ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur une condition de coïncidence des surfaces convexes isométriques

par K. RADZISZEWSKI (Lublin)

Dans la théorie classique des surfaces régulières on prouve le théorème suivant: Si les première et deuxième formes quadratiques de la surface S_1 sont identiques respectivement aux première et deuxième formes quadratiques de la surface S_2, alors les surfaces S_1 et S_2 sont congruentes.

Les conditions de ce théorème peuvent être remplacées par la condition que les surfaces S_1 et S_2 soient isométriques et aient des courbures normales identiques dans les directions correspondantes suivant l'isométrie. Pour les surfaces convexes, au lieu de la condition d'identité des courbes normales, on peut supposer l'identité des courbures des courbes correspondantes.

Dans ce travail nous prouvons le théorème cité plus haut pour les surfaces convexes en le modifiant en ce que nous supposerons l'isométrie et l'identité des courbures intégrales [1] des courbes correspondantes.

La notion de courbure intégrale utilisée ici permet de prouver ce théorème pour des surfaces convexes arbitraires.

Je remercie M. M. A. Bielecki, S. Gołąb et K. Tatarkiewicz dont les précieuses remarques ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

Notations et définitions. Dans ce travail nous utiliserons les notations suivantes:

$\langle A \ast B \rangle$ arc (orienté) de courbe fermé d'extrémités A et B;
$(A \ast B)$ arc de courbe ouvert d'extrémités A et B;
$\langle AB \rangle$ segment de droite fermé d'extrémités A et B;
AB droite passant par les points A et B;
$\overline{AB}$ vecteur d'origine A et d'extrémité B;
$\sphericalangle(t, p)$ angle formé par les vecteurs t et p, $0 \leqslant \sphericalangle(t, p) \leqslant \pi$;
$[A \ast B]$ longueur de l'arc $\langle A \ast B \rangle$;
$[AB]$ longueur du segment de droite $\langle AB \rangle$.

Nous appellerons *surface convexe* S un domaine (c'est-à-dire un ensemble ouvert et connexe) sur une surface fermée S' limitant un solide convexe ayant des points intérieurs dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Un point $M \in S$ sera appelé *lisse* si la surface S admet un plan tangent continu au point M.

Un point $M \in S$ est appelé *point d'arête* s'il existe une seule droite l appuyant S au point M telle que $\mathrm{l} \subset \lim\limits_{M_n \to M} \tau(M_n)$ pour toutes les suites convergentes des plans d'appui $\tau(M_n)$ de la surface S, $M_n \in S$. La droite l sera appelée *arête* de la surface au point M.

Un point $M \in S$ qui n'est ni point lisse, ni point d'arête sera appelé *sommet*.

Si $M \in S$ est un sommet alors les limites des demi-droites MP d'extrémité M, $P \in S$, $P \to M$, formeront une surface conique W. La surface W sera appelée *cône tangent de la surface S au point M*. Si M est un point d'arête, le cône tangent se réduit à deux plans d'appui qui seront appelés *plans d'appui frontières*.

Nous dirons que la courbe $\langle A \ast B\rangle$ admet au point $M \in \langle A \ast B\rangle$ une tangente $\mathrm{t}(M)$ au sens strict, s'il existe une limite unique des droites $M'M''$, $M' \in \langle A \ast B\rangle$ et $M'' \in \langle A \ast B\rangle$, pour tous les M', $M'' \to M$, $M' \neq M''$. Dans le cas $M' = M$, la droite $\mathrm{t}(M)$ sera dite *tangente*. Plus généralement, la droite $\mathrm{p}(M)$ qui est la limite des droites $M'M''$, $M' \in \langle A \ast B\rangle$, $M'' \in \langle A \ast B\rangle$, lorsque $M' \to M$, $M'' \to M$, sera appelée *droite paratingent* de la courbe $\langle A \ast B\rangle$ au point M et l'ensemble de toutes ces droites sera appelé *paratingent* de la courbe $\langle A \ast B\rangle$ au point M et désigné par $\mathrm{P}(M)$.

S'il existe une limite unique des droites $M'M''$, $M' \in \langle M \ast B\rangle$ et $M'' \in \langle M \ast B\rangle$ ($M' \in \langle A \ast M\rangle$, $M'' \in \langle A \ast M\rangle$) pour tous les M', $M'' \to M$, cette limite sera appelée *tangente à droite* (*à gauche*) *au sens strict* et désignée par $\mathrm{t}^+(M)$ ($\mathrm{t}^-(M)$).

