ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVIII (1973)

Sur l'existence de la fonction de Green pour un problème aux limites relatif à une équation différentielle à argument fonctionnel

ANNA SOBOLEWSKA (Rzeszów)

Résumé. Dans ce travail nous étudions le problème aux limites suivant:

(1) $$y''(t) = f(t)\cdot y(\delta(t)), \quad t_0 < \delta(t) < t, \quad t \in [t_0, T],$$

(2) $$U_1(y, y') = \sum_{\nu=0}^{1} [a_{1\nu} y^{(\nu)}(t_0) + \beta_{1\nu} y^{(\nu)}(T)] = 0,$$
$$U_2(y, y') = \sum_{\nu=0}^{1} [a_{2\nu} y^{(\nu)}(t_0) + \beta_{2\nu} y^{(\nu)}(T)] = 0.$$

Pour le problème (1), (2) nous démontrons l'existence de la fonction de Green. Pour la démonstration nous remplaçons le problème (1), (2) par le problème équivalent suivant:

(3') $$y_0'(t) = y_1(t), \qquad y_1'(t) = f(t)\cdot y_0(\delta(t)),$$

(4') $$y_0(t_0) = k_0, \quad y_1(t_0) = k_1$$

et nous choisissons un point quelconque $\xi \in (t_0, T)$. Nous construisons ensuite les lignes brisées d'Euler, convenablement modifiées, ($L_{0n}(t, \xi)$ et $L_{1n}(t, \xi)$) et nous montrons que pour tout n suffisamment grand il existe un système de conditions initiales $k_0 = k_0(\xi)$, $k_1 = k_1(\xi)$ tel que les lignes brisées $\bar{L}_{0n}(t, \xi)$ et $\bar{L}_{1n}(t, \xi)$ qui leur correspondent satisfont aux conditions (2).

La fonction $\Gamma(t, \xi)$ est ensuite définie comme la limite de la fonction $\bar{L}_{0n}(t, \xi)$ si $n \to +\infty$.

La fonction $\Gamma(t, \xi)$ satisfait à la condition $y(t) = \int_{t_0}^{T} y(\xi)\cdot\Gamma(t, \xi)\,d\xi$.

Dans ce travail nous étudions le problème aux limites suivant:

(1) $$y''(t) = f(t)\cdot y(\delta(t)),$$

(2) $$U_1(y, y') = \sum_{\nu=0}^{1} [a_{1\nu} y^{(\nu)}(t_0) + \beta_{1\nu} y^{(\nu)}(T)] = 0,$$
$$U_2(y, y') = \sum_{\nu=0}^{1} [a_{2\nu} y^{(\nu)}(t_0) + \beta_{2\nu} y^{(\nu)}(T)] = 0.$$

Pour le problème (1), (2) nous admettons les hypothèses suivantes:

1° la fonction $f(t)$ est continue dans l'intervalle $[t_0, T]$,

2° $\delta(t)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[t_0, T]$ et elle satisfait aux conditions: $\delta(t_0) = t_0$, $t_0 \leqslant \delta(t) \leqslant t$ pour $t \epsilon (t_0, T]$,

3° la solution unique du problème (1), (2) est la solution triviale.

En nous appuyant sur les hypothèses 1°, 2°, 3° nous allons démontrer l'existence de la fonction de Green pour le problème (1), (2), la démonstration ayant un caractère effectif.

Dans ce but considérons le problème initial de Cauchy suivant:

$$y''(t) = f(t)\cdot y\big(\delta(t)\big), \tag{3}$$

$$y(t_0) = k_0, \quad y'(t_0) = k_1 \tag{4}$$

(k_0 et k_1 étant pour le moment des nombres arbitrairement fixés).

