J. ODERFELD (Warszawa)

O STATYSTYCZNEJ KONTROLI CECH ADDYTYWNYCH

§ 1. Ograniczamy się do przypadku, gdy populacja generalna ma rozkład normalny, co często zachodzi w statystycznej kontroli jakości. Zadanie polega na oszacowaniu odchylenia średniego tej populacji. Do tego celu stosuje się różne estymatory nieobciążone, których dobry przegląd podał Žitek [1]. Są to: średnie odchylenie kwadratowe, odchylenie przeciętne, średnia różnica Giniego, rozstęp itd.

W praktyce SKJ uprzywilejowanym estymatorem odchylenia średniego jest rozstęp w próbce pomnożony przez pewien stały współczynnik.

Jak wiadomo, efektywność tego estymatora jest bardzo niska w próbkach bardzo małych (powiedzmy 2-sztukowych) i w próbkach dużych (powiedzmy 50-sztukowych). Wiadomo również, że wyznaczanie rozstępu w dużych próbkach często bywa obarczone jednokierunkową omyłką (zawsze *in minus*), trudną do wykrycia i uniknięcia. Z tych powodów używa się rozstępu zwykle wtedy, gdy próbka liczy kilka (zwykle od 3 do 6) elementów.

Opiszemy przypadek, gdy dają się połączyć zalety rozstępu i dużej, nawet bardzo dużej liczności próbki do precyzyjnego estymowania odchylenia średniego σ w populacji generalnej; przy sposobności można próbkę wykorzystać do estymowania średniej μ w populacji generalnej.

Taki przypadek zachodzi wtedy, gdy mierzoną cechę można automatycznie sumować przy mierzeniu. Podamy parę przykładów z praktyki statystycznej kontroli jakości: łączny ciężar 50 bułek lub papierosów równa się sumie ciężarów wszystkich bułek lub papierosów, łączna grubość 50 wałeczków łożyskowych równa się sumie grubości wszystkich wałeczków itd.

Pokażemy, że w tych przypadkach można bardzo łatwo oszacować μ i σ, czasem przy użyciu niezbyt skomplikowanych przyrządów specjalnych, a czasem nawet tylko za pomocą przyrządów uniwersalnych.

Niechaj pomiary w próbce o liczności $2n$ tworzą ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Podzielmy ten ciąg na n grup i w każdej zaznaczmy liczbę większą. Oznaczmy przez S_w sumę większych liczb w grupach, a przez S_m sumę mniejszych.

Estymatorem odchylenia średniego σ w populacji generalnej jest

$$\varrho = \frac{0,8862}{n}(S_w - S_m). \tag{1}$$

Wariancja tego estymatora jest

$$D^2(\varrho) = \frac{0,5708}{n}\sigma^2, \tag{2}$$

można ją więc dowolnie zmniejszyć zwiększając n.

Efektywność estymatora ϱ wynosi 0,438, niezależnie od liczności próbki.

Do dowodu oznaczmy przez R rozstęp w próbce dwuelementowej. Nieobciążonym estymatorem σ jest (por. [1]) $\sigma^*_{R1} = 0,8862R$. Jego wariancja jest $0,5708\sigma^2$. Ze sposobu w jaki powstał estymator ϱ widać, że jest on po prostu średnią arytmetyczną z n estymatorów σ^*_{R1}, co uzasadnia (1) i (2).

Z twierdzenia Rao i Craméra wynika, że w próbce o liczności $2n$ najmniejsza wariancja estymatora sigmy wynosi $\sigma^2/4n$; dzieląc to wyrażenie przez (2) znajdujemy efektywność równą 0,438.

Estymatorem średniej μ w populacji generalnej jest

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(S_w + S_m). \tag{3}$$

Jest to zwykła średnia, która jak wiadomo, jest estymatorem najbardziej efektywnym.

§ 2. Pokażemy teraz zastosowanie wzorów (1) i (3) do statystycznego kontrolowania addytywnej cechy produktu masowo wytwarzanego. Ogólność rozważań nie ucierpi, a konkretność zyska, jeśli przyjmiemy, że chodzi o ciężar bułek.

