ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIX (1981)

О функциях вполне регулярного роста многих переменных

П. З. Агранович, Л. И. Ронкин (Харьков)

Памяти Стефана Бергмана

Резюме. Рассматриваются два класса функций вполне регулярного роста многих переменных функции $f(z)$, $z \in C^n$, вполне регулярного роста порядка ϱ в конусе $K_D = \{z : z/|z| \in D\}$ и функции $f(z, w), z \in C^n, w \in C$, вполне регулярного роста порядка ϱ в области $A_{G,\alpha} = \{(z, w) : z \in G \subset C^n, |\arg w| < \alpha\}$. Установлено, что в пространствах распределений Л. Шварца $D'(A_{G,\alpha})$ и $D'(K_D)$ для таких функций существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln|f(tz)|}{t^\varrho} \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\ln|f(z, tw)|}{t^\varrho},$$

равные соответствующим индикаторам $\mathscr{L}_f^*(z)$ и $h_f^*(z, w)$ этих функций.

С помощью этого для функций $f(z)$ вполне регулярного роста в конусе K_D доказано, что при некоторых естественных ограничениях на D' в $K_{D'}$, $D' \Subset D$, существует конусная плотность нулевого множества функции $f(z)$, то есть, существует предел

$$\lim_{t\to\infty} t^{-2n+2-\varrho} \sigma_{D'}(t),$$

где $\sigma_{D'}(t)$ — $(2n-2)$-мерный объем (вычисленный с учетом кратности нулевых точек) множества $\{z : z \in K_{D'}, |z| < t, f(z) = 0\}$. Величина конусной плотности выражена через индикатор $\mathscr{L}_f^*(z)$.

Аналогичный результат получен для множества нулей функции $f(z, w)$ в области $A_{G,\alpha}$.

1. Важную роль в теории аналитических функций одного комплексного переменного и ее приложениях играют функции вполне регулярного роста. Теория функций вполне регулярного роста была построена в работах Б. Я. Левина и А. Пфлюгера. Напомним

Определение. Голоморфная в угле $\{z\colon z \in C, \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$ функция $f(z)$ уточненного порядка[1] $\varrho(t)$ называется *функцией вполне регулярного роста* (ф. в. р. р.) в угле $\{z\colon \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$, если на положительной полуоси имеется такое множество E, нулевой относительной меры[2], что при любом

---

(1) О функциях уточненного порядка см., например, [7].

(2) Множество $E \subset (0, \infty)$ имеет нулевую относительную меру, если $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{E \cap (0, r)\}}{r} = 0$, где $\operatorname{mes}\{\ :\ \}$ — мера Лебега множества $\{\ :\ \}$.

$\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ существует, притом равномерный, предел

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\varrho(r)}},$$

равный индикатору функции

$$h_f(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\varrho(r)}}.$$

Основным и более того, характеристическим при нецелом ϱ свойством функций вполне регулярного роста является наличие некоторой правильности в распределении их корней. Описание этой правильности содержится в следующей, основной для данной теории теореме.

Теорема 1 ([3]). *Если функция $f(z)$ является функцией вполне регулярного роста (относительно данного $\varrho(t)$) в угле $\{z\colon z \in C, \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$, то для всех пар (θ_1', θ_2'), $\theta_1 < \theta_1' < \theta_2' < \theta_2$, $\theta_1' \notin E$, $\theta_2' \notin E$, где E не более чем счетно, существует угловая плотность $n(\theta_1', \theta_2')$, то есть, существует предел*

$$n(\theta_1, \theta_2) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \theta_1', \theta_2')}{r^{\varrho(r)}},$$

где $n(r, \theta_1', \theta_2')$ — число корней (с учетом кратности) функции $f(z)$ в секторе $\{z\colon 0 < |z| < r, \theta_1' < \arg z < \theta_2'\}$.

В работах В. С. Азарина теория функций вполне регулярного роста, в том числе и теорема 1 ([4]), была распространена на субгармонические функции в пространстве $\boldsymbol{R}^m$.

В этой работе будут получены аналоги теоремы 1 для аналитических функций многих переменных. Используемый при этом метод отличен от методов, применявшихся ранее в теории ф. в. р. р. одного комплексного переменного, и поэтому, в частности, получено новое доказательство теоремы 1. Этот метод состоит в рассмотрении ф. в. р. р. как элементов пространства D' обобщенных функций и основан на устанавливаемом в данной работе существовании в пространстве D' для ф. в. р. р. предела ([5]) $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\varrho(r)}\ln|f(rz)|$ (см. теоремы 4, 5).

([3]) См. [7].

([4]) Распространение теоремы 1 на субгармонические функции содержится в [4].

([5]) Идея рассмотрения тех или иных классов ф. в. р. р. с позиций теории обобщенных функций практически одновременно с нами (при решении задач, отличных от наших) была проведена и другими авторами. Так В. С. Азарин в [5], 1976 г., установил, в частности, что субгармоническая функция $u(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^2$, является ф. в. р. р. тогда и только тогда, когда в D' существует $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\varrho(r)} u(xr)$. Аналогичный факт для функций произвольного числа переменных другим способом (в [5] соответствующие утверждения приведены без доказательства) был установлен П. З. Агранович [1]. С. О. Кизельман сообщил нам о некоторых своих результатах, изложенных в его лекциях о выпуклых, субгармонических и плюрисубгармонических функциях (сентябрь — декабрь 1975). В этих результатах фигурируют субгармонические ф. в. р. р., определяемые как субгармонические функции, для которых существует указанный

В заключение приводятся некоторые факты о связи аналитических функций многих переменных с субгармоническими функциями и целыми функциями (в C^n) первого порядка, ограниченными на вещественном пространстве.

