ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
IX, 3 (1968)

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

WSPÓŁCZYNNIK ZALEŻNOŚCI MONOTONICZNEJ Z PRÓBKI (I)

1. Ściśle monotoniczna stochastyczna zależność dwu zmiennych losowych. Rozpatrujemy dwuwymiarową zmienną losową (W, Z) o rozkładzie ciągłym. Zbiór wartości zmiennej losowej W oznaczamy przez A, a zbiór wartości zmiennej losowej Z oznaczamy przez B. Niech A' i B' oznaczają odpowiednio wnętrza zbiorów A i B.

Mówimy, że między W a Z istnieje ściśle rosnąca zależność stochastyczna, jeśli dla każdego $a \in A'$ i wszelkich $b_1, b_2 \in B'$ z nierówności $b_1 < b_2$ wynika, że

$$P(W<a|Z = b_1) > P(W<a|Z = b_2) \tag{1.1}$$

(czyli dla każdego $a \in A'$ warunkowa dystrybuanta $F(a|z)$ zmiennej losowej W przy $Z = z$ jest ściśle malejącą funkcją z). W intuicyjnym ujęciu oznacza to, że ze wzrostem z wzrasta szansa trafienia na dużą wartość zmiennej losowej W.

Podobnie mówimy, że między W a Z istnieje ściśle malejąca zależność stochastyczna, jeśli dla każdego $a \in A'$ warunkowa dystrybuanta $F(a|z)$ jest ściśle rosnącą funkcją z.

Definicje te wprowadzono na wzór definicji ujemnej i dodatniej zależności między W a Z, podanej w [2], str. 198.

Jeśli zachodzi stochastyczna zależność bądź ściśle rosnąca, bądź ściśle malejąca, to będziemy mówić, że między W a Z istnieje stochastyczna zależność ściśle monotoniczna.

Niezależność W i Z jest równoważna temu, że dla każdego $a \in A$ warunkowa dystrybuanta $F(a|z)$ nie zależy od z.

Klasę wszystkich ciągłych rozkładów dwuwymiarowej zmiennej losowej (W, Z) takich, że albo między W a Z istnieje stochastyczna zależność ściśle monotoniczna, albo W i Z są niezależne, będziemy oznaczać M. Klasę M możemy podzielić na klasę M^+ (gdy między W a Z istnieje stochastyczna zależność ściśle rosnąca), klasę M^- (gdy między W a Z istnieje stochastyczna zależność ściśle malejąca) i klasę M^0 (gdy W i Z są niezależne).

Klasę wszystkich rozkładów dwuwymiarowej zmiennej losowej takich, że rozkłady brzegowe są ciągłe, a zmienna losowa W jest ciągłą, ściśle monotoniczną funkcją zmiennej losowej Z, będziemy oznaczać O_M. Klasę O_M możemy podzielić na klasę O_M^+ (gdy W jest ściśle rosnącą funkcją Z) i klasę O_M^- (gdy W jest ściśle malejącą funkcją Z).

Będziemy nazywać funkcją typu F każdą ciągłą i ściśle monotoniczną funkcję rzeczywistą, przy czym ściśle rosnącą funkcję typu F będziemy nazywać funkcją typu F^+, a ściśle malejącą — funkcją typu F^-.

Jeśli rozkład zmiennej losowej (W,Z) należy do klasy M, a γ_1 i γ_2 są funkcjami typu F, to rozkład zmiennej losowej $\big(\gamma_1(W),\gamma_2(Z)\big)$ również należy do klasy M; jeśli przy tym obie funkcje są jednocześnie typu F^+ lub typu F^-, to rozkłady (W,Z) i $\big(\gamma_1(W),\gamma_2(Z)\big)$ należą jednocześnie albo do M^+, albo do M^-, albo do M^0; jeśli zaś jedna funkcja jest typu F^+, a druga typu F^-, to oba rozkłady należą bądź jednocześnie do M^0, bądź jeden z nich do M^+, a drugi do M^-. Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy γ_1 i γ_2 są typu F^+, a rozkład (W,Z) należy do M^+. Niech $X=\gamma_1(W)$, $Y=\gamma_2(Z)$. Wtedy $P(W<a\,|\,Z=z)=P\big(X<\gamma_1(a)\,|\,Y=\gamma_2(z)\big)$, a więc na podstawie (1.1) dla każdego $a\in A'$ i wszelkich $b_1, b_2\in B'$ z nierówności $\gamma_2(b_1)<\gamma_2(b_2)$ wynika, że

$$P\big(X<\gamma_1(a)\,|\,Y=\gamma_2(b_1)\big)>P\big(X<\gamma_1(a)\,|\,Y=\gamma_2(b_2)\big),$$

a więc rozkład (X, Y) należy do M^+. W pozostałych przypadkach dowód przebiega analogicznie.

Zdefiniujemy teraz klasę rozkładów N, utworzoną ze wszystkich dwuwymiarowych rozkładów normalnych oraz z rozkładów przekształconych z dwuwymiarowych rozkładów normalnych zgodnie z następującą regułą: jeśli (W,Z) ma dwuwymiarowy rozkład normalny, a funkcje γ_1 i γ_2 są typu F, to rozkład $\big(\gamma_1(W),\gamma_2(Z)\big)$ zaliczamy do klasy N.

Klasa N jest podzbiorem klasy M. Aby tego dowieść, wystarczy pokazać, że każdy dwuwymiarowy rozkład normalny jest elementem M. Rozpatrzmy dwuwymiarowy rozkład normalny $N(m_w, m_z, \sigma_w, \sigma_z, \varrho)$; jest to oczywiście rozkład ciągły; przy $\varrho=0$ zmienne losowe W i Z są niezależne, a dla $|\varrho|>0$ znak pierwszej pochodnej (względem z) dystrybuanty rozkładu warunkowego zmiennej losowej W przy $Z=z$ jest przeciwny niż znak ϱ. Stąd dwuwymiarowy rozkład normalny należy do M^+ przy $\varrho>0$, do M^- przy $\varrho<0$, do M^0 przy $\varrho=0$.