Le problème (3), (4) peut être remplacé par le système équivalent d'équations différentielles du premier ordre:

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= y_1(t), \\ y_1'(t) &= f(t)\cdot y_0\big(\delta(t)\big) \end{aligned} \tag{3'}$$

avec les conditions initiales

$$y_0(t_0) = k_0, \quad y_1(t_0) = k_1. \tag{4'}$$

Choisissons un point quelconque $\xi \epsilon (t_0, T)$ et divisons chacun des intervalles $[t_0, \xi]$, $[\xi, T]$ en n parties égales par les points $t_1, t_2, \ldots, t_{2n-1}$ tels que

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \xi < t_{n+1} < \ldots < t_{2n-1} < t_{2n} = T. \tag{5}$$

Construisons ensuite les lignes brisées $L_{0n}(t, \xi)$ (contenue dans le plan (t, y_0)) et $L_{1n}(t, \xi)$ (contenue dans le plan (t, y_1)). Les ordonnées des sommets consécutifs de ces lignes brisées seront données par les formules:

$$\begin{aligned} & y_{0,0}(\xi) = k_0, \\ & y_{0i}(\xi) = \begin{cases} y_{0,i-1}(\xi) + \dfrac{\xi - t_0}{n} y_{1,i-1}(\xi) & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n, \\ y_{0,i-1}(\xi) + \dfrac{T-\xi}{n} y_{1,i-1}(\xi) & \text{pour } i = n+1, \ldots, 2n, \end{cases} \\ & y_{1,0}(\xi) = k_1, \\ & y_{1i}(\xi) = \begin{cases} y_{1,i-1}(\xi) + \dfrac{\xi - t_0}{n} f(t_{i-1}) L_{0n}\big(\delta(t_{i-1}), \xi\big) & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n, \\ y_{1,i-1}(\xi) + \dfrac{T-\xi}{n} f(t_{i-1}) L_{0n}\big(\delta(t_{i-1}), \xi\big) & \text{pour } i = n+1, \ldots, 2n. \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

Nous allons montrer par récurrence que les ordonnées y_{0l}, y_1 ($l = 0, 1, \ldots, 2n$) satisfont aux relations:

$$y_{0l}(\xi) = a_{0l}^0(\xi)k_0 + a_{0l}^1(\xi)k_1, \quad y_{1l}(\xi) = a_{1l}^0(\xi)k_0 + a_{1l}^1(\xi)k_1, \tag{7}$$

où les coefficients de k_0 et k_1 ne dépendent que des fonctions $f(t)$ et $\delta(t)$ ainsi que des points du réseau (5).

Pour $l = 0$ les formules (7) ont bien lieu. Supposons-les vraies pour $i \leqslant l-1$. Alors

$$y_{0l}(\xi) = y_{0,l-1}(\xi) + \frac{\xi - t_0}{n} y_{1,l-1}(\xi) = \sum_{j=0}^{1} \left(a_{0,l-1}^j(\xi) + \frac{\xi - t_0}{n} a_{1,l-1}^j(\xi)\right)k_j,$$

$$y_{1l}(\xi) = y_{1,l-1}(\xi) + \frac{\xi - t_0}{n} f(t_{l-1})\cdot L_{0n}\big(\delta(t_{l-1}), \xi\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{1} \left[a_{1,l-1}^j(\xi) + \frac{\xi - t_0}{n} f(t_{l-1})\big(\gamma\cdot a_{0,p-1}^j(\xi) + (1-\gamma)a_{0,p}^j(\xi)\big)\right] k_j,$$

si $\delta(t_{l-1}) \in [t_{p-1}, t_p)$, $l \leqslant n$, avec $\gamma = \dfrac{t_p - \delta(t_{l-1})}{t_p - t_{p-1}}$.

D'une façon analogue on peut montrer que les relations (7) sont vraies pour $l > n$.