2. Понятие функции вполне регулярного роста в случае многих переменных разными авторами вводилось по-разному. Впервые это было сделано в [8] для функций первого порядка. Целая функция $f(z)$, $z \in C^n$, порядка $\varrho = 1$ называлась функцией вполне регулярного роста, если при любом $y \in R^n$ для почти всех $x \in R^n$ функция $f(x+yw)$, как функция одного переменного w, являлась функцией вполне регулярного роста (относительно $\varrho(t) \equiv 1$).

В работе Л. Грумена [6] целая функция уточненного порядка(6) $\varrho(t)$ называется функцией вполне регулярного роста в конусе $K_D = \left\{z\colon \dfrac{z}{|z|} \in D\right\}$, где D — открытое множество на единичной сфере, если функция $f(\lambda z)$, как функция переменного $\lambda \in C$, является функцией вполне регулярного роста в угле $\{\lambda\colon \lambda z \in K_D\}$ для почти всех z таких, что $\{\lambda\colon \lambda z \in K_D\} \neq \emptyset$.

Наряду с этим определением здесь будет использовано определение, в существенном совпадающее с данным в [3]. Именно, пусть G — область в C^n,

$$A_{G,a} = \{(z, w)\colon z \in G,\ |\arg w| < a\},$$

$\varphi(z, w)$ — функция, голоморфная в области $C^n \times C$, и пусть

$$M(t; G', \varphi) = \max_{|w|<t, z\in G'} |\varphi(z, w)|,$$

где G' — открытое множество в C^n, $G' \Subset G$.

Назовем функцию $\varphi(z, w)$ функцией не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$ в $G \times C$, если

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln M(t; G', \varphi)}{t^{\varrho(t)}} < \infty, \quad \forall G' \Subset G.$$

Функцию $\varphi(z, w)$ не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$ в $G \times C$ назовем функцией вполне регулярного роста в $A_{G,a}$, если для почти всех $z \in G$ функция $\varphi(z, w)$, как функция переменного w, является функцией вполне регулярного роста (относительно $\varrho(t)$) в угле $T_a = \{w\colon |\arg w| < a\}$.

Введем теперь характеристики распределения нулевых точек функций $f(z)$ и $\varphi(z, w)$, являющиеся аналогами величины $n(t, \theta_1, \theta_2)$, фигурирующей в случае одного переменного.

выше предел. В работе Ж. Вотьера [10], 1973 г., строится пример плюрисубгармонической функции, удовлетворяющей некоторым специальным условиям и для которой соответствующий предел не существует (о результатах Вотьера см. сноску на стр. 253). Излагаемые здесь наши результаты докладывались в 1975 г. на семинаре Б. Я. Левина в г. Харькове и в зимней математической школе (Воронеж, январь 1976). Они также составили содержание препринта [2] (1976 г.).

(6) В [6] рассматривался случай $\varrho(t) \equiv \varrho$.

Обозначим через $\sigma_f(t; D')$, где D' — открытое подмножество единичной сферы, $(2n-2)$-мерный объем множества $\{z\colon f(z)=0, z \in K_{D'}, |z|<t\}$, вычисленный с учетом кратности нулевых точек функции $f(z)$. Как следует из известных свойств нулевых множеств (см., например, [9]), так определенная величина (7) $\sigma_f(t; D')$ с точностью до множителя, зависящего лишь от размерности пространства, совпадает с величиной $\mu(K_{D'}(t))$, где μ — мера, ассоциированная по Риссу субгармонической функции $\ln|f(z)|$, а $K_{D'}(t) = \{z\colon z \in K_{D'}, |z|<t\}$. Иными словами,

$$\sigma_f(t; D') = \varkappa_n \mu(K_{D'}(t)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_{D'}(t)} \Delta \ln|f(z)|\, d\omega_z,$$

где

$$\varkappa_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!}, & n>1; \\ 1, & n=1, \end{cases}$$

$d\omega_z$ — элемент объема в C^n, а

$$\Delta \ln|f| = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln|f|}{\partial z_j \partial \bar{z}_j},$$

причем производные понимаются в смысле обобщенных функций.

Для характеристики массивности нулевого множества функции $\varphi(z, w)$ введем в рассмотрение следующую величину (8)

$$n_\varphi(t; a; G') = \int\limits_{G'} n_\varphi(t; a; z)\, d\omega_z,$$

где $G' \Subset G$, $n_\varphi(t; a; z)$ — вычисленное с учетом кратности число корней функции $\varphi(z, w)$ в секторе $T_a(t) = \{w\colon |\arg w| < a, |w| < t\}$ (z — фиксировано).

Нетрудно видеть, что это определение величины $n_\varphi(t; a; G)$ эквивалентно следующему

$$n_\varphi(t; a; G') = \frac{2}{\pi} \int\limits_{A_{G',a}(t)} \frac{\partial^2 \ln|\varphi|}{\partial w \partial \bar{w}}\, dw d\omega_z,$$

где

$$A_{G,a}(t) = \{(z, w)\colon (z, w) \in A_{G,a}, |w| < t\}.$$

Заметим, что $\partial^2 \ln|\varphi| / \partial w \partial \bar{w}$ ввиду плюрисубгармоничности функции $\ln|\varphi|$ является положительной обобщенной функцией и, следовательно, определяет меру.

