R. ZUBER (Wrocław)

GRAFICZNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH PIERWSZEGO RZĘDU

Niech będzie dane równanie

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

gdzie funkcja $f(x, y)$ jest określona i ciągła w obszarze Q płaszczyzny xy. Każdemu punktowi $P(x_0, y_0)$ obszaru Q przyporządkujmy odcinek o środku w tym punkcie, ustalonej długości i o współczynniku kątowym równym $f(x_0, y_0)$. Taki odcinek nosi nazwę *elementu liniowego* równania (1). Każda krzywa całkowa równania (1) w każdym swym punkcie jest styczna do elementu liniowego przyporządkowanego temu punktowi.

Metody graficzne rozwiązywania równań różniczkowych postaci (1) opierają się zazwyczaj na spostrzeżeniu, że:

1° łatwo jest narysować elementy liniowe równania (1) dla punktów dowolnie gęsto rozsianych w obszarze Q,

2° na wykresie, na którym narysowano elementy liniowe odpowiednio gęsto, można łatwo prowadzić krzywe styczne w każdym swym punkcie do elementu liniowego przyporządkowanego temu punktowi, a więc krzywe całkowe równania (1).

Jedną z najbardziej znanych i używanych metod tego typu jest metoda izoklin. *Izokliną* nazywa się miejsce geometryczne punktów, których elementy liniowe mają stały kierunek. Innymi słowy izokliną równania (1) nazywa się każda krzywa o równaniu $f(x, y) = \text{const}$.

Metoda izoklin polega na:

1° narysowaniu krzywych $f(x, y) = t$ dla wartości parametru t dobranych odpowiednio gęsto,

2° narysowaniu elementów liniowych odpowiadających pewnym wybranym punktom każdej izokliny (wykorzystuje się tu równoległość wszystkich elementów liniowych każdej izokliny).

Otrzymane w ten sposób pole kierunków pozwala orientować się w przebiegu krzywych całkowych równania (1) i wykreślać krzywe przechodzące przez dany z góry punkt.

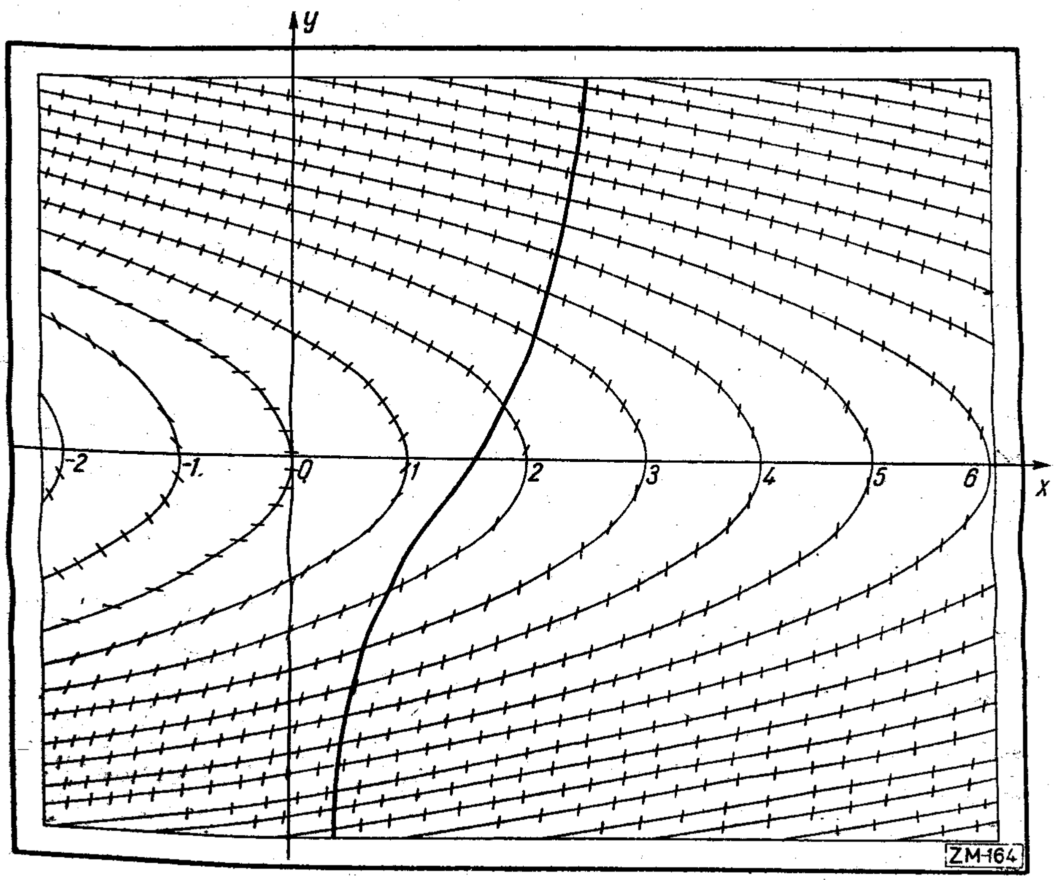
PRZYKŁAD 1. Niech będzie dane np. równanie