On construit ensuite les lignes brisées $\bar{L}_{0n}(t, \xi)$ (contenue dans le plan (t, y_0)) et $\bar{L}_{1n}(t, \xi)$ (contenue dans le plan (t, y_1)), en profitant encore des points du réseau (5). Les ordonnées des sommets consécutifs de ces lignes brisées seront déterminées par les relations:

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}_{0i}(\xi) = y_{0i}(\xi) \quad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, n-1,\\
&\bar{y}_{0i}(\xi) = \bar{y}_{0,i-1}(\xi) + \frac{T-\xi}{n}\bar{y}_{1,i-1}(\xi) \quad \text{pour } i = n, \ldots, 2n,\\
&\bar{y}_{1i}(\xi) = y_{1i}(\xi) \quad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, n-1,\\
&\bar{y}_{1n}(\xi) = y_{1n}(\xi) + 1,\\
&\bar{y}_{1i}(\xi) = \bar{y}_{1,i-1}(\xi) + \frac{T-\xi}{n} f(t_{i-1})\bar{L}_{0n}\big(\delta(t_{i-1}), \xi\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } i = n+1, \ldots, 2n.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

De même que dans le cas des relations (7) on peut montrer que

(9) $\bar{y}_{0l}(\xi) = y_{0l}(\xi)+b_{0l}(\xi), \quad \bar{y}_{1l}(\xi) = y_{1l}(\xi)+b_{1l}(\xi) \quad (l = 0, 1, \ldots, 2n),$

où les nombres $b_{0l}(\xi)$ et $b_{1l}(\xi)$ dépendent uniquement des fonctions $f(t)$ et $\delta(t)$ ainsi que des points du réseau (5).

Des relations (7) et (9) il résulte, en particulier, que

$$(10)\qquad \begin{aligned} y_{0,2n}(\xi) &= a^0_{0,2n}(\xi)k_0+a^1_{0,2n}(\xi)k_1;\\ y_{1,2n}(\xi) &= a^0_{1,2n}(\xi)k_0+a^1_{1,2n}(\xi)k_1;\\ \bar{y}_{0,2n}(\xi) &= a^0_{0,2n}(\xi)k_0+a^1_{0,2n}(\xi)k_1+b_{0,2n}(\xi);\\ \bar{y}_{1,2n}(\xi) &= a^0_{1,2n}(\xi)k_0+a^1_{1,2n}(\xi)k_1+b_{1,2n}(\xi). \end{aligned}$$

Désignons par $L^{\mathrm{I}}_{0n}(t, \xi)$, $L^{\mathrm{I}}_{1n}(t, \xi)$ et $L^{\mathrm{II}}_{0n}(t, \xi)$, $L^{\mathrm{II}}_{1n}(t, \xi)$ les lignes brisées, définies précédemment (voir (6)), liées respectivement aux systèmes de conditions initiales $(k_0, k_1) = (1, 0)$ et $(k_0, k_1) = (0, 1)$, et désignons par $L^{\mathrm{III}}_{0n}(t, \xi)$, $L^{\mathrm{III}}_{1n}(t, \xi)$ les lignes brisées définies par les conditions (8) et correspondant aux conditions initiales $(k_0, k_1) = (0, 0)$. Les coefficients dans les relations (10) satisfont aux conditions

$$(11)\qquad \begin{aligned} &a^0_{0,2n}(\xi) = L^{\mathrm{I}}_{0n}(T, \xi), \quad a^0_{1,2n}(\xi) = L^{\mathrm{I}}_{1n}(T, \xi), \quad b_{0,2n}(\xi) = \bar{L}^{\mathrm{III}}(T, \xi),\\ &a^1_{1,2n}(\xi) = L^{\mathrm{II}}_{0n}(T, \xi), \quad a^1_{1,2n}(\xi) = L^{\mathrm{II}}_{1n}(T, \xi), \quad b_{1,2n}(\xi) = \bar{L}^{\mathrm{III}}_{1n}(T, \xi). \end{aligned}$$