Для характеристики роста функции $f(z)$ уточненного порядка $\varrho(t)$ на лучах, исходящих из начала координат, мы используем введенный П. Лелоном регуляризованный радиальный индикатор $\mathscr{L}_f^*(z)$. Этот индикатор определя-

(7) Эта характеристика нулевого множества целой функции фигурировала в [6].

(8) Эта величина рассматривалась в [3].

ется равенством

$$\mathscr{L}_f^*(z) = \overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{\ln|f(tz')|}{t^{\varrho(t)}}.$$

Он определен во всем пространстве C^n и является функцией плюрисубгармонической (а, значит, и субгармонической) и позитивно однородной степени ϱ, где $\varrho = \lim \varrho(t)$. Отметим также, что как следует из теоремы Картана (см., например, [9]) $\mathscr{L}_f(z) = \mathscr{L}_f^*(z)$ почти всюду в C^n.

Меру, ассоциированную по Риссу функции $\mathscr{L}_f^*(z, w)$, обозначим через μ_f. Иными словами, положим

$$\mu_f = \frac{2}{\pi\varkappa_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathscr{L}_f^*}{\partial z_j\partial\bar{z}_j}.$$

Аналогично рост функции $\varphi(z, w)$, не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$, характеризуется введенным в [3] индикатором $h_\varphi^*(z, w)$, который определяется равенством

$$h_\varphi^*(z, w) = \overline{\lim_{(z',w')\to(z,w)}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{\ln|\varphi(z', tw')|}{t^{\varrho(t)}}.$$

Функция $h_\varphi^*(z, w)$, как отмечалось в [3], плюрисубгармонична в $G \times C$ и, как функция переменного w, позитивно однородна степени ϱ, где $\varrho = \lim\limits_{t\to\infty}\varrho(t)$. Отметим еще, что как и в случае индикатора $\mathscr{L}_f^*(z)$, почти всюду в $G \times C$ имеет место равенство $h_\varphi^*(z, w) = h_\varphi(z, w)$.

Ввиду плюрисубгармоничности индикатора $h_\varphi^*(z, w)$ обобщенная функция $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial w\partial\bar{w}}h_\varphi^*(z, w)$ положительна и, следовательно, есть мера (задается мерой), которую мы обозначим через ν_φ.

3. Следующие теоремы могут рассматриваться как некоторые аналоги теоремы 1 для функций $f(z)$ и $\varphi(z, w)$ вполне регулярного роста в областях K_D и $A_{G,a}$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть голоморфная в $G \times C$, где G — область в C^n, функция $\varphi(z, w)$ является функцией не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$ в $G \times C$ и вполне регулярного роста (относительно $\varrho(t)$) в области $A_{G,a}$. Тогда предел*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n_\varphi(t; a'; G')}{t^{\varrho(t)}}$$

существует для каждой области $A_{G',a'}$, $G' \Subset G$, $a' < a$, такой, что

$$\nu_\varphi(\partial A_{G',a'}) = 0 \tag{1}$$

и имеет место равенство

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n_\varphi(t; a'; G')}{t^{\varrho(t)}} = \nu_\varphi\left(A_{G',a}(1)\right).$$

Теорема 3. *Пусть $f(z)$, $z \in C^n$ — целая функция уточненного порядка $\varrho(t)$ вполне регулярного роста в конусе K_D. Тогда предел*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_f(t; D')}{t^{\varrho(t)+2n-2}}$$

существует для каждого $D' \Subset D$ такого, что $\mu_f(\partial K_{D'}) = 0$. При этом имеет место равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_f(t; D')}{t^{\varrho(t)+2n-2}} = \varkappa_n \mu_f(K_{D'}(1)).$$

Если $f(z)$, $z \in C^n$ — целая функция вполне регулярного роста в C^n, то справедливо следующее равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_f(t; S)}{t^{\varrho(t)+2n-2}} = \frac{\varrho}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \mathscr{L}_f^*(z)\, d\sigma_z,$$

где $d\sigma_z$ — элемент площади сферы $S = \{z\colon |z| = 1\}$ в C^n.

Существенную роль при доказательстве теорем 2 и 3 играют соответственно теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Пусть голоморфная в $G \times C$ функция $\varphi(z, w)$ является функцией не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$ в $G \times C$ и вполне регулярного роста в области $A_{G,\alpha}$. Тогда функции $\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \ln |\varphi(z, tw)|$ при $t \to \infty$ сходятся в $D'(A_{G,\alpha}(r))$ к функции $h_\varphi^*(z, w)$.*

Теорема 5. *Пусть $f(z)$, $z \in C^n$, — целая функция уточненного порядка $\varrho(t)$ вполне регулярного роста в конусе K_D. Тогда функции $\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \ln |f(tz)|$ при $t \to \infty$ сходятся в $D'(K_D(r))$ к функции $\mathscr{L}_f^*(z)$.*

Доказательства теорем 2, 4 и 3, 5 близки и поэтому мы ограничимся здесь изложением доказательства только одной пары, а именно, теорем 2 и 4. Для этого нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(z, w)$ — функция, фигурирующая в теореме 2, и пусть $G' \Subset G$, $0 < \alpha' < \alpha$. Тогда существуют такие константы $C_1 = C_1(G', \varphi)$ и $C_2 = C_2(G', \varphi)$, что*

$$n_\varphi(t; \alpha'; z) \leqslant C_1 t^{\varrho(t)} + C_2 - \ln |\varphi(z, 0)|, \quad \forall z \in G', t > 0, \alpha' \leqslant \pi. \tag{2}$$

Доказательство. Как следует из формулы Иенсена

$$n_\varphi(t; \alpha'; z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |\varphi(z, ete^{i\theta})|\, d\theta - \ln |\varphi(z, 0)| \leqslant$$

$$\leqslant \ln M(te; G; \varphi) - \ln |\varphi(z, 0)|,$$

откуда, учитывая определение функции не более чем уточненного порядка, получаем (2).