Weźmy pod uwagę dowolne dwa dwuwymiarowe rozkłady ciągłe o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych (tzn. brzegowy rozkład zmiennej losowej W jest jednakowy w obu rozkładach oraz brzegowy rozkład zmiennej losowej Z jest jednakowy w obu rozkładach). Przy pewnych dodatkowych założeniach możemy wprowadzić uporządkowanie obu rozkładów ze względu na stopień zależności stochastycznej między W a Z, tj. wskazać ten z rozkładów, w którym stochastyczna zależność między W a Z jest słabsza.

Nazwijmy jeden z tych rozkładów (dowolnie wybrany) rozkładem numer 1, a drugi — rozkładem numer 2. Niech $f_i(a|z)$ dla $a \in A'$, $z \in B'$ oznacza wartość w punkcie a gęstości warunkowej przy $Z = z$ rozkładu numer i $(i = 1, 2)$. Będziemy oznaczać przez $J_i(z_1, z_2|W, Z)$ rozdzielność dwu rozkładów warunkowych zmiennej losowej W przy $Z = z_1$ i $Z = z_2$ w rozkładzie o numerze i. Definicję rozdzielności dwóch rozkładów (a właściwie rozdzielności dwóch hipotez statystycznych, z których każda specyfikuje pewien rozkład rozpatrywanej zmiennej losowej) można znaleźć np. w [1], str. 6. Na podstawie tej definicji

$$J_i(z_1, z_2|W, Z) = \int_{A'} [f_i(a|z_1) - f_i(a|z_2)] \ln \frac{f_i(a|z_1)}{f_i(a|z_2)}\, da. \tag{1.2}$$

Rozdzielność ta jest nieujemna, równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy gęstości warunkowe są jednakowe. Zatem dla rozkładów z klasy M rozdzielność ta przybiera wartość zero wtedy i tylko wtedy, gdy W i Z są niezależne.

Będziemy mówić, że w rozkładzie numer 1 zależność między W a Z jest słabsza niż w rozkładzie numer 2, jeśli dla każdej pary $z_1, z_A \in B'$ $(z_1 \neq z_2)$ zachodzi nierówność

$$J_1(z_1, z_2|W, Z) < J_2(z_1, z_2|W, Z). \tag{1.3}$$

Jeśli stale zachodzi ostra nierówność o przeciwnym zwrocie, oznaczenia rozkładów można oczywiście zamienić. Dwa rozkłady można więc uporządkować, jeśli dla wszystkich z_1, $z_2 \in B'$ i $z_1 \neq z_2$ wyrażenie $J_1(z_1, z_2| W, Z) - J_2(z_1, z_2|W, Z)$ ma stały znak.

Jeśli $\gamma_1(W)$ i $\gamma_2(Z)$ są wzajemnie jednoznacznymi przekształceniami zmiennych losowych W i Z (a więc w szczególności, gdy γ_1 i γ_2 są funkcjami typu F), to zachodzi związek

$$J_i(z_1, z_2|W, Z) = J_i\big(\gamma_2(z_1), \gamma_2(z_2)|\gamma_1(W), \gamma_2(z)\big). \tag{1.4}$$

W [1], str. 24, pokazano bowiem, że rozdzielność hipotez jest niezmiennikiem wzajemnie jednoznacznych przekształceń. A więc zgodnie z intuicją uporządkowanie rozkładów zachowuje się przy wzajemnie jednoznacznych przekształceniach zmiennych losowych W i Z.

Nie znane są warunki konieczne i dostateczne na to, żeby uporządkowanie rozkładów ze względu na stopień zależności między W a Z było także uporządkowaniem rozkładów ze względu na stopień zależności między Z a W, tj. żeby ze spełnienia (1.3) dla wszelkich par $z_1, z_2 \in B'$; $z_1 \neq z_2$ wynikało dla każdej pary $w_1, w_2 \in A'$; $w_1 \neq w_2$

$$J_1(w_1, w_2|Z, W) < J_2(w_1, w_2|Z, W).$$

Jednym z warunków dostatecznych jest istnienie takich wzajemnie jednoznacznych przekształceń $g_1(W)$ i $g_2(Z)$, żeby gęstość rozkładu $(g_1(W), g_2(Z))$ była funkcją symetryczną ze względu na obie zmienne. Wtedy bowiem oznaczając $g_1(w_j) = g_2(z_j)$ $(j = 1, 2)$, mamy

$$J_i(w_1, w_2|Z, W) = J_i(g_1(w_1), g_1(w_2)|g_2(Z), g_1(W)) =$$
$$= J_i(g_2(z_1), g_2(z_2)|g_1(W), g_2(Z)) = J_i(z_1, z_2|W, Z).$$

Nie wiadomo również, czy przynależność obu rozkładów do klasy M jest poszukiwanym warunkiem dostatecznym.

Nazwijmy uporządkowaną klasą każdy zbiór rozkładów z klasy M takich, że dowolne dwa różne rozkłady z tego zbioru o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych można uporządkować ze względu na stopień zależności między W a Z, przy czym jest to jednocześnie uporządkowanie ze względu na stopień zależności między Z a W.

Niech zapis $C \precsim D$ oznacza, że rozkłady C i D mają odpowiednio jednakowe rozkłady brzegowe i że zależność między W a Z jest słabsza w rozkładzie C niż w rozkładzie D. Jeśli w uporządkowanej klasie do każdej pary rozkładów C, D, $C \precsim D$ można dobrać rozkład E taki, że $C \precsim E \precsim D$, to taką klasę nazywamy gęsto uporządkowaną.