D'une façon analogue, si le point M'' correspond à une valeur du paramètre plus grande que le point M' (autrement dit, si $M'' \in \langle M' \ast B\rangle$), nous appellerons la limite des vecteurs $\overline{M'M''}/[M'M'']$ vecteur tangent au sens strict, vecteur tangent, vecteur paratingent, paratingent des vecteurs, vecteur tangent à droite (à gauche) au sens strict de la courbe $\langle A \ast B\rangle$ au point M et nous les désignerons respectivement par $t(M)$, $t(M)$, $p(M)$, $P(M)$, $t^+(M)$ ($t^-(M)$).

Si l'on place l'origine du vecteur paratingent $p(M)$ d'une courbe $\langle A \ast B\rangle$ en un point fixe 0, son extrémité décrit sur la surface de la sphère-unité un ensemble $\langle\langle A \ast B\rangle\rangle$, lorsque M parcourt l'arc $\langle A \ast B\rangle$. L'ensemble $\langle\langle A \ast B\rangle\rangle$ sera appelé *indicatrice sphérique* de la courbe $\langle A \ast B\rangle$.

Si l'indicatrice sphérique d'une courbe $\langle A \ast B\rangle$ est une courbe rectifiable $\langle\langle A \ast B\rangle\rangle$, la longueur de la courbe $\langle\langle A \ast B\rangle\rangle$ sera dite *courbure intégrale* de la courbe $\langle A \ast B\rangle$ et notée $k(\langle A \ast B\rangle) = [\langle\langle A \ast B\rangle\rangle]$.

Une courbe ayant un vecteur tangent à variation bornée possède une courbure intégrale finie.

Nous dirons qu'une surface S_1 est *congruente au sens large* à une surface S_2, si S_1 est congruente à S_2 ou à une surface S symétrique de S_2 par rapport à un plan.

Coïncidence des surfaces convexes. La démonstration de notre théorème sera partagée en plusieurs lemmes.

LEMME 1. *Soit $\langle A{\ast}B\rangle$ une courbe plane convexe et $s = [A{\ast}M]$, $\langle A{\ast}M\rangle \subset \langle A{\ast}B\rangle$, $h(s)$ la distance algébrique du point M à la tangente de la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ au point A, $k(s)$ la courbure intégrale de l'arc $\langle A{\ast}B\rangle$. Alors on a*

$$h(s) = \int_0^s \sin k(x)\, dx\,.$$

Démonstration. Soit $t(A)$ le vecteur-unité tangent de la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ au point A.

Dans la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ nous inscrirons une ligne brisée W_n: $\langle M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B\rangle$, $\langle A{\ast}M_i\rangle \subset \langle A{\ast}M_{i+1}\rangle$. Désignons par $h(M)$ la distance algébrique du point M à la tangente $t(A)$. Soit $\varphi_i = \sphericalangle\big(\overline{M_{i-1}M_i}, t(A)\big)$, $a_i = \sphericalangle(\overline{M_{i-1}M_i}, \overline{M_iM_{i+1}})$, $s_i = [M_{i-1}M_i]$.

Avec ces notations nous obtiendrons:

$$
\begin{aligned}
& h(M_1) = s_1 \sin\varphi_1\,,\\
& h(M_2) = h(M_1) + s_2 \sin\varphi_2\,,\\
(1)\qquad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& h(M_n) = s_1\sin\varphi_1 + \ldots + s_n \sin\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \sin(\varphi_1 + a_1 + \ldots + a_{i-1}) s_i\,,
\end{aligned}
$$

car $\varphi_2 = \varphi_1 + a_1$, $\varphi_3 = \varphi_2 + a_2 = \varphi_1 + a_1 + a_2, \ldots, \varphi_n = \varphi_1 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$.

Si nous passons maintenant à la limite dans (1), lorsque $\max [M_iM_{i-1}] \to 0$, alors, en profitant d'un raisonnement semblable à celui du travail [6], nous obtenons

$$h(M_n) = h(B) = \int_0^{[A*B]} \sin k(s)\, ds$$

et le lemme est prouvé.