Лемма доказана.

Прежде чем формулировать лемму 2, заметим, что если $F(w)$ — функция вполне регулярного роста в угле T_a, то, как следует из определения таких функций, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность интервалов $I_k = (t_k, t_k+\eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\ln |f(te^{i\theta})| \geqslant (h_f(\theta)-\varepsilon)\, t^{\varrho(t)}, \quad \forall \theta \in (-a, a), t \notin I^*, I^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\colon\ t \in I^*, t < r\}}{r} = 0. \tag{3}$$

Обозначим

$$I^*(r) = \{t\colon\ t < r, t \in I^*\},$$
$$S_a = S_a(r; \varepsilon, F) = \{w\colon\ w \in T_a(r),\ |w| \notin I^*(r)\},$$
$$S_a^* = S_a^*(r; \varepsilon, F) = \{w\colon\ w \in T_a(r), |w| \in I^*(r)\}.$$

Лемма 2. *Пусть $F(w)$, $w \in C$, — функция вполне регулярного роста относительно данного $\varrho(t)$ в угле T_a, голоморфная в начале координат. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и $a' \in (0, a)$*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{\varrho(r)+2}} \int\limits_{S^*_{a'}(r;\varepsilon,F)} \big|\ln |F(w)|\big|\, d\omega_w = 0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что кружки

$$E_{k,l} = \{w\colon\ |w-t_k e^{il\eta_k/t_k}| < 2\eta_k\}, \qquad l = 0, \pm 1, \ldots, \pm p_k,$$

где $p_k = \left[\dfrac{t_k a'}{\eta_k}\right]$, образуют покрытие „воротника"

$$\mathfrak{A}_k = \{w\colon\ t_k < |w| < t_k+\eta_k,\ |\arg w| < a'\}.$$

и при достаточно больших k (при $k > m_0$) содержатся в $T_{a''}$, $a' < a'' < a$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_k} \big|\ln |F(w)|\big|\, d\omega_w \leqslant \sum_{l=-p_k}^{p_k} \int\limits_{E_{k,l}} \big|\ln |F(w)|\big|\, d\omega_w = \tag{4}$$

$$= \sum_{l=-p_k}^{p_k} \int\limits_{E_{k,l}} \ln^+|F(w)|\, d\omega_w + \sum_{l=-p_k}^{p_k} \int\limits_{E_{k,l}} \ln^+ \frac{1}{|F(w)|}\, d\omega_w.$$

Для оценки последней суммы воспользуемся неравенством

$$\int\limits_{|w-w_0|<R} \ln^+|F'(w)|\, d\omega_w - \pi R^2 \ln |F(w_0)| \geqslant \int\limits_{|w-w_0|<R} \ln^+ \frac{1}{|F(w)|}\, d\omega_w. \tag{5}$$

Это неравенство, очевидно, эквивалентно неравенству

$$\ln|F(w_0)| \leqslant \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{|w-w_0|\leqslant R} \ln|F(w)|\, d\omega_w,$$

имеющему место ввиду субгармоничности функции $\ln|F(w)|$.

Применяя неравенство (5), получаем из (4), что

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_k} \big|\ln|F(w)|\big|\, d\omega_w \leqslant 2 \sum_{l=-p_k}^{p_k} \int\limits_{E_{k,l}} \ln^+|F(w)|\, d\omega_w - 4\pi\eta_k^2 \sum_{l=-p_k}^{p_k} \ln|F(t_k e^{il\eta_k/t_k})|.$$

Воспользуемся теперь тем, что, согласно определению функции уточненного порядка $\varrho(t)$ в угле $T_{a'}$, выполняется неравенство

$$\ln^+|F(w)| \leqslant C_1 + C_2\, |w|^{\varrho(|w|)} \qquad (C_1 < \infty, C_2 < \infty).$$

Имеем тогда

$$\sum_{k=m_0}^{m} \sum_{l=-p_k}^{p_k} \int\limits_{E_{k,l}} \ln^+|F(w)|\, d\omega_w \leqslant 4\pi(C_1 + C_2 t_m^{\varrho(t_m)}) \sum_{k=m_0}^{m} (2p_k+1)\eta_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi(C_1 + C_2 t_m^{\varrho(t_m)}) \sum_{k=m_0}^{m} (2t_k a' + \eta_k)\eta_k \leqslant C(C_1 + C_2 t_m^{\varrho(t_m)}) t_m \sum_{k=0}^{m} \eta_k,$$

где C — некоторая константа.

