ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII, 4 (1966)

J. KUPKA (Wrocław)

EIN GEWISSES RANDPROBLEM AUS DER THEORIE DER WÄRMELEITFÄHIGKEIT

Das durch die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial u(X,\tau)}{\partial \tau} = a\Delta u(X,\tau), \qquad a > 1$$

und die weiter definierten Nebenbedingungen gegebene nichtstationäre Temperaturfeld soll in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet behandelt und gesucht werden. Der Punkt (X, τ) gehört im allgemeinen einem $(m+1)$-dimensionalen Gebiet D an, das von der Ebene S_0 und zwei walzenförmigen Oberflächen σ_1 und σ_2, die vorausgesetzt durch Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehen sind, abgegrenzt ist (Abb. 1).

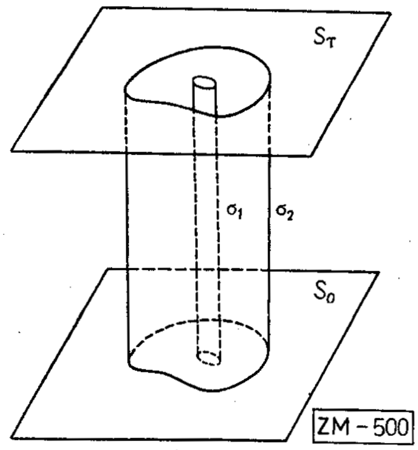

Abb. 1

Die Anfangs- und Randbedingungen sind

$$\text{(II)} \qquad u(X,0) = f(X), \qquad X \in S_0,$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} u(X,\tau) &= \varphi(X,\tau), &\quad (X,\tau)\in\sigma_1,\\ \frac{\partial u(X,\tau)}{\partial n} &= 0, &\quad (X,\tau)\in\sigma_2, \end{aligned}$$

wo $\partial/\partial n$ die Ableitung nach der ins Innere des Gebietes gerichteten Normalen bedeutet.

Dieses Problem entstand im Zusammenhang mit einem neuen Kristallisationsverfahren, das zum Ziele hat, dem erstarrten Körper bedeutend bessere Festigkeitseigenschaften zu erteilen als dies bei den bisherigen konventionellen Kristallisationsprozessen möglich war.

1. Bezeichnet man mit D_T ein Gebiet, das von den Ebenen S_0, S_T und den beiden Oberflächen σ_1 und σ_2 abgegrenzt ist, so lässt sich folgender Satz aussprechen:

Die Gleichung (I) *mit den Bedingungen* (II) *und* (III) *ist im Gebiete D_T durch Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, die ausserhalb in $D_T+\sigma_1$ stetig sind und in $D_T+\sigma_2$ eine stetige Ableitung haben, eindeutig lösbar.*

In der Tat, bezeichnet man mit A den Operator

$$A[u] = a\Delta u - \frac{\partial u}{\partial \tau} \tag{1.1}$$

und mit A^* den zu A adjungierten Operator, dann ergibt sich bei Anwendung der Greenschen Formel folgende Beziehung:

$$\iint\limits_{D_T} \cdots \int \{u_2 A[u_1] - u_1 A[u_2]\} dV + \int\limits_{\sigma_1+\sigma_2} \cdots \int \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) d\sigma + \tag{1.2}$$
$$+ \int\limits_{S_T} \cdots \int u_1 u_2 ds - \int\limits_{S_0} \cdots \int u_1 u_2 ds = 0.$$

Wird jetzt $u_1 = u^2$, wo $A[u] = 0$ und $u_2 = 1$, gesetzt und berücksichtigt, daß

$$A[u^2] = 2uA[u] + 2a \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial X_i}\right)^2 = 2a \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial X_i}\right)^2$$

ist, so erhält man aus (1.2)

$$\iint\limits_{D_T} \cdots \int a \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial X_i}\right)^2 dV + \int\limits_{\sigma_1+\sigma_2} \cdots \int u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \tfrac{1}{2} \int\limits_{S_T} \cdots \int u^2 ds = \tfrac{1}{2} \int\limits_{S_0} \cdots \int u^2 ds.$$

Genügt die Funktion $u(X, \tau)$ noch den Bedingungen (II) mit $f(X) = 0$ und (III) mit $\varphi(X, \tau) = 0$, so ergibt sich endgültig

$$\iint\limits_{D_T} \cdots \int a \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial X_i}\right)^2 dV + \tfrac{1}{2} \int\limits_{S_T} \cdots \int u^2 ds = 0.$$

Da aber T beliebig angenommen werden kann, ist dies nur möglich, wenn $u \equiv 0$ ist, woraus schon die Eindeutigkeit der Lösung folgt.