$$y' = y^2+x.$$

Jego izokliny mają równanie

$$y^2+x = t, \quad \text{czyli} \quad x = t-y^2,$$

a elementy liniowe wszystkich punktów izokliny, otrzymanej dla ustalonej wartości parametru t, mają współczynniki kierunkowe równe t. Rysując izokliny dla $t = -2, -1, 0, \ldots, 15$ i dla każdej z nich w dowolnie obranych odstępach elementy liniowe, otrzymujemy następujący wykres:



Rys. 1

Na wykresie tym poprowadzono krzywą całkową przez punkt $(2,1)$ kierując się jedynie żądaniem, by krzywa ta była w każdym swym punkcie styczna do elementu liniowego przyporządkowanego temu punktowi.

W artykule niniejszym podam parę metod, które wydają się wygodniejsze od metody izoklin.

Niech będzie dany punkt $S(a_0, b_0)$ i krzywa

(2) $$y-b_0 = f(x, y)(x-a_0).$$

Ponieważ równanie stycznej do krzywej całkowej równania (1) w punkcie $P(x_0, y_0)$ ma postać

$$y-y_0 = f(x_0, y_0)(x-x_0), \tag{3}$$

więc z porównania wzorów (2) i (3) wynika, że jeżeli punkt P leży na krzywej (2), tzn. jeżeli

$$y_0-b_0 = f(x_0, y_0)(x_0-a_0),$$

to styczna (3) przechodzi przez punkt S. Innymi słowy krzywa (2) jest miejscem geometrycznym punktów, których elementy liniowe leżą na prostych przechodzących przez punkt S.

Krzywą (2) będziemy nazywać *biegunową stycznych* równania (1) dla bieguna S.

Niech będzie teraz dana krzywa zamknięta wypukła

$$x = a(t), \quad y = b(t), \tag{4}$$

wewnątrz której leży obszar Q. Każda styczna do którejkolwiek krzywej całkowej równania (1) w punkcie leżącym w obszarze Q przecina krzywą (4) dokładnie w dwóch punktach. Jeżeli punkty krzywej (4) przyjąć za bieguny i każdemu z nich przyporządkować biegunową stycznych, to przez każdy punkt obszaru Q będą przechodziły dokładnie dwie biegunowe stycznych. Krzywą (4) będziemy nazywać *kierownicą stycznych.*

Z powyższych rozważań wynika następująca metoda graficznego rozwiązywania równań postaci (1), którą nazywać będziemy *biegunową metodą stycznych*. Polega ona na:

1° ustaleniu kierownicy (4),

2° wykreśleniu siatki biegunowych (2) dla wybranych punktów kierownicy,

3° wykreśleniu przez wybrane punkty każdej biegunowej elementów liniowych (wszystkie elementy liniowe ustalonej biegunowej leżą na prostych przechodzących przez biegun odpowiadający tej biegunowej).