Klasa N jest klasą gęsto uporządkowaną. Aby tego dowieść, pokażemy najpierw, że dowolne dwa różne rozkłady z tej klasy o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych można zawsze uporządkować ze względu na stopień zależności między W a Z. Weźmy bowiem dwa różne rozkłady normalne o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych. Takie dwa rozkłady różnią się tylko parametrem ϱ. Niech rozkład numer 1 ma parametr ϱ_1, a rozkład numer 2 — parametr ϱ_2, przy czym $|\varrho_1| < |\varrho_2|$. Będziemy oznaczać $J_{\varrho_i}(z_1, z_2|W, Z) = J_i(z_1, z_2|W, Z)$. Łatwo obliczyć (np. na podstawie [1], str. 190), że

$$J_\varrho(z_1, z_2|W, Z) = \frac{\varrho^2(z_1 - z_2)^2}{\sigma_z^2(1-\varrho^2)}; \tag{1.5}$$

zatem dla $z_1 \neq z_2$, $0 \leqslant \sigma_z^2 < \infty$ rozdzielność ta jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho = 0$, a dąży do ∞, gdy $|\varrho| \to 1$, i jest ściśle rosnącą funkcją $|\varrho|$. Zatem nierówność $|\varrho_1| < |\varrho_2|$ jest równoważna nierówności (1.3), czyli słabsza jest zależność między W a Z w rozkładzie z parametrem ϱ o mniejszej wartości bezwzględnej (jest to zgodne z powszechnie przyjętą interpretacją ϱ w dwuwymiarowym rozkładzie normalnym). Dwa różne rozkłady normalne można więc zawsze uporządkować ze względu na stopień zależności między W a Z. Z kolei na podstawie (1.4) można ten wniosek przenieść na dowolne dwa różne rozkłady z klasy N o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych.

Jeśli (W, Z) ma rozkład $N(m_w, m_z, \sigma_w, \sigma_z, \varrho)$ i jeśli $g_1(W) = (W - m_w)/\sigma_w$, $g_2(Z) = (Z - m_z)/\sigma_z$, to $\big(g_1(W), g_2(Z)\big)$ ma rozkład symetryczny, a zatem uporządkowanie dwóch rozkładów normalnych ze względu na stopień zależności między W a Z jest jednocześnie uporządkowaniem ze względu na stopień zależności między Z a W. Wniosek ten jest oczywiście słuszny dla dowolnych dwóch różnych rozkładów z klasy N o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych. Zatem N jest klasą uporządkowaną. Jest przy tym klasą gęsto uporządkowaną, gdyż dla każdej pary współczynników ϱ_A, ϱ_B, $|\varrho_A| < |\varrho_B|$, można dobrać ϱ_C takie, że $|\varrho_A| < |\varrho_C| < |\varrho_B|$.

Funkcję q (określoną na M i O_M) o własnościach

$$\begin{array}{rl} 0 < q < 1 & \text{dla rozkładów z klasy } M^+, \\ q = 0 & \text{dla rozkładów z klasy } M^0, \\ -1 < q < 0 & \text{dla rozkładów z klasy } M^-, \\ q = 1 & \text{dla rozkładów z klasy } O_M^+, \\ q = -1 & \text{dla rozkładów z klasy } O_M^-, \end{array}$$

będziemy nazywać parametrem określającym rodzaj zależności monotonicznej między zmiennymi losowymi W i Z.

Jeśli dla każdej pary rozkładów C, D, $C \prec D$ z pewnej uporządkowanej klasy $U \subset M$ wartość bezwzględna parametru q jest mniejsza w rozkładzie C niż w rozkładzie D, to taki parametr q będziemy nazywać parametrem zależności monotonicznej w klasie U.

Wobec tego ϱ jest parametrem zależności monotonicznej w klasie N. Takim parametrem jest również każda ściśle rosnąca funkcja $h(\varrho)$, jeśli $h(\varrho) = -h(-\varrho)$ oraz $|h(\varrho)| < 1$.

Niech $A_n = \big((W_1, Z_1), (W_2, Z_2), \ldots, (W_n, Z_n)\big)$ stanowi n-elementową próbkę prostą zmiennej losowej (W, Z) o rozkładzie z klasy M lub O_M. Współczynnikiem zależności monotonicznej z próbki będziemy nazywać statystykę próbki A_n taką, że

1° przyjmuje ona wartość z przedziału $[-1, 1]$, w szczególności wartość 1, gdy rozkład jest z klasy O_M^+, a wartość -1, gdy rozkład jest z klasy O_M^-,

2° wartość oczekiwana tej statystyki jest parametrem określającym rodzaj zależności monotonicznej między zmiennymi losowymi o rozkładach z klasy M,

3° wartość oczekiwana tej statystyki jest parametrem zależności monotonicznej w klasie N.

W dalszym ciągu tej pracy zdefiniowano i zbadano niektóre własności pewnej statystyki, która jest współczynnikiem zależności monotonicznej z próbki. W przygotowywanej do druku drugiej części pracy zostaną omówione zastosowania tej statystyki w praktyce.

2. Definicja i własności współczynnika $H^{(2k+1)}$. Będziemy nazywać współczynnikiem $H^{(2k+1)}$ następującą funkcję próbki A_{2k+1} (tj. próbki o nieparzystej liczbie elementów):

$$(2.1)\qquad H^{(2k+1)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{2k+1} (Z_{s_j} - Z_{s_{k+1}}) \operatorname{sgn}(W_{s_j} - W_{s_{k+1}})}{\sum\limits_{j=k+2}^{2k+1} Z_{s_j} - \sum\limits_{j=1}^{k} Z_{s_j}}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

przy czym $Z_{s_j} < Z_{s_2} < \ldots < Z_{s_{2k+1}}$. Zauważmy, że $Z_{s_{k+1}}$ jest medianą w próbce $Z_1, \ldots, Z_{2k+1}$.

Tam, gdzie to okaże się potrzebne dla podkreślenia, że współczynnik ten obliczamy na podstawie próbki zmiennej losowej (W, Z), będziemy oznaczać go $H_{W,Z}^{(2k+1)}$.

