R$, $h(x) = 0$ pour $|x - \bar x| \geqslant R+1$ et de plus

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1, \ |h_{x_i}| + |h_{x_i x_j}| \leqslant M \ \text{pour} \ x \in E_n, i, j = 1, \ldots, n,$$

où la constante positive M est indépendante de R. Il est clair que

$$\int_0^{\bar t - \varepsilon} dt \int_{E_n} uL^*(hG)\,dx = \int_{E_n} G(\bar t, \bar x; \bar t - \varepsilon, x)h(x)u(\bar t - \varepsilon, x)\,dx - \int_{E_n} u(0, x)h(x)G(\bar t, \bar x; 0, x)\,dx.$$

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$, en vertu de la propriété bien connue de la solution fondamentale (voir [6], chap. 1, sec. 1), on a

$$(6)\qquad \int_0^{\bar t} dt \int_{E_n} uL^*(hG)\,dx = u(\bar t, \bar x) - \int_{E_n} u(0, x)h(x)G(\bar t, \bar x; 0, x)\,dx.$$

Puisque la solution fondamentale $G(\bar t, \bar x; t, x)$, en tant que fonction du point (t, x), satisfait à l'équation adjointe à (1), on a

$$L^*(hG) = 2\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} G + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial h}{\partial x_i} G,$$

d'où nous trouvons, en vertu des inégalités (2) et de l'hypothèse II, que

$$(7)\qquad \int_0^{\bar t} dt \int_{E_n} u_- L^*(hG)\,dx \leqslant K \exp\left(-\frac{\mu R^2}{2\delta}\right) \int_0^{\bar t} dt \int_{R \leqslant |\bar x - x| \leqslant R+1} u_-(t, x)\,dx$$

$$\leqslant K \exp\left[-\frac{\mu R^2}{2\delta} + 2a(R+1)^2\right] \int_0^{\bar t} dt \int_{R \leqslant |\bar x - x| \leqslant R+1} u_-(t,x) \exp(-2a|x - \bar x|^2)\,dx,$$

K étant une constante positive dépendant de M, K_1, K_2, K_3 et δ. Il résulte de la condition (3) que

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u_-(t,x)\exp(-2a|x-\bar{x}|^2)\,dx < \infty.$$

En posant $\delta = \mu/6a$, on en déduit d'après (7) l'égalité

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u_- L^*(hG)\,dx = 0, \tag{8}$$

d'où, selon (6), il résulte que

$$\lim_{R\to\infty} \Big[\int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u_+ L^*(hG)\,dx + \int_{E_n} u(0,x)h(x)G(\bar{t},\bar{x},0,x)\,dx\Big] = u(\bar{t},\bar{x}), \tag{9}$$

où $u_+(t,x) = \max(0, u(t,x))$.

Posons maintenant dans l'idéntité (5)

$$v(t,x) = h(x)G(\bar{t},\bar{x};t,x), \qquad w(t,x) = [u(t,x)^2+\eta]^{1/2}, \qquad s = \bar{t}-\varepsilon,$$

η et ε étant des nombres positifs. Il est facile de vérifier que

$$Lw \geqslant c\eta/w,$$

donc en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ nous obtenons

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} \frac{\eta c}{w} hG\,dx + [u(t,x)^2+\eta]^{1/2} \leqslant \int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} (u^2+\eta)^{1/2} L^*(hG)\,dx +$$
$$+ \int_{E} [u(0,x)^2+\eta]^{1/2} h(x)G(\bar{t},\bar{x};0,x)\,dx.$$

Si $\eta \to 0$, alors en vertu de l'inégalité (4) nous avons

$$|u(\bar{t},\bar{x})| \leqslant \int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} |u|\,L^*(hG)\,dx + \int_{E_n} u(0,x)h(x)G(\bar{t},\bar{x};0,x)\,dx.$$

De là et des égalités (8) et (9) il résulte l'inégalité

$$|u(\bar{t},\bar{x})| \leqslant \lim_{R\to\infty}\Big[\int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u_+ L^*(hG)\,dx + \int_{E_n} u(0,x)h(x)G(\bar{t},\bar{x};0,x)\,dx\Big] = u(t,\bar{x}),$$

donc la solution $u(t,x)$ est non négative dans $(0,\delta]\times E_n$, ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas $\delta = T$. Si $\delta < T$ on n'a qu'à établir de proche en proche l'inégalité $u \geqslant 0$ dans les couches $(l\delta < t < (l+1)\delta)\times E_n$, $l = 1, \ldots, m$.