Отсюда, учитывая вытекающее из (3) равенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{t_m} \sum_{k=0}^{m} \eta_k = 0 \tag{6}$$

заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{t_m^{\varrho(t_m)+2}} \sum_{k=m_0}^{m} \sum_{l=-p_k}^{p_k} \int\limits_{E_{k,l}} \ln^+|F(w)|\, d\omega_w = 0. \tag{7}$$

Далее, из определения чисел t_k следует, что

$$\ln|F(t_k e^{il\eta_k/t_k})| \geqslant \big(h_F(l\eta_k/t_k) - \varepsilon\big)\, t_k^{\varrho(t_k)}.$$

Поэтому

$$-\sum_{k=m_0}^{m} \eta_k^2 \sum_{l=-p_k}^{p_k} \ln|F(t_k e^{il\eta_k/t_k})| \leqslant \big(\varepsilon + \max_{|\theta|\leqslant a'} |h_F(\theta)|\big) \sum_{k=m_0}^{m} (2p_k+1)\,\eta_k^2\, t_k^{\varrho(t_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \big(\varepsilon + \max_{|\theta|\leqslant a'} |h_F(\theta)|\big) \sum_{k=m_0}^{m} (2t_k a' + \eta_k)\, t_k^{\varrho(t_k)} \eta_k \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{C}\big(\varepsilon + \max_{|\theta|\leqslant a'} |h_F(\theta)|\; t_m^{\varrho(t_m)+1}\big) \sum_{k=m_0}^{m} \eta_k$$

(здесь $\tilde{C}$ — некоторая константа).

Следовательно (см. (6)),

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} t_m^{-\varrho(t_m)}\left\{-\sum_{k=m_0}^{m}\eta_k^2\sum_{l=-p_k}^{p_k}\ln|F(t_k e^{il\eta_k/t_k})|\right\}\leqslant 0.$$

Отсюда и из (3) и (6) заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty} t_m^{-\varrho(t_m)-2}\int\limits_{S_a^*(t_m+\eta_m)}\left|\ln|F(w)|\right|d\omega_w=\lim_{m\to\infty} t_m^{-\varrho(t_m)-2}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{\mathfrak{A}_k}\left|\ln|F(w)|\right|d\omega_w=0,$$

и поскольку при $t_m+\eta_m\leqslant r\leqslant t_{m+1}$

$$\int\limits_{S_{a'}^*(r)}\left|\ln|F(w)|\right|d\omega_w=\int\limits_{S_{a'}^*(t_{m+1})}\left|\ln|F(w)|\right|d\omega_w,$$

получаем, наконец, что

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\varrho(r)-2}\int\limits_{S_a^*(r)}\left|\ln|F(w)|\right|d\omega_w=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $F(w)$ — функция вполне регулярного роста (относительно $\varrho(t)$) в угле T_a, голоморфная в начале координат, и пусть $\chi(w)$ — непрерывная функция в $\overline{T}_a(r)$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{T_{a'}(r)}\chi(w)\ln|F(tw)|\,d\omega_w=\int\limits_{T_{a'}(r)}\chi(w)h_F(\arg w)\,|w|^{\varrho}\,d\omega_w, \tag{8}$$

где h_F — индикатор функции F.

Доказательство. Очевидно, что равенство (8) достаточно доказать только для неотрицательных функций $\chi(w)$ и для $r=1$. Покажем вначале, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{T_{a'}(1)}\chi(w)\ln|F(tw)|\,d\omega_w\leqslant\int\limits_{-a'}^{a'}h_F(\theta)d\theta\int\limits_0^1\chi(se^{i\theta})s^{\varrho+1}ds. \tag{9}$$

Для этого заметим, что согласно известным свойствам индикатора $h_F(\theta)$ при любом $\varepsilon>0$ и для всех t, начиная с некоторого $t_0=t_0(\varepsilon, a')$, выполняется неравенство

$$\ln|F(te^{i\theta})|\leqslant\left(h_F(\theta)+\varepsilon\right)t^{\varrho(t)},\qquad |\theta|\leqslant a'.$$

Поэтому

$$\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{T_{a'}(1)}\chi(w)\ln|F(tw)|d\omega_w\leqslant\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{-a'}^{a'}\left(h_F(\theta)+\varepsilon\right)d\theta\int\limits_0^1(ts)^{\varrho(ts)}\chi(se^{i\theta})sds- \tag{10}$$

$$-\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{-a'}^{a'}\left(h_F(\theta)+\varepsilon\right)d\theta\int\limits_0^{t_0/t}(ts)^{\varrho(ts)}\chi(se^{i\theta})sds+\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{T_{a'}(t_0/t)}\chi(w)\ln|F(tw)|d\omega_w=$$

$$= \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int_{-\alpha'}^{\alpha'} (h_F(\theta)+\varepsilon)d\theta \int_0^1 (ts)^{\varrho(ts)} \chi(se^{i\theta}) s ds -$$

$$- \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}} \int_{-\alpha'}^{\alpha'} (h_F(\theta)+\varepsilon)d\theta \int_0^{t_0} r^{\varrho(r)} \chi\left(\frac{r}{t}e^{i\theta}\right) r dr + \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int_{T_{\alpha'}(t_0/t)} \chi(w) \ln |F(tw)| d\omega_w .$$

Так как (см. [7], стр. 49)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(ts)^{\varrho(ts)}}{t^{\varrho(t)}} = s^{\varrho} \quad \text{и} \quad \frac{(ts)^{\varrho(ts)}}{t^{\varrho(t)}} < 1 \quad \forall s < 1,$$

то

$$(11) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int_{-\alpha'}^{\alpha'} (h_F(\theta)+\varepsilon)d\theta \int_0^1 (ts)^{\varrho(ts)} \chi(se^{i\theta}) s ds =$$

$$= \int_{-\alpha'}^{\alpha'} (h_F(\theta)+\varepsilon)d\theta \int_0^1 s^{\varrho+1} \chi(se^{i\theta}) ds .$$

Предел двух последних слагаемых в правой части выражения (10) при $t \to \infty$, очевидно, равен нулю. Таким образом, неравенство (9) следует из (10) путем предельного перехода (при $t \to \infty$) и последующего учета произвольности $\varepsilon > 0$.

