ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Remarque sur la stabilité asymptotique de la solution d'un système d'équations différentielles à paramètre retardé

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Dans la présente note nous démontrons un théorème sur la stabilité asymptotique de la solution $x = 0$ d'une système d'équations différentielles à paramètre retardé

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big), \tag{1}$$

où $h > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

§ 1. Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSE H_1. *$f(t, x, y)$ est une fonction continue pour $t \geqslant 0$,*

$$f(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0, \ -\infty < x, y < +\infty .$$

Il existe une fonction continue $V(x)$ positive pour $x \neq 0$

$$V(0) = 0, \quad V(x) > P > 0 \quad \textit{pour} \quad \|x\| \geqslant R_0, \tag{1.1}$$

$V(x)$ est de classe C^1 pour $x \neq 0$.

Il existe deux fonctions continues $K(u)$, $R(t, u)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{n} V_{x_i} f_i = V_x(x) f(t, x, y) \leqslant K\big(V(x)\big) + R\big(t, V(y)\big) \quad \textit{pour} \quad x \neq 0, \ t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

$K(u)$ est de classe C^1, $R(t, u)$ est continue pour $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$ et de classe C^1 pour $u > 0$, $t \geqslant 0$,

$$K(0) = R(t, 0) = 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{u\to\infty} R(t, u) = \infty, \tag{1.4}$$

$$R_t(t, u) < 0, \quad R_u(t, u) > 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0, \ u > 0, \tag{1.5}$$

$$K(u) + R(t, u) < 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0, \ u > 0. \tag{1.6}$$

HYPOTHÈSE H_2. *Pour chaque* $u_0 > 0$ *on a*

$$\lim_{t\to\infty} R(t, u_0) = 0, \tag{1.7}$$

$$K'(u) < 0 \quad pour \quad u \geqslant 0. \tag{1.8}$$

THÉORÈME T. *Sous les hypothèses* H_1 *et* H_2 *la solution du système* (1) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. Considérons une solution quelconque $x(t)$ du système (1) telle que

$$|x(t)| \leqslant M \quad pour \quad -h \leqslant t \leqslant 0, \; x(0) \neq 0.$$

Dans la note [1] nous démontré que sous les hypothèses H_1 la fonction $v(t) = V\big(x(t)\big)$ satisfait à l'inégalité

$$v(t) \leqslant w(t), \tag{1.9}$$

où $w(t)$ est la solution de l'équation

$$w'(t) = K\big(w(t)\big) + r - K(M), \tag{1.10}$$

$$w(0) = M, \quad r = \max\big(M, R(0, M+\eta_0) + K(M)\big), \quad \eta_0 > 0 \text{ (quelconque)}.$$

Posons par définition $\varrho = r - K(M)$.

En vertu de (1.8) on a

$$K(w) + \varrho < 0 \quad \text{pour} \quad w > k(-\varrho), \tag{1.11}$$

où $k(u)$ est la fonction inverse de $K(u)$.

En vertu de (1.8) on a

$$k(-\varrho) = k\big(K(M) - r\big) > k\big(K(M)\big) = M \tag{1.12}$$

et par suite, d'après (1.11) et (1.10),

$$w(t) < k(-\varrho) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0; \tag{1.13}$$

$$\varrho \to 0 \quad \text{pour} \quad M \to 0;$$

par conséquent l'inégalité (1.13) entraîne la stabilité de $x = 0$ pour l'équation (1). Pour démontrer la stabilité asymptotique il suffit de prouver que $v(t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

En vertu de (1.2), (1.9) et (1.13) on a

$$v'(t) \leqslant K\big(v(t)\big) + R\big(t, v(t-h)\big) \leqslant K\big(v(t)\big) + R\big(t, k(-\varrho)\big) \tag{1.14}$$

pour $t \geqslant 0$ telles que $v(t) \neq 0$.