La transformation de la solution $u = -v$ conduit au résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $u(t, x)$ une solution régulière dans H de l'équation* (1) *et satisfaisant aux conditions*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u_+(t, x)\exp(-a|x|^2)dx < \infty, \qquad a > 0,$$

$$u(0, x) \leqslant 0 \quad \textit{pour } x \in E_n.$$

On a l'inégalité

$$u(t, x) \leqslant 0 \quad \textit{pour tout } (t, x) \in \bar{H}.$$

Le théorème 1 permet d'établir un critère d'unicité du problème de Cauchy, à savoir:

THÉORÈME 3. *Soient $u^1(t, x)$ et $u^2(t, x)$ deux solutions régulières dans H de l'équation* (1) *et satisfaisant pour un certain $a > 0$ aux conditions*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u_-^i(t, x)\exp(-a|x|^2)dx < \infty, \tag{10}$$

$$\int_{E_n} u_-^i(0, x)\exp(-a|x|^2)dx < \infty, \qquad i = 1, 2 \tag{11}$$

et de plus

$$u^1(0, x) = u^2(0, x) \quad \textit{pour tout } x \in E_n.$$

On a l'égalité

$$u^1(t, x) = u^2(t, x) \quad \textit{pour tout } (t, x) \in \bar{H}.$$

Démonstration. En s'appuyant sur les inégalités (2) et (11) il est facile de vérifier (voir aussi [7], théorème 1) que l'intégrale $\int_{E_n} G(t, x; 0, y)u_-^i(0, y)dy$ est une solution de (1) dans une couche $(0, \delta_1] \times E_n$ convenablement choisie et satisfaisant à la condition initiale

$$\lim_{t\to 0+} \int_{E_n} G(t, x; 0, y)u_-^i(0, y)dy = u_-^i(0, x), \qquad i = 1, 2.$$

Introduisons donc les fonctions

$$w^i(t, x) = u^i(t, x) + \int_{E_n} G(t, x; 0, y)u_-^i(0, y)dy, \qquad i = 1, 2,$$

pour $(t, x) \in (0, \delta_1] \times E_n$. Il est évident que

$$w_-^i(t, x) \leqslant u_-^i(t, x),$$

donc, d'après l'hypothèse (10), nous avons

$$\int_0^{\delta_1} dt \int_{E_n} w_-^i(t, x)\exp(-a|x|^2)dx < \infty, \qquad i = 1, 2.$$

Comme $\lim_{t\to 0+} w^i(t,x) = u^i_+(0,x) \geqslant 0$, on en déduit, d'après le théorème 1, que $w^i(t,x) \geqslant 0$ pour $(t,x)\in[0,\delta_1]\times E_n$. Observons que $\lim_{t\to 0+} w^1(t,x) = \lim_{t\to 0+} w^2(t,x)$, donc il résulte de l'unicité des solutions non négatives (voir [1]) que $w^1(t,x) = w^2(t,x)$ pour $(t,x)\in[0,\delta_1]\times E_n$, d'où $u^1(t,x) = u^2(t,x)$. Il résulte de l'hypothèse (10) que l'intégrale $\int_{E_n} u^i_-(t,x) \times \exp(-a|x|^2)dx$ est finie pour presque tout $t\in(0,T)$, donc en répétant ce procédé il est aisé de démontrer que $u^1 = u^2$ dans $\bar{H}$.