Obliczanie wartości $H^{(2k+1)}$ zilustrujemy przykładem dla $k = 3$, gdy w próbce otrzymano następujące pary wartości zmiennych losowych W i Z, uporządkowane według rosnących wartości zmiennej losowej Z:

Z	1	2	5	6	7	9	11
W	11	15	10	14	13	16	15

$$\text{Wtedy}\, H^{(7)} = \frac{-(1-6)+(2-6)-(5-6)-(7-6)+(9-6)+(11-6)}{(7+9+11)-(1+2+5)} = 0{,}47$$

Sformułujemy i udowodnimy kilka własności $H^{(2k+1)}$. Wynika z nich, że $H^{(2k+1)}$ jest współczynnikiem zależności monotonicznej z próbki.

WŁASNOŚĆ 1.

$$H^{(2k+1)} = \begin{cases} 1 & \textit{dla rozkładu z klasy } O_M^+, \\ -1 & \textit{dla rozkładu z klasy } O_M^-. \end{cases}$$

Dowód. Gdy rozkład jest z klasy O_M^+, $W_{s_1} < W_{s_2} < \ldots < W_{s_{k+1}} < \ldots < W_{s_{2k+1}}$, a więc licznik i mianownik wyrażenia we wzorze (2.1) są sobie równe, i stąd $H^{(2k+1)} = 1$. Gdy rozkład jest z klasy O_M^-, $W_{s_1} > W_{s_2} > \ldots > W_{s_{2k+1}}$, a więc $H^{(2k+1)} = -1$.

WŁASNOŚĆ 2. *Dla rozkładów ciągłych jest* $-1 \leqslant H^{(2k+1)} \leqslant 1$, *w przedziale otwartym* $(-1, 1)$ $H^{(2k+1)}$ *ma rozkład ciągły, natomiast* $0 < P(H^{(2k+1)} = 1) < 1$ *oraz* $0 < P(H^{(2k+1)} = -1) < 1$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $H^{(2k+1)} \leqslant 1$. Z definicji $H^{(2k+1)}$ współczynnik ten osiąga wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(2.2)\qquad \max_{1 \leqslant j \leqslant k} W_{s_j} < W_{s_{k+1}} < \min_{k+2 \leqslant j \leqslant 2k+1} W_{s_j}.$$

Załóżmy, że (2.2) nie jest spełnione, a więc bądź w przedziale $[1, k]$ istnieje taka liczba naturalna j', że zachodzi nierówność

$$(*)\qquad W_{s_j} \geqslant W_{s_{k+1}},$$

bądź w przedziale $[k+2,\ 2k+1]$ istnieje taka liczba naturalna j'', że zachodzi nierówność

$$(**) \qquad W_{s_{j''}} \leqslant W_{s_{k+1}}.$$

Jeśli zachodzi $(*)$, to

$$\sum_{j=k+2}^{2k+1} z_{s_j} - \sum_{j=1}^{k} z_{s_j} = \sum_{j=k+2}^{2k+1} (z_{s_j} - z_{s_{k+1}}) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{k} (z_{s_j} - z_{s_{k+1}}) - (z_{s_{j'}} - z_{s_{k+1}}) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{2k+1} (z_{s_j} - z_{s_{k+1}}) \operatorname{sgn}(W_{s_j} - W_{s_{k+1}}) - (z_{s_{j'}} - z_{s_{k+1}}) >$$

$$> \sum_{j=1}^{2k+1} (z_{s_j} - z_{s_{k+1}}) \operatorname{sgn}(W_{s_j} - W_{s_{k+1}}),$$

a zatem $H^{(2k+1)} < 1$.

Podobnie $H^{(2k+1)} < 1$, gdy zachodzi nierówność $(**)$. Analogicznie dowodzi się, że $H^{(2k+1)} \geqslant -1$. Ciągłość rozkładu $H^{(2k+1)}$ na odcinku $(-1, 1)$ wynika bezpośrednio z założenia o ciągłości (W, Z). Oznaczmy $p_1 = P(H^{(2k+1)} = 1)$, $p_{-1} = P(H^{(2k+1)} = -1)$. Wystarczy pokazać, że $0 < p_1 < 1$, gdyż dowód dla p_{-1} przebiega analogicznie. Niech

$$\left.\begin{aligned} \Phi(a, b) &= P(W < a, Z < b) \\ \Phi_w(a) &= P(W < a) \\ \Phi_z(b) &= P(Z < b) \end{aligned}\right\} a \in A,\ b \in B;$$

niech $\varphi(a, b)$, $\varphi_w(a)$, $\varphi_z(b)$ będą funkcjami gęstości odpowiadającymi tym dystrybuantom. Będziemy korzystać z tego, że dla $(k+1)$-ej statystyki pozycyjnej w $(2k+1)$-elementowej próbce $W_1, \ldots, W_{2k+1}$ zachodzi związek

$$(2.3) \qquad \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \int_A \{\Phi_w(a)[1-\Phi_w(a)]\}^k \varphi_w(a)\, da = 1.$$

Dla $a \in A'$ i $b \in B'$ z ciągłości rozkładów wynika, że $0 < \Phi_w(a) < 1$, $0 < \Phi_z(b) < 1$, $0 < \Phi(a, b) < \Phi_w(a)$ oraz $0 < \Phi(a, b) < \Phi_z(b)$. Zauważmy, że p_1 jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że w $(2k+1)$-elementowej próbce prostej zmiennej losowej (W, Z) znajduje się taka para, w której pierwsza składowa jest medianą w próbce $W_1, \ldots$ $\ldots, W_{2k+1}$, druga zaś składowa jest medianą w próbce $Z_1, \ldots, Z_{2k+1}$. Zatem na podstawie (2.3) dla $k = 1, 2, \ldots$ mamy

$$0 < p_1 = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \iint_{A'B'} \{\Phi(a, b)[1 - \Phi_w(a) - \Phi_z(b) + \Phi(a, b)]\}^k \varphi(a, b)\, da\, db <$$

$$< \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \iint_{A'B'} \{\Phi_w(a)[1 - \Phi_w(a)]\}^k \varphi(a, b)\, da\, db = 1, \qquad \text{cbdo.}$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli zmienne losowe W i Z są niezależne, to na mocy (2.3)

$$p_1 = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \iint_{A'B'} \{\Phi_w(a)\Phi_z(b)[1-\Phi_w(a)][1-\Phi_z(b)]\}^k \varphi_w(a)\varphi_z(b)\,da\,db =$$
$$= \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Własność 3. *Dla rozkładów z klasy M*