Aby ułatwić odnajdywanie odpowiadających sobie biegunów i biegunowych, opatrujemy tymi samymi numerami punkty kierownicy (4) i odpowiadające im biegunowe.

Biegunową metodę stycznych można oczywiście uogólnić na równania postaci

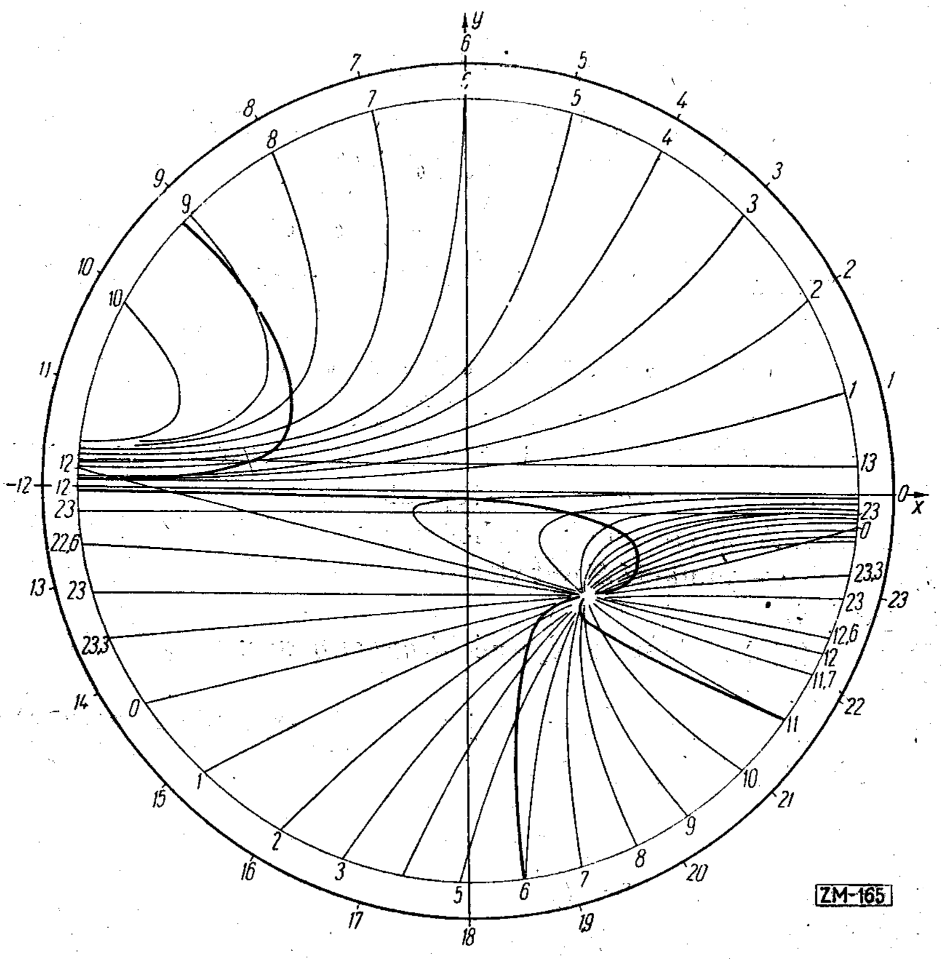
$$F(x, y, y') = 0.$$

Wtedy dla biegunów leżących na kierownicy (4) otrzymujemy równania odpowiadających im biegunowych w postaci

$$F\left(x, y, \frac{y-b(t)}{x-a(t)}\right) = 0.$$

W niektórych przypadkach wygodnie jest przyjąć za kierownicę (4) krzywą niezamkniętą lub nie obejmującą obszaru Q, np. dwie przecinające się proste lub nawet jedną prostą.