Setzt man jetzt wie auch später $\varphi(X, \tau) = 0$ und versucht die Gleichung (I) durch den Ansatz

$$u(X, \tau) = t(\tau) v(X)$$

zu befriedigen, so ergibt sich sofort

$$t(\tau) = e^{-ak^2\tau} \tag{1.3}$$

und

$$\Delta v(X) + k^2 v(X) = 0, \quad X \in S_r, \tag{1.4}$$

wo $v(X)$ gemäß den Bedingungen (III) folgende homogene Randbedingungen erfüllen muß:

$$\begin{aligned} v(X) &= 0, \qquad X \in S_\tau \sigma_1, \\ \frac{\partial v(X)}{\partial n} &= 0, \qquad X \in S_\tau \sigma_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Sind $v_1(X)$ und $v_2(X)$ zwei beliebige den Bedingungen (1.5) genügende Lösungen der Gleichung (1.4), die sogenannten Eigenfunktionen, so ergibt sich mit Hilfe der Greenschen Formel

$$\iint\limits_{S_\tau} \cdots \int \{v_1 \Delta v_2 - v_2 \Delta v_1\} ds = \int\limits_{S_\tau(\sigma_1+\sigma_2)} \cdots \int \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} - V_2 \frac{\partial v_1}{\partial n}\right) dl = 0.$$

Hieraus folgt:

Die Eigenfunktionen $v_n(X)$ *der Gleichung* (1.4) *mit den Randwertbedingungen* (1.5) *bilden eine vollständige, orthogonale Funktionenfolge.*

2. Nun wird die Gleichung (I) mit den Anfangsbedingungen (II) und Randbedingungen (III) in zwei, vom praktischen Standpunkt aus gesehen wichtigen Fällen, nämlich in den Gebieten einer hohlen Kugel und einen hohlen Zylinder gelöst.

(a) Führt man im Falle der hohlen Kugel die Polarkoordinaten ein, so geht die Gleichung (I) wegen der Kugelsymmetrie des Temperaturfeldes über in

$$\frac{\partial u(r,\tau)}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 u(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u(r,\tau)}{\partial \tau}\right), \quad \tau > 0,\ R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \tag{2.1}$$

wo mit R_1 und R_2 die Radien des hohlen Raumes und der Kugel bezeichnet wurden.

Die Anfangs- und Randbedingungen lauten jetzt:

$$u(r, 0) = f(r), \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \tag{2.2}$$

$$u(R_1, \tau) = 0, \quad \frac{\partial u(R_2, \tau)}{\partial r} = 0, \quad \tau > 0. \tag{2.3}$$

Nach Abschnitt 1 ist die partikuläre Lösung der Gleichung durch den Ausdruck

$$u(r, \tau) = e^{-ak^2\tau}\left[A\frac{\sin kr}{r} + B\frac{\cos kr}{r}\right] \tag{2.4}$$

gegeben, wo A und B geeignete Konstanten sind. Gemäss den Randbedingungen (2.3) gilt:

$$\begin{gathered} A\frac{\sin kR_1}{R_1} + B\frac{\cos kR_1}{R_1} = 0, \\ k\left(A\frac{\cos kR_2}{R_2} - B\frac{\sin kR_2}{R_2}\right) - \left(B\frac{\cos kR_2}{R_2^2} + A\frac{\sin kR_2}{R_2^2}\right) = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Für die nichttrivialen Lösungen dieser Gleichungen muß die Determinante gleich Null sein.

Mit Hilfe einfacher Umwandlungen ergibt sich hieraus

$$\operatorname{tg}\mu(l-1) = \mu l, \tag{2.6}$$

wo zur Abkürzung $l = R_2/R_1$ und $\mu = kR_1$ gesetzt wurde.