THÉORÈME 4. *Soit $u(t,x)$ une solution régulière de l'équation* (1) *dans H et satisfaisant pour un certain $a>0$ à la condition*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u_-(t,x)\exp(-a|x|^2)dx < \infty.$$

Pour tout $\tau\in(0,T)$ tel que l'intégrale $\int_{E_n} u_-(\tau,x)\exp(-a|x|^2)dx$ est finie on a, dans une couche $(\tau,\gamma]\times E$ convenablement choisie, l'égalité

$$u(t,x) = \int_{E_n} G(t,x;\tau,y)u(\tau,y)dy.$$

Démonstration. Tout comme dans la démonstration du théorème 3 nous prouvons que la fonction

$$z(t,x) = u(t,x) + \int_{E_n} G(t,x;\tau,y)u_-(\tau,y)dy$$

est une solution non négative de (1) dans une couche $(\tau,\delta_1]\times E_n$ et satisfaisant à la condition initiale $\lim_{t\to\tau+0} z(t,x) = u_+(\tau,x) \geqslant 0$. Le lemme 1 de [1] entraîne l'inégalité

$$\int_{E_n} G(t,x;\tau,y)\lim_{s\to\tau+0} z(s,y)dy = \int_{E_n} G(t,x;\tau,y)u_+(\tau,y)dy \tag{12}$$
$$\leqslant z(t,x) = u(t,x) + \int_{E_n} G(t,x;\tau,y)u_-(\tau,y)dy.$$

Fixons $x=0$ et $t=\delta_1$. Il existe deux nombres positifs Λ et λ (voir [1]) tels qu'on a

$$G(\delta_1,0,s,y) \geqslant \Lambda\exp(-\lambda|y|^2)$$

pour $0\leqslant s\leqslant\delta_2$, où $\tau\leqslant\delta_2<\delta_1$. Cette inégalité et (12) permettent d'établir que l'intégrale $\int_{E_n} u_+(\tau,y)\exp(-\lambda|y|^2)dy$ est finie, donc $\int_{E_n} G(t,x;\tau,y)\times u_+(\tau,y)dy$ constitue une solution de (1) dans une couche $(\tau,\delta_3]\times E_n$ et satisfaisant à la condition initiale $\lim_{t\to\tau+0}\int G(t,x;\tau,y)u_+(\tau,y)dy =$

$= u_+(\tau, x)$. D'après le théorème sur l'unicité du problème de Cauchy dans la classe des solutions non négatives (voir [1]) on a

$$z(t, x) = \int_{E_n} G(t, x; \tau, y) u_+(\tau, y) dy,$$

ce qui termine la démonstration.

2. Les résultats du paragraphe précédent s'étendent au système de la forme

$$(13) \quad L^k(u^1, \ldots, u^N) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x) u_{x_i x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k(t, x) u_{x_i}^k + \sum_{i=1}^{N} c_i^k(t, x) u^i - u_t^k = 0$$

$(a_{ij}^k = a_{ji}^k)$, $k = 1, \ldots, N$, dont les coefficients sont bornés et hölderiens par rapport aux variables $(t, x) \in H$ ainsi que toutes les dérivées du premier ordre des coefficients $b_i^k(t, x)$ $(k = 1, \ldots, N,\ i = 1, \ldots, n)$ par rapport aux variables x_j $(j = 1, \ldots, n)$ et les dérivées du second ordre des coefficients $a_{ij}^k(t, x)$ $(k = 1, \ldots, N,\ i, j = 1, \ldots, n)$ par rapport aux mêmes variables. On suppose que les formes quadratiques $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x) \xi_i \xi_j$ $(k = 1, \ldots, N)$ sont uniformément définies positives.

On sait que sous ces hypothèses il existe une matrice des solutions fondamentales $\{G_{pq}(t, x; \tau, y)\}$, $p, q = 1, \ldots, N$, du système (13), dont la matrice transposée en tant que fonction du point (τ, y) est la matrice des solutions fondamentales du système adjoint à (13) (voir [6], chap. 9 ou bien [11]).