Envisageons une solution $z(t)$ de l'équation

$$z'(t) = K(z) + R\big(t, k(-\varrho)\big), \quad z(0) = M. \tag{1.15}$$

On a, en vertu de (1.14) ($z(t)$ étant positive),

$$0 \leqslant v(t) < z(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0 . \tag{1.16}$$

Il suffit donc de prouver que $z(t) \to 0$ pour $t \to \infty$. Considérons la courbe C_ϱ définie par l'équation

$$K(u) + R\big(t, k(-\varrho)\big) = 0 \quad \text{sur } C_\varrho \tag{1.17}$$

c'est-à-dire

$$(C_\varrho)\colon\ u = k\Big(-R\big(t, k(-\varrho)\big)\Big) = g(t) .$$

On a pour $u > g(t)$

$$K(u) + R\big(t, k(-\varrho)\big) < 0 \tag{1.18}$$

et

$$K(u) + R\big(t, k(-\varrho)\big) > 0 \quad \text{pour} \quad u < g(t) . \tag{1.19}$$

En vertu de (1.7) on a

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 . \tag{1.20}$$

Considérons $g'(t)$. On a

$$g'(t) = -k'\Big(-R\big(t, k(-\varrho)\big)\Big) R_t\big(t, k(-\varrho)\big)$$

et par suite, en vertu de (1.8) et (1.5),

$$g'(t) < 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0 . \tag{1.21}$$

Supposons qu'il existe un $t_0 \geqslant 0$ tel que

$$z(t_0) = g(t_0) . \tag{1.22}$$

En vertu de (1.17), (1.15) et (1.21) on a

$$z'(t_0) = 0 > g'(t_0) ,$$

d'où il vient

$$z(t) > g(t) \quad \text{pour} \quad t > t_0 ,$$
$$z(t) < g(t) \quad \text{pour} \quad t < t_0$$

et par suite

$$z'(t) < 0 \quad \text{pour} \quad t > t_0$$

d'où il résulte que $z(t)$ est décroissante pour $t > t_0$. L'hypothèse que $z(t)$ ne tend pas vers zéro pour $t \to \infty$ implique ainsi qu'il existe une constante $a > 0$ telle que

$$z(t) > a > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_0 .$$

En vertu de (1.20) il existe une constante $t_1 \geqslant t_0$

$$g(t) < a \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_1 .$$

On a donc

$$K(a) + R\big(t_1, k(-\varrho)\big) < 0 . \tag{1.24}$$

$K(u)$ étant décroissante (cf. (1.8)), on a en vertu de (1.23) et (1.5)

$$z'(t) = K(z) + R\big(t, k(-\varrho)\big) \leqslant K(a) + R\big(t_1, k(-\varrho)\big) = b \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_1$$

et par suite

$$a < z(t) \leqslant z(t_1) + b(t - t_1) \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_1 ;$$

b étant négatif on obtient en passant à la limite $t \to \infty$, $0 < a \leqslant -\infty$.

La contradiction obtenue démontre que $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$ et par suite, en vertu de (1.16), $v(t) \to 0$, d'où il vient $x(t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

L'hypothèse que $0 < z(t) < g(t)$ pour $0 \leqslant t < \infty$ donne aussi $z(t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

Le même raisonnement peut être répété dans le cas où $x(0) = 0$ pour $t \geqslant \tau_0$, où $\tau_0 > 0$ est tel que $x(\tau_0) \neq 0$ et $v(t) \leqslant M$ pour $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$. La stabilité asymptotique est ainsi démontrée.

§ 2. Exemple. On peut considér le système

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t), x(t-h)\big) ,$$

où les fonctions continues $f(t, x)$ et $g(t, x, y)$ satisfont aux hypothèses suivantes:

$$xf(t, x) \leqslant -a\|x\|^2, \quad a > 0 ,$$
$$\|g(t, x, y)\| \leqslant R(t, \|y\|) ,$$
$$f(t, 0) = g(t, 0, 0) = 0 ,$$
$$R_t(t, v) < 0, \quad R_v(t, v) > 0 ,$$
$$0 < R(t, v) < av \quad \text{pour} \quad v > 0,\ t \geqslant 0 ,$$
$$\lim_{t\to\infty} R(t, v) = 0 .$$

Dans le cas envisagé on peut poser

$$V(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\| ;$$

on a ainsi

$$V_x(x) f(t, x) = \frac{xf(t, x)}{\|x\|} \leqslant -a\|x\| ,$$
$$V_x(x) g(t, x, y) \leqslant R(t, \|y\|) .$$

L'équation (1.10) prend la forme

$$w' = -aw + r + aM,$$

et l'équation (1.15) devient:

$$z' = -az + R\left(t, -\frac{\varrho}{a}\right).$$

Travaux cités

[1] Z. Mikołajska, *Sur la stabilité des solutions d'un systèm e d'équations différen tielles à paramètre retardé*, Ann. Polon. Math. ce volume p. 153-162.

Reçu par la Rédaction le 7. 6. 1966