Die Gleichung (2.6) hat unendlich viele Lösungen μ_n, von denen die ersten zehn positiven für verschiedene Werte von l aus der Tafel 1 zu entnehmen sind.

TAFEL 1

l	1,2	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
μ_1	7,2844	2,6483	1,1655	0,7018	0,4837	0,3599	0,2815	0,1898
μ_2	23,3838	9,2813	4,6042	3,0547	2,2837	1,8227	1,5163	1,1344
μ_3	39,1635	15,6226	7,7898	5,1846	3,8841	3,1048	2,5858	1,9377
μ_4	54,9019	21,9303	10,9499	7,2938	5,4673	4,3721	3,6423	2,7306
μ_5	70,6268	28,2271	14,1017	9,3964	7,0449	5,6346	4,6946	3,5201
μ_6	86,3455	34,5188	17,2497	11,4959	8,6200	6,8949	5,7450	4,3080
μ_7	102,0609	40,8080	20,3958	13,5939	10,1938	8,1541	6,7945	5,0952
μ_8	117,7743	47,0955	23,5407	15,6909	11,7668	9,4126	7,8433	5,8819
μ_9	133,4864	53,3820	26,6848	17,7873	13,3392	10,6707	8,8918	6,6683
μ_{10}	149,1977	56,6679	29,8283	19,8833	14,9113	11,9284	9,9399	7,4545

Nach (2.4) und (2.6) können die partikulären Lösungen, die die Radbedingungen (2.3) erfüllen, in folgender Gestalt dargestellt werden:

$$u_n(r, \tau) = e^{-a\left(\frac{\mu_n}{R_1}\right)^2\tau}\frac{C_n}{r}\left(\mu_n l\cos\mu_n\left(\frac{r}{R_1}-l\right) + \sin\mu_n\left(\frac{r}{R_1}-l\right)\right), \tag{2.7}$$

wo C_n vorläufig beliebige Konstanten sind. Dies bedeutet, daß

$$(2.8) \quad u(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\left(\frac{\mu_n}{R_1}\right)^2\tau} \frac{C_n}{r}\left(\mu_n l \cos\mu_n\left(\frac{r}{R_1}-l\right)+\sin\mu_n\left(\frac{r}{R_1}-l\right)\right)$$

die allgemeine Lösung ist.

Die Koeffizienten C_n können aus der Anfangsbedingung (2.2) bestimmt werden. Zu diesem Zwecke wird vorausgesetzt, daß $f(r)$ eine stetige, mit stückweise stetiger erster Ableitung versehene und den Randbedingungen (2.3) genügende Funktion ist. Dann gilt nach Abschnitt 1 die Reihenentwicklung

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r}\left(\mu_n l \cos\left(\frac{r}{R_1}-l\right)+\sin\left(\frac{r}{R_1}-l\right)\right),$$

woraus man unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\frac{1}{r}\left(\mu_n l \cos\left(\frac{r}{R_1}-l\right)+\sin\mu_n\left(\frac{r}{R_1}-l\right)\right)$$

mit dem Gewicht r^2 und der Bedingungsgleichung (2.6) zum folgenden Ausdruck für den n-ten Koeffizienten C_n gelangt:

$$(2.10) \qquad C_n = \frac{2\int\limits_{R_1}^{R_2} r f(r)\left(\mu_n l \cos\mu_n\left(\frac{r}{R_1}-l\right)+\sin\mu_n\left(\frac{r}{R_1}-l\right)\right)dr}{R_1\left[(l-1)(\mu_n^2 l^2-1)-\left(\frac{1}{\mu_n^2 l^2}+l\right)\sin^2\mu(l-1)\right]}.$$

Für einen praktischen Fall soll $f(r) = t_0 = \text{const}$ im ganzen Bereich $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ gesetzt werden. Dann wird

$$(2.11) \qquad C_n = \frac{2t_0 R_2\left(1+\frac{1}{\mu_n^2 l^2}\right)\sin\mu_n(l-1)}{\left[(l-1)(\mu_n^2 l^2-1)-\left(\frac{1}{\mu_n^2 l^2}+l^2\right)\sin^2\mu_n(l-1)\right]},$$

womit die Darstellung der Konstanten t_0 durch die absolut und gleichmässig konvergente Reihe (2.9) nur auf innere Punkte des Bereiches (R_1, R_2) beschränkt werden muss.