1° *Wszystkie nieparzyste momenty współczynnika $H^{(2k+1)}$ albo znikają jednocześnie, albo są jednocześnie dodatnie, albo są jednocześnie ujemne.*

2° *Dowolny nieparzysty moment rozkładu współczynnika $H^{(2k+1)}$ jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy W i Z są niezależne; jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy między W a Z jest stochastyczna zależność ściśle rosnąca; jest ujemny wtedy i tylko wtedy, gdy między W a Z jest stochastyczna zależność ściśle malejąca.*

Dowód. Załóżmy, że W i Z są niezależne. Oznaczmy

$$a_j = \frac{Z_{s_j} - Z_{s_{k+1}}}{\sum_{\nu=k+2}^{2k+1} Z_{s_\nu} - \sum_{\nu=1}^{k} Z_{s_\nu}},$$

$$b_j = \operatorname{sgn}(W_{s_i} - W_{s_{k+1}})$$

i niech M' będzie zbiorem wszystkich ciągów nieujemnych liczb całkowitych $m_1, \ldots, m_{2k+1}$ takich, że $m_{k+1} = 0$ i $\sum_{i=1}^{2k+1} m_i = 2m+1$. Wtedy moment rzędu $2m+1$ rozkładu $H^{(2k+1)}$ jest równy

$$E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} = \tag{2.4}$$
$$= \sum_{(m_1,\ldots,m_{2k+1})\in M'} \frac{(2m+1)!}{m_1!\cdot\ldots\cdot m_{2k+1}!} E\{a_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot a_{2k+1}^{m_{2k+1}}\cdot b_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot b_{2k+1}^{m_{2k+1}}\} =$$
$$= \sum_{(m_1,\ldots,m_{2k+1})\in M'} \frac{(2m+1)!}{m_1!\cdot\ldots\cdot m_{2k+1}!} E\{a_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot a_{2k+1}^{m_{2k+1}}\} E\{b_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot b_{2k+1}^{m_{2k+1}}\}.$$

Z niezależności W i Z wynika, że $W_{s_1}, \ldots, W_{s_{2k+1}}$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady, a zatem dla δ_j przyjmujących wartości $+1$ lub -1 $(j = 1, 2, \ldots, k, k+2, \ldots, 2k+1)$, $\delta_{k+1} = 0$, mamy

$$P(b_1 = \delta_1, \ldots, b_{2k+1} = \delta_{2k+1}) = P(b_1 = -\delta_1, \ldots, b_{2k+1} = -\delta_{2k+1}). \tag{2.5}$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^{2k+1} m_i = 2m+1$, w ciągu $m_1, \ldots, m_{2k+1}$ jest nieparzysta ilość wyrazów nieparzystych, a zatem na mocy (2.5) $P(b_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot b_{2k+1}^{m_{2k+1}} = 1) = P(b_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot b_{2k+1}^{m_{2k+1}} = -1)$, skąd $E(b_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot b_{2k+1}^{m_{2k+1}}) = 0$. Wobec tego każdy składnik sumy we wzorze (2.4) jest zerem, a więc $E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} = 0$ dla każdego całkowitego nieujemnego m.

Załóżmy teraz, że między W a Z jest stochastyczna zależność ściśle ujemna, tj. dla każdego $a\in A'$ dystrybuanta $F(a|z)$ warunkowego rozkładu zmiennej losowej W, gdy $Z = z$, jest ściśle rosnącą funkcją z. Pokażemy, że wtedy $E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} < 0$ dla każdego całkowitego nieujemnego m.

Niech $f(a|z)$ oznacza gęstość warunkowego rozkładu zmiennej losowej W, gdy $Z = z$, a $h(z_{s_1}, \ldots, z_{s_{2k+1}})$ — gęstość łącznego rozkładu brzegowego $Z_{s_1}, \ldots, Z_{s_{2k+1}}(Z_{s_1} < \ldots < Z_{s_{2k+1}})$. Z założenia o $F(a|z)$ wynika, że dla każdego $a\in A'$

$$F(a|z_{s_1}) < F(a|z_{s_2}) < \ldots < F(a|z_{s_{2k+1}}),$$

a stąd

$$\int_A F(a|z_{s_1})f(a|z_{s_{k+1}})da < \ldots < \int_A F(a|z_{s_{2k+1}})f(a|z_{s_{k+1}})da.$$

Ponieważ

$$\int_A F(a|z_{s_i})f(a|z_{s_{k+1}})da = P(W_{s_i} < W_{s_{k+1}}|z_{s_i}, z_{s_{k+1}}),$$

to

$$P(W_{s_1} < W_{s_{k+1}}|z_{s_1}, z_{s_{k+1}}) < \ldots < P(W_{s_k} < W_{s_{k+1}}|z_{s_k}, z_{s_{k+1}}) < \frac{1}{2} <$$

$$< P(W_{s_{k+2}} < W_{s_{k+1}}|z_{s_{k+2}}, z_{s_{k+1}}) < \ldots < P(W_{s_{2k+1}} < W_{s_{k+1}}|z_{s_{2k+1}}, z_{s_{k+1}}).$$