De plus, les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution du problème initial de Cauchy pour les équations différentielles à argument retardé [2], [3] impliquent l'existence des limites $\lim\limits_{n\to\infty} b_{0,2n}(\xi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_{1,2n}(\xi)$, ainsi que des limites:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} a^0_{0,2n}(\xi) = y^{\mathrm{I}}_0(T), \qquad \lim_{n\to\infty} a^0_{1,2n}(\xi) = y^{\mathrm{I}}_1(T),\\ &\lim_{n\to\infty} a^1_{0,2n}(\xi) = y^{\mathrm{II}}_0(T), \quad\ \lim_{n\to\infty} a^1_{1,2n}(\xi) = y^{\mathrm{II}}_1(T), \end{aligned}$$

où $\{y^{\mathrm{I}}_0(t), y^{\mathrm{I}}_1(t)\}$, $\{y^{\mathrm{II}}_0(t), y^{\mathrm{II}}_1(t)\}$ désignent les solutions du problème (3'), (4') qui correspondent respectivement aux systèmes de conditions initiales $\{1, 0\}$ et $\{0, 1\}$.

Nous allons montrer que pour tout n suffisamment grand il existe exactement un système de conditions initiales $\{k_{0n}, k_{1n}\}$ tel que les lignes brisées $\bar{L}_{0n}(t, \xi)$ et $\bar{L}_{1n}(t, \xi)$ qui leur correspondent satisfont aux conditions:

$$(13)\qquad U_1\big(\bar{L}_{0n}(t, \xi), \bar{L}_{1n}(t, \xi)\big) = 0, \qquad U_2\big(\bar{L}_{0n}(t, \xi), \bar{L}_{1n}(t, \xi)\big) = 0.$$

Les fonctions U_1 et U_2 étant linéaires (v. (2)), on peut, en tenant compte des relations (9) et (10), mettre les conditions (13) sous la forme

$$(13')\qquad \begin{aligned} U_1\big(L_{0n}(t, \xi), L_{1n}(t, \xi)\big) &= A^0_{1n}(\xi)k_0+A^1_{1n}(\xi)k_1 = B_{1n}(\xi),\\ U_2\big(L_{0n}(t, \xi), L_{1n}(t, \xi)\big) &= A^0_{2n}(\xi)k_0+A^1_{2n}(\xi)k_1 = B_{2n}(\xi). \end{aligned}$$

Les coefficients dans les relations (13') dépendent continûment des coefficients qui figurent dans les formules (10); de plus, les remarques précédentes avec les conditions (12) entrainent l'existence des limites finies

$$(14)\qquad \lim_{n\to\infty}\det\begin{bmatrix}A_{1n}^0(\xi) & A_{1n}^1(\xi)\\ A_{2n}^0(\xi) & A_{2n}^1(\xi)\end{bmatrix},\quad \lim_{n\to\infty}\det\begin{bmatrix}B_{1n}(\xi) & A_{1n}^1(\xi)\\ B_{2n}(\xi) & A_{2n}^1(\xi)\end{bmatrix},$$

$$\lim_{n\to\infty}\det\begin{bmatrix}A_{1n}^0(\xi) & B_{1n}(\xi)\\ A_{2n}^0(\xi) & B_{2n}(\xi)\end{bmatrix}.$$

La première des limites (14) satisfait, en outre, à la condition suivante:

$$(15)\qquad \lim_{n\to\infty}\det\begin{bmatrix}A_{1n}^0(\xi) & A_{1n}^1(\xi)\\ A_{2n}^0(\xi) & A_{2n}^1(\xi)\end{bmatrix}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\det\begin{bmatrix}U_1\big(L_{0n}^{\mathrm{I}}(t,\xi)L_{1n}^{\mathrm{I}}(t,\xi)\big) & U_1\big(L_{0n}^{\mathrm{II}}(t,\xi), L_{1n}^{\mathrm{II}}(t,\xi)\big)\\ U_2\big(L_{0n}^{\mathrm{I}}(t,\xi)L_{1n}^{\mathrm{I}}(t,\xi)\big) & U_2\big(L_{0n}^{\mathrm{II}}(t,\xi), L_{1n}^{\mathrm{II}}(t,\xi)\big)\end{bmatrix}$$
$$= \det\begin{bmatrix}U_1(y_0^{\mathrm{I}}, y_1^{\mathrm{I}}) & U_1(y_0^{\mathrm{II}}, y_1^{\mathrm{II}})\\ U_2(y_0^{\mathrm{I}}, y_1^{\mathrm{I}}) & U_2(y_0^{\mathrm{II}}, y_1^{\mathrm{II}})\end{bmatrix} \neq 0.$$