(b) Durch Einführung von Zylinderkoordinaten im Falle des unendlich langen Rohres erhält man für eine zylindersymmetrische Anordnung des Temperaturfeldes die Gleichung

$$(2.12) \quad \frac{\partial u(r,\tau)}{\partial\tau} = a\left(\frac{\partial^2 u(r,\tau)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\tau)}{\partial r}\right), \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2,$$

wo R_1 und R_2 die Radien des inneren und äußeren Rohrdurchmessers sind.

Die Anfangs- und Randbedingungen sind durch (2.2) und (2.3) gegeben. Für die Lösung der Gleichung (2.12) kann folgender Ausdruck angenommen werden:

$$u(r, \tau) = e^{-ak^2\tau}[AJ_0(kr)+BN_0(kr)], \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2. \tag{2.13}$$

Hier stellen J_0 und N_0 die Besselsche und Neumansche Funktion nullter Ordnung dar.

Die Randbedingungen (2.3) verlangen, daß

$$AJ_0(kR_1)+BN_0(kR_1) = 0, \qquad AJ_1(kR_2)+BN_1(kR_2) = 0 \tag{2.14}$$

sei.

Wie im Falle (a) muss die Determinante gleich Null sein:

$$J_0(kR_1)N_1(kR_2)-J_1(kR_2)N_0(kR_1) = 0.$$

Bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie im Fall (a) nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$J_0(\mu)N_1(\mu l)-J_1(\mu l)N_0(\mu) = 0. \tag{2.15}$$

Sind μ_n die Wurzeln der Gleichung (2.15), dann erhält man nach (2.15) und (2.14) für die die Randbedingungen (2.3) erfüllenden partikulären Lösungen der Gleichung (2.12) folgende Beziehung:

$$u_n(r, \tau) = e^{-a(\mu_n/R_1)^2\tau}C_n\left[N_1(\mu_n l)J_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)-J_1(\mu_n l)N_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)\right]. \tag{2.16}$$

Um die Koeffizienten C_n zu bestimmen, bildet man die allgemeine Lösung:

$$u(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a(\mu_n/R_1)^2\tau}C_n\left[N_1(\mu_n l)J_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)-J_1(\mu_n l)N_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)\right] \tag{2.17}$$

und setzt

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[N_1(\mu_n l)J_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)-J_1(\mu_n l)N_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)\right], \tag{2.18}$$

wo über $f(r)$ dieselben Voraussetzungen gemacht werden wie im Falle (a).

Bei Berücksichtigung der Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\left[N_1(\mu_n l)J_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)-J_1(\mu_n l)N_0\left(\frac{\mu_n}{R_1}r\right)\right]$$

mit dem Gewicht r und der Beziehung (2.15) findet man

$$(2.19) \qquad C_n = \frac{\pi^2 \mu_n^2 J_0(\mu_n) \int\limits_{R_1}^{R_2} r f(r) \left[N_1(\mu_n l) J_0\left(\frac{\mu_n}{R_1} r\right) - J_1(\mu_n l) N_0\left(\frac{\mu_n}{R_1} r\right)\right]}{2R_1^2 [J_0^2(u_n) - J_1^2(\mu_n l)]}.$$

Abstrahiert man wieder einmal von der Möglichkeit der Darstellung einer beliebigen Funktion durch die unendliche Reihe (2.18) und behandelt den praktischen Fall $f(r) = t_0 = \text{const}$ für $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, dann ergibt sich aus (2.19)

$$(2.20) \qquad C_n = \frac{\pi \mu_n t_0 J_0(\mu_n) J_1(\mu_n l)}{2[J_1^2(\mu_n l) - J_0^2(\mu_n)]}$$

mit einem beschränkten Konvergenzbereich der Reihe (2.18) zur Konstanten t_0, wie im Falle (a).

