ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Le premier problème de Fourier relatif à un système parabolique d'équations non linéaires

par J. CHABROWSKI (Katowice)

Introduction. On considère ici la question de l'existence de la solution du premier problème de Fourier relatif à un système parabolique d'équations non linéaires dans des domaines non cylindriques. Le problème analogue pour un système plus spécial a été traité par Kusano [4].

§ 1. D'abord nous introduisons les définitions et les notations nécessaires. Soit $x(x_1, \ldots, x_n)$ un point de l'espace euclidien E_n et (t, x) un point de l'espace-temps E_{n+1}. Nous désignons les distances entre les points $P(t, x)$ et $P'(t', x')$ par

$$\varrho(P, P') = (|t-t'|^2+|x-x'|^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad d(P, P') = (|t-t'|+|x-x'|^2)^{1/2},$$

où

$$|x-x'|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2 .$$

On appelle $d(P, P')$ la *distance parabolique* des points P et P'.

Nous définissons les normes suivantes pour les fonctions définies dans l'ensemble $B \subset E_{n+1}$:

$$|u|_0^B = \sup_{P\in B}|u(P)|, \quad |u|_a^B = |u|_0^B + \sup_{\substack{P,P'\in B\\ P\neq P'}} \frac{|u(P)-u(P')|}{d(P, P')^a},$$

$$|u|_{1+a}^B = |u|_a^B + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|_a^B, \quad |u|_{2+a}^B = |u|_{1+a}^B + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|_{1+a}^B + |u_t|_a^B \quad (0 < a < 1).$$

On dénote par $C_q(B)$ la classe des fonctions $u(t, x)$ définies dans un domaine B et satisfaisant à la condition

$$|u|_q^B < \infty, \quad \text{où } q = 0, a, 1+a, 2+a .$$

Soit un domaine D borné, ouvert, non cylindrique et contenu entre les plans $t=0$, $t=T$ et la surface latérale S. Soit $\partial D = S \cup \Omega_0$, où $\Omega_0 = \bar{D} \cap (t=0)$.

Supposons que la surface S vérifie la condition (s) suivante: on peut couvrir S par un nombre fini de sphères $\{\Sigma_\nu\}$ de manière que la portion de la surface S découpée par Σ_ν admette une représentation (pour un certain i) de la forme

$$x_i = h(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in T_\nu$$

et possédant les propriétés suivantes:

(i) la fonction h appartient à la classe $C_{2+\alpha}(T_\nu)$;

(ii) les dérivées $\partial h/\partial x_k$ vérifient la condition de Hölder par rapport à la distance $\varrho(P, P')$.

On dit que la fonction $\varphi(t, x)$ déterminée sur la frontière ∂D vérifie la condition (F), s'il existe une fonction $\Phi(t, x) \in C_{2+\alpha}(\bar{D})$ telle que l'on ait

$$\Phi(t, x) = \varphi(t, x) \qquad \text{pour } (t, x) \in \partial D\,.$$

Dans ce cas nous pouvons définir la norme

$$|\varphi|_{2+\alpha}^{\partial D} = \inf |\Phi|_{2+\alpha}^{\bar{D}}$$

(l'infimum étant pris pour tous les prolongements $\Phi \in C_{2+\alpha}(\bar{D})$).

On appelle *premier problème de Fourier pour l'équation parabolique*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) u_{x_i} + c(t, x) u - u_t = f(x, t) \tag{1.1}$$

relatif à un domaine D le problème qui consiste en la recherche d'une solution de l'équation (1.1) dans D coïncidant avec une fonction donnée $\varphi(t, x)$ sur la frontière ∂D, c'est-à-dire

$$u(t, x) = \varphi(t, x) \qquad \text{pour } (t, x) \in \partial D\,. \tag{1.2}$$

Dans la suite nous utiliserons les théorèmes suivants établis par Friedman ([1] et [2]).

Théorème 1.1. *Nous admettons les hypothèses*:

1. *La surface latérale du domaine D satisfait à la condition* (s).
2. *Pour $(t, x) \in \bar{D}$ et pour tout vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geqslant A_0 |\xi|^2\,, \qquad A_0 > 0\,.$$

3. $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|_\alpha^D + \sum_{i=1}^{n} |b_i|_\alpha^D + |c|_\alpha^D \leqslant A_1$, $|f|_\alpha^D < \infty$.
4. *La fonction $\varphi(t, x)$ vérifie la condition* (F).