Теперь покажем, что

$$(12) \qquad \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int_{T_{\alpha'}(1)} \chi(w) \ln |F(tw)| d\omega_w \geqslant \int_{-\alpha'}^{\alpha'} h_F(\theta) d\theta \int_0^1 \chi(se^{i\theta}) s^{\varrho+1} ds .$$

Имеем

$$\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int_{T_{\alpha'}(1)} \chi(w) \ln |F(tw)| d\omega_w = \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}} \int_{T_{\alpha'}(t)} \chi\left(\frac{w}{t}\right) \ln |F(w)| d\omega_w =$$

$$= \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}} \left\{ \int_{S_{\alpha'}(t)} + \int_{S^*_{\alpha'}(t)} \chi\left(\frac{w}{t}\right) \ln |F(w)| d\omega_w \right\},$$

где $S_{\alpha'}(t)$ и $S^*_{\alpha'}(t)$ те же, что и в лемме 2.

Из леммы 2, учитывая ограниченность функции $\chi(w)$, заключаем, что

$$(13) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}} \int_{S^*_{\alpha'}(t)} \chi\left(\frac{w}{t}\right) \ln |F(w)| d\omega_w = 0 .$$

Далее, используя определение множества $S_a(t)$, получаем

$$
(14)\qquad \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{S_{a'}(t)}\chi\left(\frac{w}{t}\right)\ln|F(w)|d\omega_w \geqslant
$$

$$
\geqslant \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{S_{a'}(t)}\chi\left(\frac{w}{t}\right)\big(h_F(\arg w)-\varepsilon\big)|w|^{\varrho(|w|)}d\omega_w =
$$

$$
= \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{T_{a'}(t)}\chi\left(\frac{w}{t}\right)\big(h_F(\arg w)-\varepsilon\big)|w|^{\varrho(|w|)}d\omega_w -
$$

$$
- \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{S^*_{a'}(t)}\chi\left(\frac{w}{t}\right)\big(h_F(\arg w)-\varepsilon\big)|w|^{\varrho(|w|)}d\omega_w =
$$

$$
= \frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{-a'}^{a'}\big(h_F(\theta)-\varepsilon\big)d\theta\int\limits_0^1 (ts)^{\varrho(ts)}\chi(se^{i\theta})s\,ds -
$$

$$
- \frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{-a'}^{a'}\big(h_F(\theta)-\varepsilon\big)d\theta\int\limits_{I^*(t)} r^{\varrho(r)+1}\chi\left(\frac{r}{t}e^{i\theta}\right)dr.
$$

Точно так же как и (11) получаем

$$
(15)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{-a'}^{a'}\big(h_F(\theta)-\varepsilon\big)d\theta\int\limits_0^1 (ts)^{\varrho(ts)}\chi(se^{i\theta})s\,ds =
$$

$$
= \int\limits_{-a'}^{a'}\big(h_F(\theta)-\varepsilon\big)d\theta\int\limits_0^1 s^{\varrho+1}\chi(se^{i\theta})ds.
$$

Кроме того, имеем

$$
\left|\frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{-a'}^{a'}\big(h_F(\theta)-\varepsilon\big)d\theta\int\limits_{\cdot} r^{\varrho(t)+1}\chi\left(\frac{r}{t}e^{i\theta}\right)dr\right| \leqslant
$$

$$
\leqslant \max_{|\theta|\leqslant a'}|h_F(\theta)-\varepsilon|\max_w\chi(w)\frac{\operatorname{mes} I^*(t)}{t}
$$

и, следовательно,

$$
(16)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{-a'}^{a'}\big(h_F(\theta)-\varepsilon\big)d\theta\int\limits_{I^*(t)} r^{\varrho(r)+1}\chi\left(\frac{r}{t}e^{i\theta}\right)dr = 0.
$$

Из (14), (15) и (16) следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\varrho(t)+2}}\int\limits_{S_{a'}(t)}\chi\left(\frac{w}{t}\right)\ln|F(w)|d\omega_w\geqslant\int\limits_{-a'}^{a'}\left(h_F(\theta)-\varepsilon\right)d\theta\int\limits_0^1 s^{\varrho+1}\chi(se^{i\theta})ds.$$

Отсюда и из (13), учитывая также произвольность $\varepsilon>0$, получаем (12).

Сопоставляя теперь неравенства (12) и (9), убеждаемся в существовании предела (8) и, более того, в наличии равенства

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\varrho(t)}}\int\limits_{T_{a'}(1)}\chi(w)\ln|F(tw)|d\omega_w=\int\limits_{T_{a'}(1)}\chi(w)h_F(\arg w)|w|^{\varrho}d\omega_w.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\varphi(z,w)$ — голоморфная в $G\times C$, $G\subset C^n$, функция не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$. Тогда для каждого открытого множества $G'\Subset G$ существуют константы C_1 и C_2 такие, что*

$$\int\limits_{|w|<t}\left|\ln|\varphi(z,w)|\right|d\omega_w\leqslant C_1t^{\varrho(t)+2}+C_2t^2-\left(\ln|\varphi(z,0)|\right)\pi t^2\qquad\forall z\in G',\ t>0.$$

Доказательство. Используя стандартным образом субгармоничность по w функции $\varphi(z,w)$ (см., например, доказательство леммы 2), получаем

$$\int\limits_{|w|<t}\left|\ln|\varphi(z,w)|\right|d\omega_w\leqslant 2\int\limits_{|w|<t}\ln^+|\varphi(z,w)|d\omega_w-\pi t^2\ln|\varphi(z,0)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\pi t^2\ln M(t;G;\varphi)-\pi t^2\ln|\varphi(z,0)|.$$

Теперь для доказательства леммы достаточно сослаться на то, что функция $\varphi(z,w)$ не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$.