3. Zum Abschluß soll noch dasselbe Problem für einen Kristallisationsprozess formuliert und behandelt werden. Von den beiden vorher besprochenden Fällen soll der zweite, nämlich das Gebiet eines Rohres, in Betracht genommen werden. Der spezifischen Randbedingungen wegen wird die Erstarrung von Seiten der inneren Wand des Rohres erzwungen, so daß man in einer rechtsseitigen Umgebung dieser Wand mit einer festen Phase kristallisierten Körpers zu tun hat, während der äußere Teil des Körpers noch flüssig ist. Nimmt man zur Vereinfachung dieser Aufgabe an, daß die Temperatur der flüssigen Phase konstant und gleich der Erstarrungstemperatur des Körpers ist, also

$$(3.1) \qquad u_2(r, \tau) = t_k = \text{const},$$

und bezeichnet mit $u_1(r, \tau)$ die Temperaturleitfähigkeit in der festen Phase, mit ξ die Grenze zwischen der festen und flüssigen Phase, d.h. die nullte Isotherme, so kann das obige Problem mathematisch folgenderweise ausgedrückt werden:

$$(3.2) \qquad \frac{\partial u_1(r, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial u_1(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1(r, \tau)}{\partial r} \right), \qquad R_1 \leqslant r \leqslant \xi,$$

$$(3.3) \qquad u_1(R_1, \tau) = 0, \qquad u_1(\xi, \tau) = t_k,$$

$$(3.4) \qquad \frac{\partial u_2(R_2, \tau)}{\partial r} = 0,$$

$$(3.5) \qquad k_1 \frac{\partial u_1(\xi, \tau)}{\partial r} = \varrho \lambda \frac{d\xi}{dt},$$

wo k_1, ϱ und λ entsprechende Konstanten sind.

Nach (3.1) ist (3.4) selbstverständlich erfüllt. Die die Bedingungen (3.3) erfüllende Lösung der Gleichung (3.2) im stationären Zustand ist

$$u_1(r, \tau) = t_k \frac{\ln \dfrac{r}{R_1}}{\ln \dfrac{\xi}{R_2}}, \qquad R_1 \leqslant r \leqslant \xi. \tag{3.6}$$

Um noch die nichtlineare Bedingung (3.5) zu erfüllen, hat man (3.6) in (3.5) zu setzen. Dann erhält man

$$\frac{k_1 t_k}{\varrho\lambda} \cdot \frac{1}{\xi \ln \dfrac{\xi}{R_1}} = \frac{d\xi}{dt},$$

und durch Integration dieser Gleichung im Intervall (R_1, ξ)

$$\frac{\xi^2}{2} \ln \frac{\xi}{R_1} + \frac{1}{4}(R_1^2 - \xi^2) = \frac{k_1 t_k}{\varrho\lambda} \tau. \tag{3.7}$$

Die Gleichung (3.7) bestimmt das Anwachsen der festen Phase. Nach ihr erstarrt der ganze Körper (wenn $\xi = R_2$) in der Zeit:

$$\tau_{\max} = \frac{\varrho\lambda}{k_1 t_k} \left[\frac{R_2^2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{4}(R_2^2 - R_1^2) \right]. \tag{3.8}$$

Die weitere Abkühlung der festen Phase bis zur vollständigen Erstarrung erfolgt gemäss den Betrachtungen im Abschnitt 2 nach (2.17), wo in (2.19) an Stelle $f(r)$, (3.6) zu setzen ist.

Ich danke Herrn Dr. A. Rybarski für seine Interesse an dieser Arbeit, sowie für seine Hilfe in der endgültigen Abfassung der Arbeit.

Literaturverzeichnis

[1] R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik* I, Berlin 1931.

[2] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Москва-Ленинград 1951.

[3] E. Jahnke und F. Emde, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, Leipzig-Berlin 1928.

Eingegangen am 20. 4. 1965

J. KUPKA (Wrocław)

O PEWNYM ZAGADNIENIU BRZEGOWYM Z TEORII PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

STRESZCZENIE

W pracy zostało rozpatrzone następujące zagadnienie związane z teorią przewodnictwa cieplnego: szukane jest pole temperaturowe w obszarze dwuspójnym D (patrz rys. 1), określone przez równanie przewodnictwa cieplnego (I) przy warunku początkowym (II) i warunkach brzegowych (III). Symbol $\partial/\partial n$ we wzorze (III) oznacza pochodną normalną w kierunku do wnętrza obszaru D.

Zagadnienie to powstało w związku z nowym sposobem zestalania i chłodzenia odlewów z metali i niemetali. Sposób ten pozwala uzyskać lepsze właściwości wytrzymałościowe odlewów niż przy obecnych konwencjonalnych metodach.