Obliczamy

$$\begin{aligned}(2.6)\quad & E[\operatorname{sgn}(W_{s_i} - W_{s_{k+1}})|z_{s_i}, z_{s_{k+1}}]^{2t+1} = \\ &= (-1)\cdot P(W_{s_i} < W_{s_{k+1}}|z_{s_i}, z_{s_{k+1}}) + 0\cdot P(W_{s_i} = W_{s_{k+1}}|z_{s_i}, z_{s_{k+1}}) + \\ &\quad + 1\cdot P(W_{s_i} > W_{s_{k+1}}|z_{s_i}, z_{s_{k+1}}) = 1 - 2P(W_{s_i} < W_{s_{k+1}}|z_{s_i}, z_{s_{k+1}}),\end{aligned}$$

dla $t = 0, 1, 2, \ldots$

Zatem

$$(2.7)\qquad E(\operatorname{sgn}(W_{s_i} - W_{s_{k+1}})|z_{s_i}, z_{s_{k+1}})^{2t+1} \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ = 0 & \text{dla} \quad i = k+1, \\ < 0 & \text{dla} \quad i = k+2, \ldots, 2k+1 \end{cases}$$

dla $t = 0, 1, 2, \ldots$

Niech S stanowi zbiór wszystkich permutacji $s_1, \ldots, s_{2k+1}$ liczb naturalnych $1, \ldots, 2k+1$. Wtedy

$$(2.8)\qquad E\{a_1^{m_1} \ldots a_k^{m_k} a_{k+2}^{m_{k+2}} \ldots a_{2k+1}^{m_{2k+1}} b_1^{m_1} \ldots b_k^{m_k} b_{k+2}^{m_{k+2}} \ldots b_{2k+1}^{m_{2k+1}}\} =$$

$$= \sum_{(s_1,\ldots,s_{2k+1})\in S} \int\limits_{z_{s_1}<\ldots<z_{s_{2k+1}}} \tilde{a}_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{2k+1}^{m_{2k+1}} \times$$

$$\times E[(b_1|z_{s_1}, z_{s_{k+1}})^{m_1}] \cdot \ldots \cdot E[(b_{2k+1}|z_{s_{2k+1}}, z_{s_{k+1}})^{m_{2k+1}}] \times$$

$$\times h(z_{s_1}, \ldots, z_{s_{2k+1}})\, dz_{s_1} \ldots dz_{s_{2k+1}},$$

przy czym $\tilde{a}_j$ oznacza wartość zmiennej losowej a_j $(j = 1, \ldots, 2k+1)$. Wyrażenie

$$(2.9)\qquad \tilde{a}_j^{m_j} E[(b_j|z_{s_j}, z_{s_{k+1}})^{m_j}] =$$

$$= \left(\frac{z_{s_j} - z_{s_{k+1}}}{\sum\limits_{\nu=k+2}^{2k+1} z_{s_\nu} - \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_{s_\nu}}\right)^{m_j} E[(\operatorname{sgn}(W_{s_j} - W_{s_{k+1}})|z_{s_j}, z_{s_{k+1}})^{m_j}]$$

jest dodatnie dla m_j parzystych, gdyż wtedy oba czynniki są dodatnie, ujemne zaś dla m_j nieparzystych, gdyż wtedy te czynniki mają różne znaki: $\tilde{a}_j^{m_j}$ jest ujemne dla $j = 1, \ldots, k$, gdy tymczasem drugi czynnik na mocy (2.7) jest wtedy dodatni, oraz $\tilde{a}_j^{m_j}$ jest dodatnie dla $j = k+2, \ldots$ $\ldots, 2k+1$, gdy tymczasem drugi czynnik na mocy (2.7) jest wtedy ujemny. Ponieważ $\sum\limits_{i=1}^{2k+1} m_i = 2m+1$, to w ciągu $m_1, \ldots, m_{2k+1}$ jest nieparzysta liczba nieparzystych wyrazów i wyrażenie pod całką we wzorze (2.8) jest stale ujemne, a zatem $E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} < 0$ dla każdego całkowitego nieujemnego m.

Analogicznie, jeśli dla każdego $a \in A'$ $F(a|z)$ jest ściśle malejącą funkcją z, to $E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} > 0$ dla każdego całkowitego nieujemnego m.

Gdy (W, Z) ma rozkład z klasy M, ściśle rosnąca stochastyczna zależność, ściśle malejąca stochastyczna zależność i niezależność W i Z wyczerpują wszystkie możliwe przypadki, a przy tym wyłączają się wzajemnie; przypadki, w których wszystkie nieparzyste momenty rozkładu $H^{(2k+1)}$ są jednocześnie dodatnie, jednocześnie ujemne lub jednocześnie równe zero, również wyłączają się wzajemnie. Zatem z udowodnionych wyżej zależności wynika, że dla rozkładów z klasy M

1° Wszystkie nieparzyste momenty $H^{(2k+1)}$ albo znikają jednocześnie, albo są jednocześnie ujemne, albo są jednocześnie dodatnie.

2° Zachodzą zależności odwrotne:

jeżeli $E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} > 0$ dla każdego całkowitego nieujemnego m, to między W a Z istnieje stochastyczna zależność ściśle rosnąca;

jeżeli $E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} = 0$ dla każdego całkowitego nieujemnego m, to W i Z są niezależne;

jeżeli $E[H^{(2k+1)}]^{2m+1} < 0$ dla każdego całkowitego nieujemnego m, to między W a Z istnieje stochastyczna zależność ściśle malejąca.

To kończy dowód własności 3.

Zanim sformułujemy następną własność, przypomnimy, że każdemu rozkładowi z klasy N można przyporządkować parametr ϱ. Oznacza to, że istnieją takie funkcje γ_1 i γ_2, obie typu F^+ albo obie typu F^-, że zmienna losowa $\big(\gamma_1(W), \gamma_2(Z)\big)$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny z parametrem ϱ. (Wyłączamy przypadek, przy którym jedna z funkcji jest typu F^+, a druga typu F^-, gdyż wtedy parametr ϱ przestałby określać rodzaj zależności monotonicznej zmiennych losowych o rozkładach z klasy N.) Zatem dwa różne rozkłady z klasy N o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych różnią się jedynie parametrem ϱ. Oznaczmy przez $E_\varrho H^{(2k+1)}$ wartość oczekiwaną współczynnika $H^{(2k+1)}_{W,Z}$, gdy zmienna losowa (W, Z) ma rozkład z klasy N o parametrze ϱ.