Przypuśćmy, że chcemy narysować wykres krzywej całkowej równania (1) przechodzącej przez dany punkt $P_0(x_0, y_0)$. Jeśli punkt P_0 leży na biegunowej stycznych o cesze np. t_j, to rysujemy jego element liniowy jako odcinek prostej przechodzącej przez punkt P_0 i biegun o cesze t_j na kierownicy. Jeśli natomiast punkt P_0 leży między biegunowymi o cechach t_j i t_{j+1}, to kreślimy odcinek prostej przechodzącej przez punkt P_0 oraz punkt leżący na kierownicy między biegunami t_j i t_{j+1}. (Można tu łatwo interpolować.) Narysowany w pierwszym kroku odcinek przedłużamy aż do przecięcia z następną biegunową stycznych o cesze t_{j+1} w punkcie P_1.



Rys. 2

Przez punkt P_1 i biegun o cesze t_{j+1} na kierownicy prowadzimy drugi odcinek prostej i przedłużamy go aż do przecięcia z następną biegunową w punkcie P_2. Postępując dalej analogicznie, otrzymamy linię łamaną aproksymującą szukane rozwiązanie.

PRZYKŁAD 2. Rozwiążmy biegunową metodą stycznych równanie

$$(xy+1)y'-y^2-y = 0.$$

Za kierownicę bierzemy koło $x = \cos t$, $y = \sin t$. Rodzina biegunowych jest określona równaniem

$$x = \frac{y^2\cos t+y\sin t+y-\sin t}{y(1+\sin t)}.$$

Na rysunku 2 narysowano biegunową metodą stycznych kilka krzywych całkowych rozpatrywanego równania.

Omówimy teraz metodę podobną do poprzedniej, którą nazywać będziemy *biegunową metodą normalnych.*

Rozpatrzmy krzywą

$$(5) \qquad y-b_0 = -(x-a_0)/f(x, y)$$

oraz punkt $S(a_0, b_0)$. Ponieważ równaniem normalnej do krzywej całkowej równania (1) w punkcie $P(x_0, y_0)$ jest

$$(6) \qquad y-y_0 = -(x-x_0)/f(x_0, y_0),$$

więc z porównania (5) i (6) wynika, że jeżeli punkt P leży na krzywej (5), tzn. jeżeli

$$y_0-b_0 = -(x_0-a_0)/f(x_0, y_0),$$

to normalna (6) przechodzi przez punkt S.

Innymi słowy krzywa (5) jest miejscem geometrycznym punktów, których elementy liniowe są prostopadłe do prostych przechodzących przez punkt S. A zatem koło przechodzące przez jakikolwiek punkt krzywej (5) o środku w punkcie S jest styczne do krzywej całkowej równania (1) w tym punkcie.

Krzywą (5) będziemy nazywać *biegunową normalnych* równania (1) dla bieguna S.

Analogicznie jak w biegunowej metodzie stycznych, wprowadzamy tu kierownicę (4), którą tym razem nazywać będziemy *kierownicą normalnych.*