Dans toutes ces hypothèses il existe une solution unique du problème (1.1)-(1.2) *satisfaisant à l'inégalité*

$$|u|^D_{2+\alpha} \leqslant C(|f|^D_\alpha + |\varphi|^{\partial D}_{2+\alpha}) \tag{1.3}$$

(*C dépend des constantes A_0, A_1 et du domaine D*).

THÉORÈME 1.2. *Nous admettons les hypothèses* 1, 2 *du théorème* 1.1 *et de plus*:

3'. *Les fonctions a_{ij}, b_i, c, f $(i, j = 1, \ldots, n)$ figurant dans l'équation* (1.1) *sont continues dans $\bar{D}$ et*

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^D_\alpha + \sum_{i=1}^n |b_i|^D_0 + |c|^D_0 \leqslant H_1\,, \qquad \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^S_1 \leqslant H_2$$

où

$$\|a_{ij}\|^S_1 = |a_{ij}|^S_0 + \sup_{\substack{P,P'\in S\\ P\neq P'}} \frac{|a_{ij}(P) - a_{ij}(P')|}{\varrho(P, P')}\,.$$

4'. *Il existe une fonction $\Psi(t, x)$ définie dans $\bar{D}$ et telle que $\Psi(t, x) = \varphi(t, x)$ pour $(t, x) \in \partial D$*:

$$|\Psi|^D_2 = |\Psi|^D_0 + \sum_{i=1}^n |\Psi_{x_i}|^D_0 + \sum_{i,j=1}^n |\Psi_{x_i x_j}|^D_0 + |\Psi_t|^D_0 < \infty\,.$$

S'il existe une solution $u(t, x)$ du problème (1.1)-(1.2), *nous pouvons établir l'estimation*

$$|u|^D_{1+\delta} \leqslant C(|f|^D_\alpha + |\Psi|^D_2) \quad \textit{pour chaque } 0 < \delta < 1\,. \tag{1.4}$$

(*C dépend des constantes δ, H_0, H_1, H_2, du domaine D et de la surface latérale S.*)

§ 2. En nous appuyant sur les théorèmes 1.1 et 1.2 et sur le théorème du point invariant de Schauder nous prouverons l'existence de la solution du premier problème de Fourier relatif au système parabolique d'équations non linéaires:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n a^k_{ij}(t, x)\, u^k_{x_i x_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^n b^k_i(t, x, u^1, \ldots, u^N, u^1_{x_1}, \ldots, u^1_{x_n}, \ldots, u^N_{x_1}, \ldots, u^N_{x_n})\, u^k_{xi} - u^N_t \\ &\qquad = f^k(t, x, u^1, \ldots, u^N, u^1_{x_1}, \ldots, u^1_{x_n}, \ldots, u^N_{x_1}, \ldots, u^N_{x_n})\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$u^k(t, x) = \varphi^k(t, x)\,, \qquad k = 1, \ldots, N\,. \tag{2.2}$$

Ce système peut être écrit brièvement sous la forme

$$(2.1') \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t,x)\,u_{x_ix_j}^k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k\big(t,x,U(t,x),U_x^1(t,x),\ldots,U_x^N(t,x)\big)\,u_{x_i}^k - u_t^k = f^k\big(t,x,U(t,x),U_x^1(t,x),\ldots,U_x^N(t,x)\big),$$

où $U(t,x) = \{u^k t, x\}$, $k = 1, \ldots, N$, $U_x^i(t,x) = \{u_{x_1}^i, \ldots, u_{x_n}^i\}$, $i = 1, \ldots, N$.

THÉORÈME 2.1. *Supposons que*

a. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant A_0|\xi|^2$ *pour tout vecteur* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *et pour* $(t,x) \in \bar{D}$, $A_0 > 0$, $k = 1, \ldots, N$.

b. *Les coefficients* a_{ij}^k *appartiennent à la classe* $C_\alpha(D)$ *et vérifient la condition de Lipschitz par rapport à la distance* $\varrho(P,P')$ *sur la surface* S.

c. *Les fonctions* $b_i^k(t,x,U,P^1,\ldots,P^N)$ *sont bornées pour* $(t,x) \in \bar{D}$ *et pour tous les* $U, P^1, \ldots, P^N$ $(P^i = (p_1^i, \ldots, p_n^i))$ *et vérifient par rapport à toutes les variables la condition de Hölder de la forme*

$$|b_i^k(t,x,U,P^1,\ldots,P^N) - b_i^k(\bar{t},\bar{x},\bar{U},\bar{P}^1,\ldots,\bar{P}^N)| \leqslant B_1 d(P,\bar{P})^\alpha + B_2\sum_{j=1}^{N}|u^j - \bar{u}^j| + B_3 \sum_{\substack{j=1,\ldots,N\\ i=1,\ldots,n}} |p_j^i - \bar{p}_j^i|,$$

où $P = (t,x)$, $\bar{P} = (\bar{t},\bar{x})$.