W pewnej klasie funkcji w obszarze D, ciągłych w obszarze $D+\sigma_1$ i o ciągłej pochodnej w obszarze $D+\sigma_2$, wyżej sformułowane zagadnienie jest jednoznacznie rozwiązalne.

Rozwiązanie równania (I) otrzymuje się w postaci

$$u(X,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ak_n^2\tau}v_n(X),$$

gdzie $v_n(X)$ tworzą ortogonalny i zupełny ciąg funkcji, będących rozwiązaniami równania (1.4) przy jednorodnych warunkach brzegowych (1.5).

Dla obszaru wydrążonej kuli 3-wymiarowej o stosunku promieni $l = R_2/R_1$ (R_2 — promień zewnętrzny, R_1 — promień wewnętrzny) otrzymano dla rozkładu temperatury zależność (2.8), gdzie współczynniki C_n oblicza się za pomocą danej funkcji początkowego rozkładu temperatury $f(r)$ ze wzoru (2.10), a liczby μ_n są pierwiastkami równania (2.6).

W przypadku obszaru nieskończenie długiej rury o stosunku promieni $l = R_2/R_1$ (R_2 — promień zewnętrzny, R_1 — promień wewnętrzny) pole temperaturowe wyraża się wzorem (2.17), gdzie współczynniki C_n oblicza się ze wzoru (2.19), a liczby μ_n są pierwiastkami równania (2.15).

Na zakończenie pracy sformułowano to zagadnienie dla procesu krystalizacji rury i określono równanie dla przesuwającej się fazy stałej.

Й. КУПКА (Вроцлав)

О НЕКОТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

РЕЗЮМЕ

В статье разрешена проблема связанная с теорией теплопроводности: искается температурное поле в двусвязной области D (смотри кар. 1), определенное уравнением теплопроводности (I) при начальном условии (II) и краевых условиях (III). Символ $\partial/\partial n$ в условии (III) представляет нормальную производную в направлении внутрь области D.

Этот вопрос возникнул в связи с новым методом свёртывания и охлаждания отливок из металлов и неметаллов. Этот метод позваляет получить крепестные свойства отливок лучшие чем при конвеиционалъных методах.

Поставлена проблема решается однозначно в некотором классе функций. Решение уравнения (I) имеет вид

$$u(X, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ak_n^2\tau} v_n(X).$$

$v_n(X)$ составляют ортогональную и полную последовательность функций, будущих решенями уравнения (1.4) при однородных краевых условиях (1.5).

Как пример рассмотрено случай температурного распределения для области полого шара и полого цилиндра.

Для полого шара получено решение (2.8) где коэффициенты C_n учитывая функцию начального распределения температуры $f(r)$ вычисляются по формуле (2.10), а числа μ_n являются корнями уравнения (2.6).

Те же формулы для полого цилиндра получаются в виде (2.17), где коэффициенты C_n вычисляются по формуле (2.19), а числа μ_n являются корнями уравнения (2.15).

J. KUPKA (Wrocław)

ON A BOUNDARY PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY THEORY

SUMMARY

In this paper the following problem of the theory of heat conductivity is discussed: a temperature field is sought, which is defined by heat conductivity equation (I) in a double-connected region D (see Fig. 1) assuming the initial condition (II) and the boundary conditions (III). $\partial/\partial n$ in (III) stands for the normal derivative, directed into the region D.

This problem arises in connection with a new method of crystalisation and cooling of metalic and immetalic casts. These methods enable to receive better endurance properties of casts than by the conventional methods.

The above problem has a unique solution in a certain class of functions.

The solution of equation (I) has the form

$$u(X, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ak_n^2\tau} v_n(X),$$

where $v_n(X)$ form an orthogonal and complete system of functions, which are the solutions of equation (1.4) assuming the homogeneous boundary conditions (1.5).

Examples of a hollow sphere and of a hollow cylinder are considered. For a hollow sphere we get the solution (2.8), where the coefficients C_n are of the form (2.10) assuming the initial temperature distribution and μ_n are roots of the equation (2.6).

The similar solution for the hollow cylinder is given by (2.17) where (2.19) gives an explicit form of the coefficients C_n and where μ_n are roots of equation (2.15).