Przypuśćmy, że nominalny ciężar bułki jest D, a przedział tolerancji ma szerokość T i jest symetrycznie rozłożony względem D. Technik notuje to w postaci warunku: ciężar bułki ma być $D \pm T/2$.

Z bieżącej produkcji piekarni pobieramy losowo w równych odstępach czasu po n par bułek i kładąc obie bułki z każdej pary na szalki wagi porównujemy ich ciężary. Wszystkie cięższe bułki wrzucamy do jednego koszyka, a wszystkie lżejsze — do drugiego. Teraz ważymy każdy koszyk osobno uwzględniając tarę i otrzymujemy ciężary netto S_w i S_m.

Wielkości $\bar{x}$ i ϱ obliczone z wzorów (3) i (1) można wykorzystać do prowadzenia w znany sposób karty kontrolnej średniej i odchylenia średniego.

Jak widzimy, pomiary są tu bardzo proste, redukują się do porównywania ciężarów (bez ich rejestrowania) i do dwóch ważeń, których wynikiem są dwie liczby S_w i S_m. Również proste jest rachunkowe opracowanie tych wyników, można je jednak jeszcze bardziej uprościć, na przykład można przygotować dla ustalonej liczby n tablice, z których się odczytuje $\bar{x}$ i ϱ zależnie od S_w i S_m; można również zbudować prosty nomogram itd.

§ 3. Inną możliwością jest prowadzenie karty kontrolnej, którą nazwiemy *kartą sum i różnic.*

Jeśli jest spełniona relacja $T > 6\sigma$, co jest regułą w procesie technologicznym dobrze uzgodnionym z wymaganiami technicznymi, to produkt będzie praktycznie wolny od defektów, gdy będzie zachodziła podwójna nierówność

$$D-\tfrac{1}{2}T+3\sigma < \mu < D+\tfrac{1}{2}T-3\sigma. \tag{4}$$

Mnożnik 3 przy σ pochodzi z „reguły trzysigmowej" dobrze wypróbowanej w praktyce.

Ponieważ średnia $\bar{x}$ w próbce o liczności $2n$ ma rozkład $N(\mu, \sigma/\sqrt{2n})$, więc stosując raz jeszcze regułę trzysigmową otrzymujemy dozwolony przedział dla $\bar{x}$

$$(D-\tfrac{1}{2}T+3\sigma-3\sigma/\sqrt{2n},\ D+\tfrac{1}{2}T-3\sigma+3\sigma/\sqrt{2n}),$$

a stąd położenia linii kontrolnych na torze sum

$$\begin{aligned} H_g &= 2nD+[nT-3\sigma(2n-\sqrt{2n})], \\ H_d &= 2nD-[nT-3\sigma(2n-\sqrt{2n})]. \end{aligned} \tag{5}$$

Oczywiście na torze można przyjąć umowne zero na dogodnym poziomie.