WŁASNOŚĆ 4. *W rodzinie rozkładów z klasy N o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych $E_\varrho H^{(2k+1)}$ jest ściśle rosnącą funkcją ϱ, przy czym $E_\varrho H^{(2k+1)} = -E_{-\varrho} H^{(2k+1)}$.*

Dowód. Symbolem $P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho)$ będziemy oznaczać prawdopodobieństwo zdarzenia $W_{s_j} > W_{s_{k+1}}$ przy ustalonych wartościach z_{s_j} i $z_{s_{k+1}}$, gdy (W, Z) ma rozkład z klasy N o parametrze ϱ. Na podstawie wzorów (2.6), (2.7) i (2.8) oraz pierwszej części wzoru (2.5) możemy napisać, że

$$(2.10)\qquad E_\varrho H^{(2k+1)} = \sum_{j=1}^{2k+1} \sum_{(s_1,\ldots,s_{2k+1})\epsilon S} \int\limits_{z_{s_1}<\ldots<z_{s_{2k+1}}} 2\cdot\frac{z_{s_j}-z_{s_{k+1}}}{\sum\limits_{\nu=k+2}^{2k+1} z_{s_\nu} - \sum\limits_{\nu=1}^{k} z_{s_\nu}} \times$$
$$\times\left[P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho) - \frac{1}{2}\right]\cdot h(z_{s_1}, \ldots, z_{s_{2k+1}})\, dz_{s_1}\ldots dz_{s_{2k+1}}.$$

Pokażemy, że dla dowolnych rozkładów z klasy N o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych, mających parametry ϱ_1 i ϱ_2, $\varrho_1 < \varrho_2$, zachodzi

$$(2.11)\qquad E_{\varrho_2} H^{(2k+1)} > E_{\varrho_1} H^{(2k+1)}.$$

Jak widać ze wzoru (2.10), wystarczy dowieść, że dla wszystkich $z_{s_j}, z_{s_{k+1}}$

$$(2.12)\qquad (z_{s_j} - z_{s_{k+1}})[P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho_2) -$$
$$- P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho_1)] > 0.$$

Jeśli oba rozkłady są normalne $N(m_w, m_z, \sigma_w, \sigma_z, \varrho_i)$, gdzie $i = 1, 2$, to zmienna losowa $(W_{s_j}-W_{s_{k+1}})$ przy ustalonych z_{s_j} i $z_{s_{k+1}}$ ma rozkład $N\left(\varrho_i \frac{\sigma_w}{\sigma_z}(z_{s_j}-z_{s_{k+1}}), \sqrt{2}\sigma_w\sqrt{1-\varrho_i^2}\right)$. Stąd przy $z_{s_j} > z_{s_{k+1}}$

$$P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho_2) > P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho_1), \tag{2.13}$$

a więc zachodzi (2.12). Jeśli $z_{s_j} < z_{s_{k+1}}$, to we wzorze (2.13) kierunek środkowej nierówności zmienia się na przeciwny, a więc również zachodzi (2.12).

Niech (W, Z) ma dowolny rozkład z klasy N z parametrem ϱ

$$P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho) = \tag{2.14}$$

$$= \begin{cases} P\big(\gamma_1(W_{s_j}) > \gamma_1(W_{s_{k+1}}) | \gamma_2(z_{s_j}), \gamma_2(z_{s_{k+1}}); \varrho\big), & \text{gdy } \gamma_1 \text{ jest typu } F^+, \\ 1-P\big(\gamma_1(W_{s_j}) > \gamma_1(W_{s_{k+1}}) | \gamma_2(z_{s_j}), \gamma_2(z_{s_{k+1}}); \varrho\big), & \text{gdy } \gamma_1 \text{ jest typu } F^-, \end{cases}$$

oraz

$$\operatorname{sgn}(z_{s_j}-z_{s_{k+1}}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}[\gamma_2(z_{s_j})-\gamma_2(z_{s_{k+1}})], & \text{gdy } \gamma_2 \text{ jest typu } F^+, \\ -\operatorname{sgn}[\gamma_2(z_{s_j})-\gamma_2(z_{s_{k+1}})], & \text{gdy } \gamma_2 \text{ jest typu } F^-. \end{cases} \tag{2.15}$$

Ponieważ zawsze istnieją funkcje γ_1 i γ_2 jednocześnie typu F^+ lub typu F^- takie, że $\big(\gamma_1(W), \gamma_2(Z)\big)$ ma rozkład normalny z parametrem ϱ, więc z (2.14) i (2.15) wynika (2.12), a stąd (2.11). Zatem $H^{(2k+1)}$ jest ściśle rosnącą funkcją ϱ w rozpatrywanej rodzinie rozkładów.

Pozostaje pokazać, że dla dwóch rozkładów z klasy N o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych, mających parametry ϱ i $-\varrho$, zachodzi związek

$$E_\varrho H^{(2k+1)} = -E_{-\varrho} H^{(2k+1)}. \tag{2.16}$$

Jak widać ze wzoru (2.10), wystarczy dowieść, że

$$P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; \varrho) + P(W_{s_j} > W_{s_{k+1}} | z_{s_j}, z_{s_{k+1}}; -\varrho) = 1. \tag{2.17}$$

Jeśli oba rozkłady są normalne, dowód wynika od razu z podanej wyżej postaci rozkładu $W_{s_j}-W_{s_{k+1}}$ przy ustalonych z_{s_j} i $z_{s_{k+1}}$, gdyż przy zmianie znaku ϱ średnia tego rozkładu zmienia znak na przeciwny, a wariancja nie ulega zmianie. Ze wzoru (2.14) wynika następnie, że wzór (2.17) jest słuszny dla dowolnych dwóch rozkładów z klasy N o odpowiednio jednakowych rozkładach brzegowych, a to kończy dowód własności 4.