Лемма 5. *Пусть $\varphi(z,w)$ — голоморфная функция в $G\times C$, $G\subset C^n$, не более чем уточненного порядка $\varrho(t)$, $\varphi(z,0)\not\equiv 0$, и пусть $\chi(w)$ — непрерывная функция в секторе $T_a(1)$. Тогда существует такая локально суммируемая в G функция $\tau(z)>0$, что*

$$\frac{1}{t^{\varrho(t}}\int\limits_{T_a(1)}\chi(w)\ln|\varphi(z,tw)|d\omega_w<\tau(z)\qquad\forall z\in G,\ 0<\varepsilon<t.$$

Эта лемма в силу локальной суммируемости функции $\ln|\varphi(z,0)|$ является очевидным следствием леммы 4.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 4.

Не нарушая общности можно считать, что $\varphi(z,0)\not\equiv 0$. Тогда как следует из лемм 3 и 5, равенство

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\varrho}}\int\limits_{A_{G',a'}(r)}\chi(z,w)\ln|\varphi(z,tw)|d\omega_zd\omega_w=\int\limits_{A_{G',a'}(r)}\chi(z,w)h_\varphi(z,w)\,d\omega_wd\omega_z$$

имеет место для любых $G' \Subset G$, $a' < a$ и любых непрерывных в $\bar{A}_{G',a'}(r)$ функций $\chi(z, w)$. Отсюда заключаем, что для функций $\chi(z, w)$ бесконечно дифференцируемых в $A_{G,a}(r)$ и имеющих там компактный носитель, выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G,a}(r)} \chi(z, w) \ln|\varphi(z, tw)|\, d\omega_z d\omega_w = \int\limits_{A_{G,a}(r)} \chi(z, w) h_\varphi(z, w)\, d\omega_z d\omega_w .$$

Это означает, что функции $\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \ln|\varphi(z, tw)|$ сходятся в топологии пространства обобщенных функций в области $A_{G,a}(r)$ к функции $h_\varphi(z, w)$. Тем самым теорема 4 доказана.

Из теоремы 4, согласно известным свойствам обобщенных функций, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \ln|\varphi(z, tw)| = \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} h_\varphi(z, w). \tag{17}$$

Ранее мы отмечали, что $h_\varphi(z, w)$ почти всюду совпадает с $h_\varphi^*(z, w)$ и, следовательно, $h_\varphi(z, w)$ и $h_\varphi^*(z, w)$ как элементы пространства обобщенных функций, тождественны. Поэтому наряду с (17) верно и следующее равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \ln|\varphi(z, tw)| = \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} h_\varphi^*(z, w). \tag{17'}$$

Напомним, что обобщенная функция $\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} h_\varphi^*(z, w)$ положительна и определяемая ею мера была обозначена через ν_φ. В свою очередь, обобщенные функции $\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \ln|\varphi(z, tw)|$ положительны и, значит (см. [9]), из (17′) следует, что равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_D \frac{\partial^2 \ln|\varphi(z, tw)|}{\partial w \partial \bar{w}}\, d\omega_z d\omega_w = \int\limits_D \frac{\partial^2 h_\varphi^*(z, w)}{\partial w \partial \bar{w}}\, d\omega_z d\omega_w \tag{18}$$

имеет место для каждого открытого множества $D \Subset A_{G,a}$ такого, что $\nu_\varphi(\partial D) = 0$. Так как индикатор $h_\varphi^*(z, w)$ позитивно однородная по переменной w функция, то $\nu_\varphi\big((z, w)\colon z \in G', |w| = t\big) = 0$. Следовательно, при выполнении (1) имеем

$$\nu_\varphi\big(\partial\{A_{G',a'}(1) \setminus A_{G',a'}(\varepsilon)\}\big) = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

и, применяя (18), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(1) \setminus A_{G',a'}(\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \ln|\varphi(z, tw)|\, d\omega_z d\omega_w = \\ = \int\limits_{A_{G',a'}(1) \setminus A_{G',a'}(\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} h_\varphi^*(z, w)\, d\omega_z d\omega_w = \frac{1}{4} \nu_\varphi\big(A_{G',a'}(1) \setminus A_{G',a'}(\varepsilon)\big) = \\ = \frac{1 - \varepsilon^\varrho}{4} \nu_\varphi\big(A_{G',a'}(1)\big). \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь для доказательства утверждения теоремы 2 достаточно показать, что для любого $\eta > 0$ найдутся такие числа $\varepsilon_0(\eta)$ и $t_0(\eta)$, что при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $t > t_0$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \ln|\varphi(z, tw)| d\omega_z d\omega_w < \eta. \tag{20}$$

Действительно,

$$\frac{1}{t^{\varrho(t)}} n_\varphi(t, G', a') - \nu_\varphi(A_{G',a'}(1)) =$$

$$= \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(1)} \frac{\partial^2 \ln|\varphi(z, tw)|}{\partial w \partial \overline{w}} d\omega_z d\omega_w - \nu_\varphi(A_{G',a'}(1)) =$$

$$= \left\{ \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(1) \setminus A_{G',a'}(\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \ln|\varphi(z, tw)| d\omega_z d\omega_w - (1-\varepsilon^\varrho)\nu_\varphi(A_{G',a'}(1)) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \ln|\varphi(z, tw)| d\omega_z d\omega_w + \varepsilon^\varrho \nu_\varphi(A_{G',a'}(1)).$$