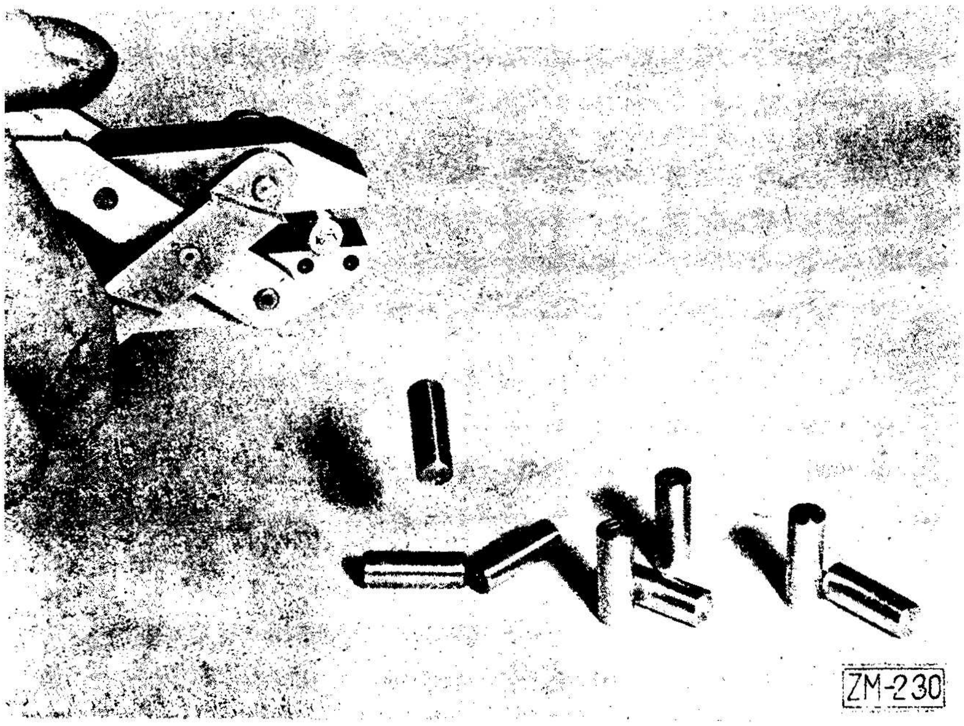
Oczekiwana wartość rozstępu w losowo pobranej parze elementów jest $\frac{1}{0{,}8862}\sigma$, czyli $1{,}128\sigma$, a odchylenie średnie w rozkładzie rozstępu w parze elementów jest $0{,}853\sigma$.

Oczekiwana wartość różnicy S_w-S_m jest więc $1{,}128n\sigma$, a odchylenie średnie tej różnicy (wobec niezależności rozstępów kolejnych par) jest $0{,}853\sqrt{n}\,\sigma$. Rozkład S_w-S_m jest w przybliżeniu normalny, mimo wyraźnej asymetrii w rozkładzie rozstępu próbki dwuelementowej, gdyż n jest duże (kilkanaście lub kilkadziesiąt). Jeśli więc uznamy, zgodnie z praktyką SKJ, że prawdopodobieństwo $0{,}5\,^0/_0$ fałszywych sygnałów jest przy kontroli rozrzutu odpowiednie, to otrzymamy położenia linii kontrolnych na torze różnic

$$\begin{aligned} K_g &= 1{,}128n\sigma+2{,}58\cdot 0{,}853\sqrt{n}\sigma = \sigma(1{,}128n+2{,}2\sqrt{n}), \\ K_d &= 1{,}128n\sigma-2{,}58\cdot 0{,}853\sqrt{n}\sigma = \sigma(1{,}128n-2{,}2\sqrt{n}). \end{aligned} \tag{6}$$

Pod względem zakładania i prowadzenia karta sum i różnic jest równie prosta jak klasyczna karta średniej i rozstępu, ale — dzięki dużej liczności próbki — o wiele precyzyjniejsza.

§ 4. Na zakończenie opiszemy dwa przyrządy specjalne pozwalające na zastosowanie karty sum i różnic do kontrolowania średnicy wałeczka. Przyrządy te zostały wykonane na zlecenie Instytutu Matematycznego PAN zgodnie z zasadami zaproponowanymi przez autora i podanymi w pracy [2]. Konstruktorem był mgr Z. Bochenek z katedry metrologii Politechniki Warszawskiej.

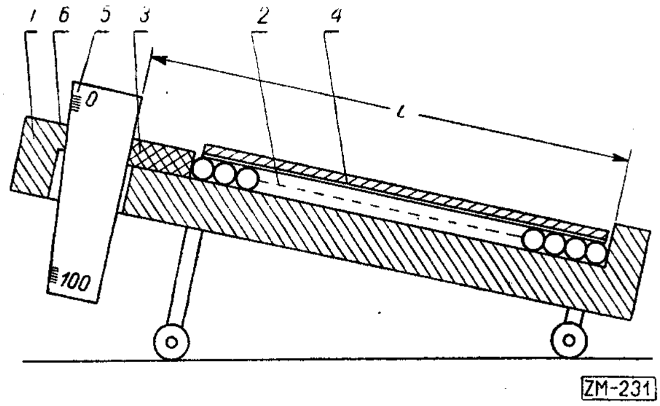


Rys. 1. Przyrząd do porównywania pary wałeczków. (Fot. K. Giedroyć)