Z własności 1-4 wynika, że $H^{(2k+1)}$ jest współczynnikiem zależności monotonicznej z próbki.

WŁASNOŚĆ 5. *Dla rozkładów ciągłych z ograniczoną funkcją gęstości przy stałej* $a \neq 0$

$$H^{(2k+1)}_{\gamma(W), aZ+b} = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a)\cdot H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \textit{gdy } \gamma \textit{ jest funkcją ściśle rosnącą}, \\ (-\operatorname{sgn} a)\cdot H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \textit{gdy } \gamma \textit{ jest funkcją ściśle malejącą}. \end{cases}$$

Dowód. Będziemy korzystać z tego, że

$$\operatorname{sgn}[\gamma(W_{s_j})-\gamma(W_{s_{k+1}})] = \begin{cases} \operatorname{sgn}(W_{s_j}-W_{s_{k+1}}), & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle rosnącą}, \\ -\operatorname{sgn}(W_{s_j}-W_{s_{k+1}}), & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle malejącą}, \end{cases}$$

dla $j = 1, 2, \ldots, 2k+1$. Jeśli $a > 0$, to

$$H^{(2k+1)}_{\gamma(W),aZ+b} = \frac{\sum_{j=1}^{2k+1} (aZ_{s_j}+b-aZ_{s_{k+1}}-b)\operatorname{sgn}[\gamma(W_{s_j})-\gamma(W_{s_{k+1}})]}{\sum_{j=k+2}^{2k+1} (aZ_{s_j}+b)-\sum_{j=1}^{k}(aZ_{s_j}+b)} =$$

$$= \begin{cases} +H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle rosnącą}, \\ -H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle malejącą}. \end{cases}$$

Jeśli $a < 0$, to

$$H^{(2k+1)}_{\gamma(W),aZ+b} = \frac{\sum_{j=1}^{2k+1} (aZ_{s_{2k+2-j}}+b-aZ_{s_{k+1}}-b)\operatorname{sgn}[\gamma(W_{s_{2k+2-j}})-\gamma(W_{s_{k+1}})]}{\sum_{j=k+2}^{2k+1} (aZ_{s_{2k+2-j}}+b)-\sum_{j=1}^{k}(aZ_{s_{2k+2-j}}+b)} =$$

$$= -\frac{\sum_{j=1}^{2k+1} (Z_{s_j}-Z_{s_{k+1}})\operatorname{sgn}[\gamma(W_{s_j})-\gamma(W_{s_{k+1}})]}{\sum_{j=k+2}^{2k+1} Z_{s_j}-\sum_{j=1}^{k} Z_{s_j}} =$$

$$= \begin{cases} -H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle rosnącą}, \\ +H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle malejącą}. \end{cases}$$

Zatem

$$H^{(2k+1)}_{\gamma(W),aZ+b} = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a)H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle rosnącą}, \\ (-\operatorname{sgn} a)H^{(2k+1)}_{W,Z}, & \text{gdy } \gamma \text{ jest funkcją ściśle malejącą}. \end{cases}$$

Pragnę podziękować Panu Profesorowi S. Zubrzyckiemu za konstruktywne uwagi, które wykorzystałam w ostatecznej redakcji niniejszej pracy.

Prace cytowane

[1] S. Kullback, *Information theory and statistics*, J. Wiley & Sons, New York 1959.

[2] E. L. Lehmann, *Testing statistical hypotheses*, J. Wiley & Sons, New York 1959.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 4. 2. 1966
Nowa wersja 22. 10. 1966

Э. ПЛЕЩИНЬСКА (Варшава)

ВЫБОРОЧНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ МОНОТОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ (I)

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются распределения двумерной непреривной случайной величины (W, Z). Определены условия, при которых два такие распределения с попарно одинаковыми граничными распределениями можно натуральным образом упорядочить по степени стохастической зависимости между W и Z.

Ближе рассмотрен класс M непреривных распределений с ограниченной плотностью, для которых случайные переменные W и Z независимы или же существует между ними так называемая строго монотонная стохастическая зависимость. В классе M содержится класс N соответственно трансформированных двумерных нормальных законов распределения. Произвольные два распределения из класса N с попарно одинаковыми граничными распределениями можно упорядочить по степени стохастической зависимости между W и Z.

Определен параметр характеризующий род монотонной зависимости, который может быть приписан произвольному распределению класса M и другой параметр, измеряющий степень монотонной зависимости, который в частном случае может быть приписан произвольному распределению класса N. На этих определениях основан выборочный коэффициент монотонной зависимости.

Во второй части работы вводится выборочная статистика $H^{(2k+1)}$, для которой доказано, что она удовлетворяет требованиям сформулированным в определении выборочного коэффициента монотонной зависимости.

Практические применения коэффициента $H^{(2k+1)}$ будут указаны во второй работе под тем же самым названием.

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

A SAMPLE COEFFICIENT OF MONOTONIC DEPENDENCE (I)

SUMMARY

This paper deals with distributions of two-dimensional random variables (W, Z). Conditions have been defined for a fairly natural way of ordering two such distributions with the same boundary distributions on the ground of the degree of stochastic dependence between W and Z.

The class M of continuous distributions with a limited density function in which random variables W and Z are either dependent or where there is a so called strictly monotonic stochastic dependence has been more closely investigated. Class M contains the class N of suitably modified two-dimensional normal distributions. Any two distributions of class N with the same boundary distributions may be ordered with respect to the degree of stochastic dependence between W and Z.

Two parameters have been defined. The first one, which determines the kind of monotonic dependence, may be assigned to each distribution of class M. The second one, which measures the degree of monotonic dependence may be in particular

assigned to each distribution of class N. On the base of the two defined parameters a sample coefficient of monotonic dependence has been determined.

In the second part of this paper a sample statistics, called coefficient $H^{(2k+1)}$, has been defined. It has been shown that it is the sample coefficient of monotonic dependence. Practical applications of the coefficient $H^{(2k+1)}$ will be presented in a next paper under the same title.