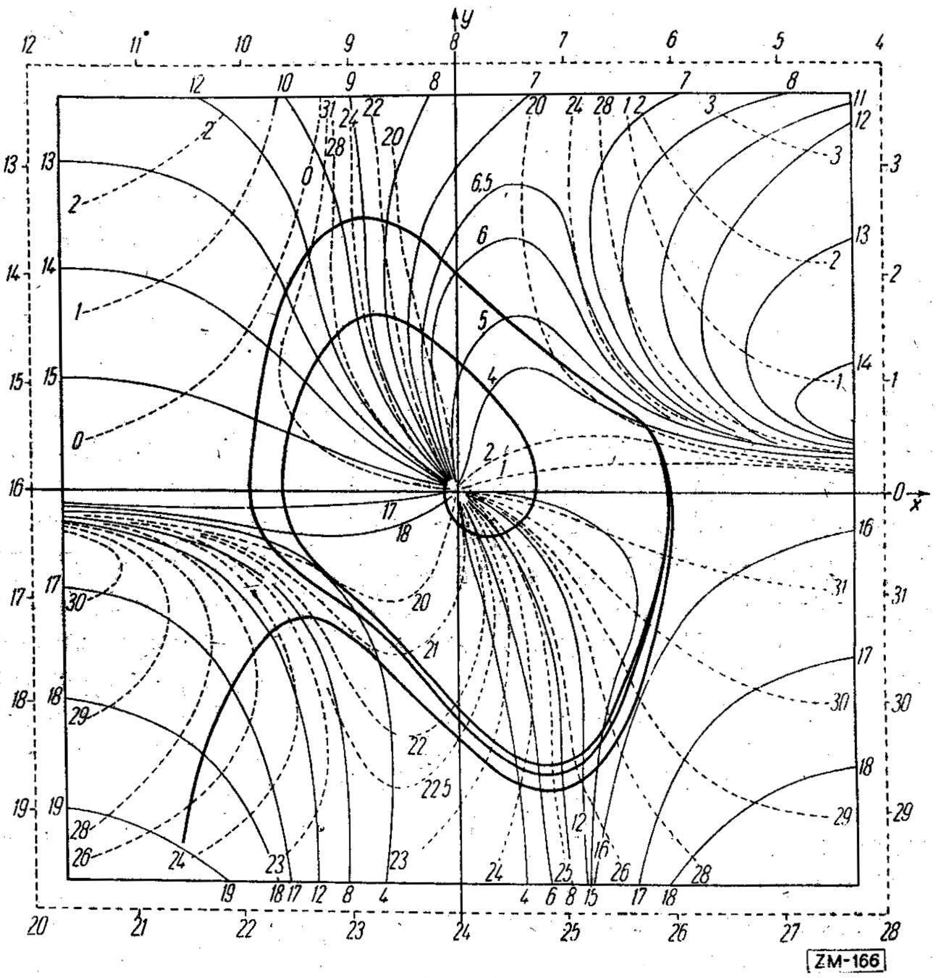
Biegunowa metoda normalnych polega na:

1° ustaleniu kierownicy (4),

2° wykreśleniu siatki biegunowych (5) dla wybranych punktów kierownicy,

3° wykreśleniu przez wybrane punkty każdej biegunowej elementów liniowych (wszystkie elementy ustalonej biegunowej rysuje się tu za pomocą cyrkla, zakreślając łuki kół koncentrycznych, których środek leży w biegunie odpowiadającym tej biegunowej).

Przypuśćmy, że chcemy biegunową metodą normalnych narysować wykres krzywej całkowej równania (1) przechodzącej przez dany punkt $P_0(x_0, y_0)$. Gdy punkt P_0 leży na biegunowej o cesze np. t_j, wówczas zataczamy przezeń łuk koła o środku w biegunie o cesze t_j na kierownicy. Gdy punkt P_0 nie leży na żadnej narysowanej biegunowej, wówczas interpolujemy analogicznie jak w metodzie stycznych. Narysowany w pierwszym kroku łuk koła przedłużamy aż do przecięcia z następną biegunową normalnych o cesze t_{j+1} w punkcie P_1. Przez punkt P_1 zakreślamy łuk koła, którego środek leży na kierownicy w biegunie o cesze t_{j+1} i przedłużamy go do przecięcia z następną biegunową w punkcie P_2. Postępując analogicznie dalej, dostaniemy krzywą złożoną z łuków kół aproksymującą szukane rozwiązanie.