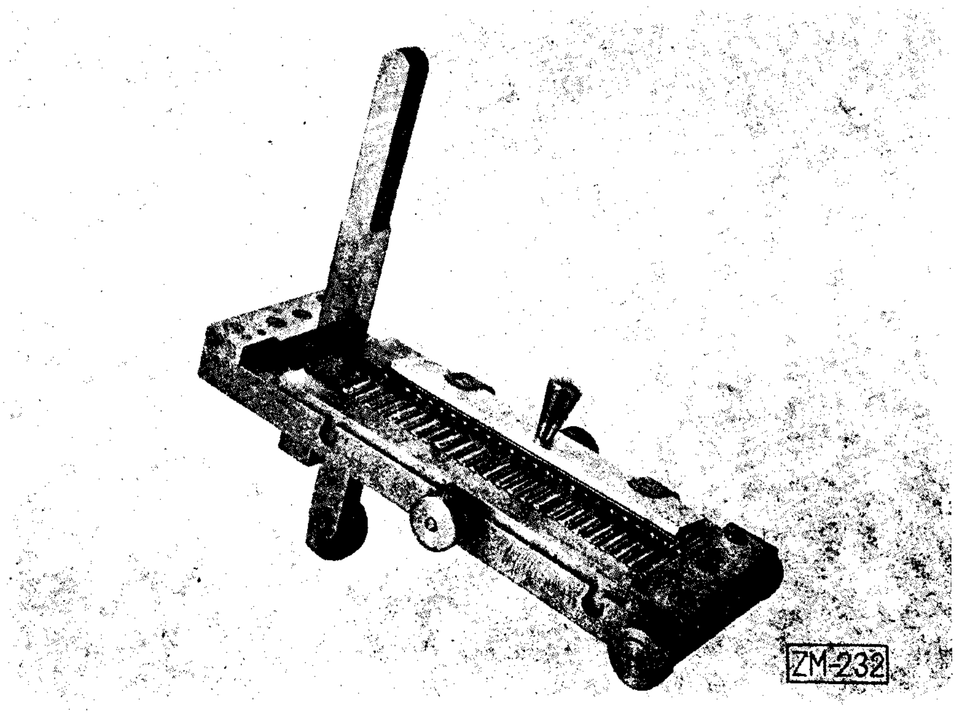
Do porównywania średnic w parze wałeczków służą szczypce pokazane na rysunku 1. Parę wałeczków pobraną losowo umieszcza się między dokładnie równoległymi szczękami i lekko się zwiera szczęki, które zaciskają się na grubszym wałeczku. Wałeczek cieńszy pozostaje luźny i wypada ze szczypiec po ich obróceniu. W ten sposób dzielimy n par wałeczków na n sztuk większych i n mniejszych.

Do pomiaru S_w i S_m służy przyrząd pokazany na rysunkach 2 i 3. W korpusie *1* są dwa rowki *2*, z których jeden jest przeznaczony na wałeczki większe, drugi na mniejsze. Po włożeniu do rowka n wałeczków uzupełniamy ich szereg płytką *3* o znanej długości, lekko dociskamy wałeczki przykrywką *4* zaopatrzoną w gumową podkładkę i wkładamy klin mierniczy *5* o zbieżności 1:100 z podziałką milimetrową od 0 do 100.

Pomiar polega na odczytaniu numeru kreski klina zbiegającej się z powierzchnią mierniczą *6*. Niechaj ten numer będzie w w przypadku wałeczków większych, a m w przypadku mniejszych. Niechaj płytka *3*



Rys. 2. Schemat przyrządu do pomiaru S_w i S_m wałeczków



Rys. 3. Przyrząd do pomiaru S_w i S_m wałeczków. (Fot. K. Giedroyć)

ma długość p_w w przypadku wałeczków większych, a p_m w przypadku mniejszych. Przyrząd jest tak wykonany, że wymiar l wynosi dokładnie 200 mm, gdy zero klina mierniczego zbiega się z krawędzią *6*.