La condition (15) est, dans sa dernière partie, une conséquence de l'hypothèse 3°. Il en résulte pour n suffisamment grand l'existence d'un seul système de nombres $\{k_{0n}(\xi), k_{1n}(\xi)\}$ satisfaisant aux conditions (13') ainsi que l'existence des limites finies $\lim\limits_{n\to\infty} k_{0n}(\xi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_{1n}(\xi)$. Nous désignerons désormais par $\bar{L}_{0n}(t,\xi)$ et $\bar{L}_{1n}(t,\xi)$ les lignes brisées qui vérifient les conditions (13), c'est-à-dire celles qui correspondent aux systèmes de conditions initiales satisfaisant à (13').

Définissons maintenant la fonction $\Gamma(t,\xi)$ comme il suit:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \Gamma(t,\xi) &= \lim_{n\to\infty}\bar{L}_{0n}(t,\xi) \qquad \text{pour} \qquad \xi\neq t_0,\ \xi\neq T,\\ \Gamma(t,t_0) &= \lim_{\xi\to t_0}\Gamma(t,\xi),\\ \Gamma(t,T) &= \lim_{\xi\to T}\Gamma(t,\xi).\end{aligned}$$

On constate sans peine que la fonction définie par les formules (16) vérifie pour tout $\xi\in[t_0, T]$ les conditions suivantes (v. [2]):

1. La fonction $\Gamma(t,\xi)$ est continue pour tout $t\in[t_0, T]$.

2. La fonction $\Gamma_t'(t,\xi)$ est continue pour tout $t\in[t_0,T]$, sauf au point $t=\xi$, où elle admet un saut égal à 1, c'est-à-dire $\Gamma_t'(\xi+0,\xi)-\Gamma_t'(\xi-0,\xi)=1$.

3. $y=\Gamma(t,\xi)$ satisfait pour tout $t\in[t_0,T]$, excepté au point $t=\xi$, à l'équation différentielle (1).

4. $y=\Gamma(t,\xi)$ vérifie les conditions aux limites (2).

Par conséquent on peut démontrer, de même que dans le cas d'une équation différentielle sans argument dévié [1], que la solution unique du problème aux limites semi-homogène

$$y''(t) = f(t)y(\delta(t)) + g(t) \tag{17}$$

($g(t)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[t_0, T]$),

$$\begin{aligned} U_1(y, y') &= 0, \\ U_2(y, y') &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

est de la forme

$$y(t) = \int_{t_0}^{T} g(\xi)\Gamma(t, \xi)\,d\xi. \tag{19}$$

En terminant, observons que par un procédé analogue à celui qui a été utilisé plus haut, on peut construire la fonction de Green dans un cas plus général, à savoir pour l'équation différentielle de la forme

$$y^{(n)}(t) = \sum_{\nu=0}^{n-2} f_\nu(t) y^{(\nu)}\big(\delta_{(\nu)}(t)\big) + f_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) \tag{20}$$

avec les conditions aux limites

$$U_\mu(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} [\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(t_0) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(T)] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Références

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1956.

[2] А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Москва–Ленинград 1951,

[3] K. Zima, *O jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego dla równań różniczkowych z przesuniętym argumentem*, Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach, SM, 5 (1966), p. 75–81.

Reçu par la Rédaction le 13. 11. 1971