Таким образом, из (19) и (20) и конечности величины $\nu_\varphi(A_{G',a'}(1))$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\varrho(t)}} n_\varphi(t, G', a') = \nu_\varphi(A_{G',a'}(1)).$$

Итак, для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в справедливости неравенства (20). Имеем

$$\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \ln|\varphi(z, tw)|}{\partial w \partial \overline{w}} d\omega_z d\omega_w = \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(\varepsilon t)} \frac{\partial^2 \ln|\varphi(z, w)|}{\partial w \partial \overline{w}} d\omega_z d\omega_w =$$

$$= \frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{G'} n_\varphi(\varepsilon t, a', z) d\omega_z.$$

Оценивая последний интеграл с помощью леммы 1, получаем, далее,

$$\frac{1}{t^{\varrho(t)}} \int\limits_{A_{G',a'}(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \ln|\varphi(z, tw)|}{\partial w \partial \overline{w}} d\omega_z d\omega_w < \left(a_1 (\varepsilon t)^{\varrho(\varepsilon t)} + a_2\right) t^{-\varrho(t)},$$

где a_1 и a_2 — некоторые константы. Неравенство (20) следует теперь из того, что функция $t^{\varrho(t)}$ монотонно стремится к $+\infty$, а

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\varepsilon t)^{\varrho(\varepsilon t)}}{t^{\varrho(t)}} = \varepsilon^\varrho.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Достаточным условием вполне регулярности роста в C целой функции $F(w)$, $w \in C$, нормального типа при порядке $\varrho = 1$ является ограниченность ее на вещественной оси [9]. В многомерном случае ограниченность на вещественной гиперплоскости целой функции $f(z)$, $z \in C^n$, нормального типа при порядке $\varrho = 1$ уже не является достаточным условием вполне регулярности в C^n (в смысле Л. Грумена) ее роста. Чтобы убедиться в этом достаточно сослаться на построенную Вотьером [10] [10] целую функцию $f(z)$, $z \in C^2$, нормального типа при порядке $\varrho = 1$, ограниченную на вещественной гиперплоскости и такую, что в $D'(C^2)$ не существует предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |f(tz)|. \tag{21}$$

Действительно, согласно теореме 5, для целых функций вполне регулярного роста в C^n относительно $\varrho(t) = 1$ предел (21) существует.

4. Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в R^m уточненного порядка $\varrho(t)$, а μ_u — мера, ассоциированная ей по Риссу. По теореме В. С. Азарина [4] при нецелом $\varrho = \lim\limits_{t\to\infty}\varrho(t)$ существование предела

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\varrho+m-2}} \int\limits_{K_D(R)} d\mu_u$$

для любого открытого множества $D \subset \{x\colon |x| = 1\}$ такого, что $\mu_u(\partial D) = 0$ является необходимым и достаточным условием вполне регулярности (в смысле определения данного в [4]) роста функции $u(x)$. Отсюда и из теоремы 3 немедленно следует, что при нецелом [11] ϱ функция $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция вполне регулярного (относительно $\varrho(t)$) роста является субгармонической функцией вполне регулярного роста в $R^{2n} = C^n$.

---

[9] Более общее условие — сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{1+x^2}\,dx$.

[10] В работе Вотьера содержится утверждение и о не существовании для построенной им функции предела $\lim\limits_{t\to\infty} (1/t^3)\,\sigma_f(t)$. Отметим, что доказательства ряда лемм в [10] либо ошибочны, либо неполны. Необходимые исправления, повлекшие существенное изменение статьи, были даны С. Ю. Фаворовым. При этом в полной общности восстановить результат Вотьера не удалось, а именно, показано лишь существование ограниченной на вещественной плоскости функции $f(z)$, для которой не существует предел (21), а не $\lim\limits_{t\to\infty} (1/t^3)\,\sigma_f(t)$.

[11] Случай ϱ целого рассмотрел П. З. Агранович в [1].

Литература

[1] П. З. Агранович, *О функциях вполне регулярного роста многих переменных*, Теория функций, функц. анализ и их прилож. Харьков 1978, вып. 30, с. 3–13.

[2] — и Л. И. Ронкин, *О функциях вполне регулярного роста многих переменных*, Препринт ФТИНТ АН УССР, Харьков 1976, 21 с.

[3] — — *Об условиях плюригармоничности индикатора голоморфной функции многих переменных*, Мат. сб. 98 (140), № 2 (10) (1975), с. 319–332.

[4] В. С. Азарин, *О субгармонических функциях вполне регулярного роста в многомерном пространстве*, ДАН СССР 146, № 4 (1962), с. 743–746.

[5] — *Об асимптотическом поведении субгармонических и целых функций*, ДАН СССР 1976, 229, № 6 с. 1289–1291.

[6] L. Gruman, *Entire functions of several variables and their asymptotic growth*, Ark. Mat. 9 (1971) p. 141–163.

[7] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, М. Гостехиздат (1956), 632 с.

[8] Л. И. Ронкин, *О целых функциях конечной степени и о функциях вполне регулярного роста от нескольких переменных*, ДАН СССР 119 № 2 (1958), с. 211–214.

[9] — *Введение в теорию целых функций многих переменных*, М. „Наука" (1971), 430 с.

[10] J. Vautheir, *Comportement asymptotique des fonctions entières de type exponentiel dans* C^n *et bornés dans le domaine réel*, J. Funct. Anal. 12 (1973) p. 290–306.

Reçu par la Rédaction le 28. 9. 1978