d. *Les fonctions* $f^k(t,x,U,P^1,\ldots,P^N)$ *sont höldériennes par rapport aux variables* (t,x), $U, P^1, \ldots, P^N$,

$$|f^k(t,x,U,P^1,\ldots,P^N) - f^k(\bar{t},\bar{x},\bar{U},\bar{P}^1,\ldots,\bar{P}^N)| \leqslant G_1 d(P,\bar{P})^\alpha + G_2\sum_{j=1}|u^j - \bar{u}^j|^{\mu_1} + G_3 \sum_{\substack{i=1,\ldots,N\\ j=1,\ldots,n}} |p_j^i - \bar{p}_j^i|^{\mu_2},$$

et en outre elles vérifient les inégalités

$$|f^k(t,x,U,P^1,\ldots,P^N)| \leqslant F_1\sum_{j=1}^{N}|u_j|^{\varrho_1} + F_2 \sum_{\substack{i=1,\ldots,N\\ j=1,\ldots,n}} |p_j^i|^{\varrho_2},$$

où $B_1, B_2, B_3, G_1, G_2, G_3, F_1, F_2, \mu_1, \mu_2, \varrho_1, \varrho_2$ sont des constantes positives et de plus $0 < \varrho_1 < 1$, $0 < \varrho_2 < 1$.

e. *Les fonctions* $\varphi^k(t, x)$, $k = 1, \dots, N$, *vérifient la condition* (F).

Dans toutes ces hypothèses il existe au moins une solution du problème (2.1)-(2.2).

Démonstration. Considérons l'espace de Banach $C_{1+\delta}(D)$ de tous les systèmes de fonctions $\{u^1(t, x), \dots, u^N(t, x)\}$ définies dans le domaine $\bar{D}$, pour lesquelles la norme

$$|U|^D_{1+\delta} = \max(|u^1|^D_{1+\delta}, \dots, |u^N|^D_{1+\delta}) < \infty ,$$

où δ est une constante positive, arbitraire et non supérieure à l'unité, est finie. Soit dans l'espace $C_{1+\delta}(D)$ l'ensemble Λ des fonctions qui vérifient la condition (2.2) et l'inégalité

$$|V(t, x)|_{1+\delta} \leqslant M ,$$

où M désigne une constante suffisamment grande. Cet ensemble est borné, fermé et convexe. Nous introduisons dans l'ensemble Λ l'opération $U = A(V)$: si $V(t, x) \in \Lambda$, la fonction $U(t, x) = \{u^k(t, x)\}$, $k = 1, \dots, N$, est solution du système

$$\sum_{i,j=1}^n a^k_{ij}(t, x) u^k_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^k_i\big(t, x, V(t, x), V^1_x(t, x), \dots, V^N_x(t, x)\big) u^k_{x_i} - u^k_t$$
$$= f^k(t, x, V, V^1_x, \dots, V^N_x)$$

et satisfait à la condition (2.2). Le théorème 1.1 garantit que l'opération $U = A(V)$ est déterminée dans l'ensemble Λ. D'abord nous montrerons que l'ensemble transformé Λ' de l'ensemble Λ par l'opération $A(U)$ est contenu dans Λ. En effet, il résulte du théorème 1.2 qu'on a pour chaque $0 < \delta < 1$

$$|u^k|^D_{1+\delta} \leqslant C_k\big[|\Psi|^D_2 + \sup_D \big|f^k\big(t, x, V(t, x), V^1_x(t, x), \dots, V^N_x(t, x)\big)\big|\big] ,$$
$$k = 1, \dots, N .$$

Les constantes C_k ne dépendent pas de M. D'après l'hypothèse d on a

$$|u^k|^D_{1+\delta} \leqslant C_k[|\Psi^k|^D_2 + F_1 N M^{\varrho_1} + F_2 N n M^{\varrho_2}] .$$