Rys. 3

Jeżeli kierownica jest krzywą zamkniętą, to każdemu punktowi leżącemu wewnątrz niej odpowiadają dwa bieguny na kierownicy; jeden z nich leży po stronie wypukłości, a drugi po stronie wklęsłości krzywej całkowej. Dla polepszenia aproksymacji, obieramy za środek okręgu aproksymującego biegun leżący po stronie wklęsłości krzywej całkowej.

Przykład 3. W teorii drgań układów nieliniowych ma zastosowanie uogólnione równanie van der Pola

$$d^2x/dt^2+x+\varepsilon f(x, dx/dt) = 0. \tag{7}$$

Jedną z metod badania tego równania jest badanie kształtu krzywych całkowych na tak zwanej *płaszczyźnie fazowej*, to znaczy płaszczyźnie o osiach x i dx/dt. Po podstawieniu $dx/dt = y$, równanie (7) przyjmie postać

$$yy'+x+\varepsilon f(x, y) = 0.$$

Na rysunku 3 narysowane są, za pomocą metody biegunowej normalnych, wykresy krzywych całkowych równania van der Pola

$$yy'+x+\varepsilon(1-x^2)y = 0.$$

Za kierownicę przyjęto tu kwadrat.

Jeśli w dwu bliskich punktach dowolnej krzywej narysujemy normalne do tej krzywej, to przetną się one w punkcie bliskim środka krzywizny odpowiadającemu punktowi A.

Korzystając z tej własności możemy zwiększyć dokładność biegunowej metody normalnych.

Przypuśćmy, że mamy narysowaną kierownicę normalnych i biegunowe normalnych, tak jak przy biegunowej metodzie normalnych. Chcąc narysować krzywą całkową równania (1) przechodzącą przez dany punkt $P_0(x_0, y_0)$, robimy pierwszy krok jak w metodzie normalnych, to znaczy przez P_0 zakreślamy łuk koła aż do jakiegoś bliskiego punktu P_1. Następnie prowadzimy normalną do krzywej całkowej w punkcie P_0 jako prostą przechodzącą przez P_0 i odpowiadający mu biegun. Analogicznie rysujemy normalną do tejże krzywej przez punkt P_1. Punkt N_1 przecięcia tych normalnych przyjmujemy w przybliżeniu za środek koła ściśle stycznego. Z tego środka N_1 kreślimy łuk koła przez punkt P_1 aż do punktu P_2. Normalna do krzywej całkowej w punkcie P_2 przecina poprowadzoną poprzednio normalną przez punkt P_1 w punkcie N_2 bliskim środka koła ściśle stycznego do krzywej całkowej w punkcie P_2. Ze środka N_2 kreślimy łuk koła przez P_2 aż do punktu P_3 itd.

Błędy przybliżeń, otrzymywanych opisanymi metodami, szacuje się analogicznie jak w metodzie izoklin.

Praca wpłynęła 25. 1. 1956

Р. ЗУБЕР (Вроцлав)

ГРАФИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

В статье даны два метода сходные с методом изоклин.

Вместо того, чтобы — как в методе изоклин — вычерчивать кривые по точкам, в которых касательные к интегральным кривым данного уравнения имеют постоянное направление, предлагается чертить кривые по точкам, в которых касательные или нормальные к кривым проходят через фиксированную точку произвольной кривой, называемой *директриссой*.

Предлагаемые методы в общем удобнее широко употребляемого метода изоклин.

В статье даны примеры применения этих методов.

R. ZUBER (Wrocław)

GRAPHICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

SUMMARY

The paper gives two methods similar to the method of isoclines.

Instead of drawing — as in the isocline method — curves consisting of points at which the tangents to the integral curves of a given equation have a fixed direction, the author suggests the drawing of curves consisting of those points at which the tangents or normals to the integral curves pass through a fixed point of an arbitrarily chosen curve called the directrix. The methods suggested are, on the whole, more convenient than the commonly used isocline method.

The paper contains examples of the application of these methods.