Mamy więc (w milimetrach)

$$S_w = 200 - p_w + \frac{1}{100} w, \qquad S_m = 200 - p_m + \frac{1}{100} m,$$

czyli

$$S_w + S_m = 400 - (p_w + p_m) + \frac{1}{100}(w+m), \tag{7}$$

$$S_w - S_m = p_m - p_w + \frac{1}{100}(w-m). \tag{8}$$

Zamiast rejestrować na karcie kontrolnej wartości $S_w + S_m$ rejestrujemy tylko $w+m$, a zamiast $S_w - S_m$ rejestrujemy $w-m$. Położenia linii kontrolnych wynikają z wzorów (5) i (7) oraz (6) i (8). Na przykład położenie H'_g górnej linii kontrolnej na torze $w+m$ obliczamy z zależności $H'_g = (H_g - 400 + p_w + p_m)100$; liczba ta jest wyrażona w setnych milimetra.

Dogodne może być przyjęcie obu płytek tej samej długości ($p_w = p_m$), jednakże przyjmując $p_m > p_w$ można powiększyć zakres pomiarowy przyrządu bez uszczerbku dla dokładności i bez komplikacji dla kontrolera, który w każdym przypadku ma tylko zmierzyć w i m, dodać te liczby i odjąć, a wyniki zaznaczyć na karcie kontrolnej.

Jeśli decydujemy się na różne długości płytek, to celowy jest taki dobór ich długości, żeby oczekiwane położenie klina przypadało w połowie długości pomiarowej (na kresce nr 50), gdy średnia średnica w partii wałeczków jest równa średnicy nominalnej D i gdy odchylenie średnie ma przewidywaną wielkość σ. W tych warunkach zachodzą relacje

$$2nD = 401 - (p_w + p_m), \qquad 1{,}128 n\sigma = p_m - p_w,$$

skąd łatwo znaleźć p_m i p_w.

Próby przeprowadzone na partii wałeczków o znanym rozkładzie średnic pokazały zadowalającą powtarzalność wyników i zgodność ich z teorią.

Prace cytowane

[1] F. Žitek, *O pewnych estymatorach odchylenia średniego*, Zastosowania Matematyki, 1 (1954), str. 342-353.

[2] J. Oderfeld, *O automatyzacji statystycznej kontroli jakości*, Zastosowania Matematyki, 1 (1954), str. 188-196.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Я. ОДЕРФЕЛЬД (Варшава)

О СТАТИСТИЧЕСКОМ КОНТРОЛЕ АДДИТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ

РЕЗЮМЕ

В статье говорится об оценке средней и дисперсии признака с нормальным распределением в предположении, что этот признак аддитивен. Таков, на пример, вес предметов массового производства.

Из генеральной совокупности выбираем $2n$ элементов, делим их на пары и в каждой паре находим больший и меньший элемент. Потом измеряем признак S_w суммы n больших элементов и признак S_m суммы n меньших элементов. Из чисел S_w и S_m можно составить простые оценки средней и дисперсии. Оценка дисперсии имеет, правда, малую эффективность по Фишеру, но ее точность может быть велика, поскольку численность выборки можно увеличить, не усложняя измерений и вычислений.

В статье описана дальше специальная контрольная карта, применительно к этому случаю, и устройство для автоматизации измерений в производстве роликов для подшипников качения.

J. ODERFELD (Warszawa)

ON THE STATISTICAL CONTROL OF ADDITIVE CHARACTERISTICS

SUMMARY

The paper deals with the estimation of the mean and the standard deviation of a characteristic with a normal distribution under the assumption that the characteristic is additive.

Such is, for instance, the property of the weight of mass — produced articles.

We draw $2n$ elements from a general population, divide them in pairs and find the larger and the smaller element in each pair. Next we measure the characteristic S_w of the sum of n larger elements and the characteristic S_m of the sum of the smaller elements. From the numbers S_w and S_m we can construct simple estimators of the mean and of the standard deviation. It is true that the standard deviation estimator has small efficiency in the sense of R. A. Fisher, but its precision may be great since the size $2n$ of the sample may be large without any complications in measuring and calculation.

The paper contains a description of a special quality chart suitable for this case and a device permitting an automatization of measurement in the production of rollers for roll-bearings.