Si nous écrivons $\bar{C} = \max(C_1, \dots, C_N)$ et $|\Psi|^D_2 = \max(|\Psi^1|^D_2, \dots, |\Psi^N|^D_2)$, nous avons

$$(2.3) \qquad |U|_{1+\delta} \leqslant \bar{C}(|\Psi|^D_2 + F_1 N M^{\varrho_1} + F_2 N n M^{\varrho_2}) .$$

En vertu de l'inégalité (2.3) l'ensemble Λ' des fonctions transformées est contenu dans l'ensemble Λ si la constante M vérifie la condition

$$\bar{C}[|\Psi|_2^D + F_1 N M^{\varrho_1} + F_2 N n M^{\varrho_2}] \leqslant M .$$

Cette inégalité est valable pour M suffisamment grand, car on a $0 < \varrho_1 < 1$ et $0 < \varrho_2 < 1$.

Maintenant nous montrerons que l'opération $A(V)$ est continue. Soit $U, V \in \Lambda$, $\bar{U} = A(U)$, $\bar{V} = A(V)$; alors on a l'équation

$$(2.4) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x)(\bar{u}_{x_i x_j}^k - \bar{v}_{x_i x_j}^k) + \\ + \sum_{j=1}^{n} b_j^k(t, x, U, U_x^1, \ldots, U_x^N)(\bar{u}_{x_j}^k - \bar{v}_{x_j}^k) - (\bar{u}_t^k - \bar{v}_t^k) \\ = \sum_{i=1}^{n} [b_j^k(t, x, V, V_x^1, \ldots, V_x^N) - b_j^k(t, x, U, U_x^1, \ldots, U_x^N)]\bar{v}_{x_j}^k + \\ + f^k(t, x, U, U_x^1, \ldots, U_x^N) - f^k(t, x, V, V_x^1, \ldots, V_x^N) .$$

En s'appuyant sur le théorème 1.2 et les hypothèses c et d on arrive aux limitations suivantes pour les normes des différences $(\bar{u}^k - \bar{v}^k)$:

$$|\bar{u}^k - \bar{v}^k|_{1+\delta}^D \leqslant C\Big[G_2 \sum_{i=1}^{N} (|u^j - v^j|_{1+\delta}^D)^{\mu_1} + nG_3 \sum_{j=1}^{N} (|u^j - v^j|_{1+\delta}^D)^{\mu_2} + \\ + n(B_2 + B_3) \sum_{j=1}^{N} |u^j - v^j|_{1+\delta}^D |\bar{v}_{x_j}^k|_0^D\Big]$$

pour chaque $0 < \delta < 1$, d'où il suit la continuité de l'opération $A(U)$.

Il reste à montrer que l'ensemble transformé Λ' de l'ensemble Λ par l'opération $A(U)$ est compact. Dans ce but il suffit de montrer que l'ensemble Λ' est uniformément borné au sens de la norme $|\ |_{1+\gamma}$, où $\gamma > \delta$. Cette limitation résulte facilement du théorème 1.2.

En appliquant le théorème de Schauder nous concluons de là l'existence dans l'ensemble Λ d'un point $U(u^1, \ldots, u^N)$ qui reste invariant relativement à l'opération $A(U)$ et de même l'existence de la solution $\big(u^1(t, x), \ldots, u^N(t, x)\big)$ du problème (2.1)-(2.2).

Remarque. Si les conditions $f^k(t, x, U, P^1, \ldots, P^{k-1}, 0, P^{k+1}, \ldots, P^N) = 0$ et $u^k(t, x) \geqslant 0$ $(u^k(t, x) \leqslant 0)$ sont remplies pour $(t, x) \in \partial D$, on a $u^k(t, x) \geqslant 0$ $(u^k(t, x) \leqslant 0)$ pour $(t, x) \in \bar{D}$, $k = 1, \ldots, N$ (voir le théorème 1 dans [3]).

Travaux cités

[1] A. Friedman, *Boundary estimates for second order parabolic equations and their applications*, J. Math. Mech. 7 (1958), pp. 771-791.

[2] — *On quasilinear parabolic equations of the second order*, ibidem 7 (1958), pp. 793-809; II 9 (1960), pp. 539-556.

[3] А. М. Ильин, А. С. Колашников и О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболического типа*, Успехи матем. наук 17 (1962), pp. 3-146.

[4] T. Kusano, *On the first boundary problem for quasilinear systems of parabolic differential equations in non-cylindrical domains*, Funkcialaj Ekvacioj Serio Internacia 7 (1965), pp. 163-178.

Reçu par la Rédaction le 15. 10. 1966