Supposons encore que

$$(14) \qquad c_i^k(t, x) \geqslant 0$$

pour $(t, x) \in H$ et pour $i \neq k$, $k, i = 1, \ldots, N$. Grâce aux inégalités (14) tous les éléments de la matrice des solutions fondamentales sont non négatifs (voir [3]).

Les démonstrations des théorèmes suivants sont tout-à-fait analogues à celles du section 1 (voir aussi [4])

Théorème 5. *Soit* $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, *une solution régulière du système* (13) *dans* H *et satisfaisant pour un certain* $a > 0$ *aux conditions*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u_-^i(t, x) \exp(-a|x|^2) dx < \infty$$

$$\left(\textit{ou bien} \int_0^T dt \int_{E_n} u_+^i(t, x) \exp(-a|x|^2) dx < \infty\right)$$

et de plus

$$u^i(0, x) \geqslant 0 \quad (u^i(0, x) \leqslant 0), \quad i = 1, \ldots, N,$$

pour $x \in E_n$.

On a les inégalités

$$u^i(t, x) \geqslant 0 \quad (u^i(t, x) \leqslant 0), \quad i = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in \bar{H}$.

THÉORÈME 6. *Soient* $\{u_k^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2$, *deux solutions régulières de* (13) *dans* H *et satisfaisant pour un certain* $a > 0$ *aux conditions*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u_{k-}^i(t, x) \exp(-a|x|^2) dx < \infty, \qquad \int_{E_n} u_{k-}^i(0, x) \exp(-a|x|^2) dx < \infty,$$

$i = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2$, *et de plus*

$$u_1^i(0, x) = u_2^i(0, x), \quad i = 1, \ldots, N,$$

pour $x \in E_n$.

On a les égalités

$$u_1^i(t, x) = u_2^i(t, x), \quad i = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in \bar{H}$.

THÉORÈME 7. *Soit* $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, *une solution régulière du système* (13) *dans* H *et satisfaisant pour un certain* $a > 0$ *à la condition*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u_-^i(t, x) \exp(-a|x|^2) dx < \infty, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Pour tout $\tau \in (0, T)$ *tel que*

$$\int_{E_n} u^i(\tau, x) \exp(-a|x|^2) dx < \infty, \quad i = 1, \ldots, N,$$

on a dans une couche $(0, \gamma] \times E_n$ *les égalités*

$$u^i(t, x) = \sum_{j=1}^N \int_{E_n} G_{ij}(t, x; \tau, y) u^j(\tau, y) dy, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Remarque. Il est évident que les théorèmes 3, 4, 6 et 7 restent valables lorsque nous remplaçons les parties négatives des solutions par les parties positives.

Travaux cités

[1] D. G. Aronson and P. Besala, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients*, Coll. Math. 18 (1967), p. 125-135.

[2] P. Besala et M. Krzyżański, *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire normale parabolique du second ordre*, Rend. Accad. Naz. Lincei 33 (1962), p. 230-236.

[3] J. Chabrowski, *Les solutions non négatives d'un système parabolique d'équations*, Ann. Polon. Math. 19 (1967), p. 193-197.

[4] — *Les propriétés des solutions non négatives d'un système parabolique d'équations*, ibidem 22 (1970), p. 323-331.

[5] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Москва 1964.

[6] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Englewood Cliffs 1964.

[7] M. Krzyżański, *Sur les solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique*, Revue Roumaine Math. Pures et Appliquées 9 (5) (1964), p. 393-408.

[8] P. Mustată, *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire parabolique du second ordre*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21 (1967), p. 507-526.

[9] M. Nicolescu et C. Foias, *Représentation de Poisson et problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur*, Rend. Accad. Naz. Lincei 38, fasc. 4 (1965), p. 465-476; 38, fasc. 5 (1965), p. 621-626.

[10] — *Sur l'unicité du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur*, ibidem 40 (1966), p. 785-791.

[11] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche Mat. 7 (958), p. 153-185.

Reçu par la Rédaction le 31. 3. 1969