LEMME 2. *Soient $\langle A{\ast}B_1\rangle$ et $\langle A{\ast}B_2\rangle$ des courbes planes convexes et admettant une tangente commune $t(A)$. Désignons par $k_1(s)$ et $k_2(s)$ les courbures intégrales des arcs $\langle A{\ast}M_1\rangle \subset \langle A{\ast}B_1\rangle$ et $\langle A{\ast}M_2\rangle \subset \langle A{\ast}B_2\rangle$ respectivement $[A{\ast}M_1] = [A{\ast}M_2] = s$. Sous ces conditions, si*

$$0 \leqslant k_1(s) \leqslant k_2(s) \leqslant \pi/2$$

pour tous les $s \in \langle 0, [A{\ast}B_1] = [A{\ast}B_2]\rangle$, alors

$$h_1(s) \leqslant h_2(s)\,.$$

Démonstration. En vertu du lemme 1 nous avons

$$h_1(s) = \int_0^s \sin k_1(x)\,dx\,, \qquad h_2(s) = \int_0^s \sin k_2(x)\,dx$$

et, comme $k_1(x) \leqslant k_2(x)$, on a $h_1(s) \leqslant h_2(s)$ pour $k_2(s) \leqslant \pi/2$, ce qui prouve notre lemme.

LEMME 3. *Si une courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ (non nécessairement plane) admet une courbure intégrale finie, alors elle admet aussi un vecteur tangent au sens strict au point A.*

Démonstration. Soit $M'_n \in \langle A{\ast}B\rangle$, $M_n \in \langle A{\ast}B\rangle$, $M'_n \to A$, $M_n \to A$. Supposons que les vecteurs paratingents $p(M_n)$ et $p(M'_n)$ de la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ aux points M_n et M'_n satisfont aux conditions suivantes: $p(M_n) \to t_1$, $p(M'_n) \to t_2$, $\sphericalangle(t_1, t_2) = a > 0$, lorsque $M_n \to A$ et $M'_n \to A$. Alors, pour $n > n_0$, nous avons $\sphericalangle\big(p(M_n), t_1\big) < \varepsilon$, $\sphericalangle\big(p(M'_n), t_2\big) < \varepsilon$ et $0 < \varepsilon < \sphericalangle(t_1, t_2)/4 = a/4$.

Soit $M_n \in \langle M'_{n-1}{\ast}M'_n\rangle$, $M'_n \in \langle M_n{\ast}M_{n+1}\rangle$. D'où

$$\sphericalangle\big(p(M_n), p(M'_n)\big) > \sphericalangle(t_1, t_2) - 2\varepsilon > a - a/2 = a/2 \qquad \text{pour} \qquad n > n_0\,.$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités nous obtiendrons

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \big(p(M_n), p(M'_n)\big) = \infty\,,$$

en contradiction avec l'hypothèse que $k(A{\ast}B)$ est un nombre fini. Le lemme 3 est donc démontré.

LEMME 4. *Supposons que la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ admette une courbure intégrale finie. Par les points $M \in \langle A{\ast}B\rangle$ menons les droites $\mathrm{l}(M)$ perpendiculaires à la tangente de la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ au point A et parallèles à une droite fixée $\mathrm{l}(A)$.*

Si nous développerons la surface cylindrique Φ ainsi obtenue sur un plan de façon que les différents points de la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ se trouveront sur des génératrices différentes de la surface cylindrique (c'est-à-dire, chaque droite parallèle à $\mathrm{l}(M)$ aura après le développement de Φ au plus un point ou un segment de droite en commun avec la courbe $\langle A'{\ast}B'\rangle$ obtenue de $\langle A{\ast}B\rangle$), alors la courbure intégrale de la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$ n'augmentera pas.

Démonstration. Prenons, sur la courbe $\langle A{\ast}B\rangle$, les points $M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B$, $\langle M_i{\ast}M_{i+1}\rangle \subset \langle M_{i+1}{\ast}M_{i+2}\rangle$, et les vecteurs tangents à droite $p(M_i)$ aux points M_i. Evidemment $p(M) \to p(A)$ lorsque $M \to A$. Plaçons les origines des vecteurs $p(M_i)$ au centre de la sphère-unité. Leurs extrémités déterminent sur la surface de la sphère-unité les points $\hat{M}_i$. Joignons les points $\hat{M}_i$ sur la surface de la sphère par des arcs de grands cercles de longueurs inférieures à π. Nous obtenons ainsi sur la surface de la sphère une ligne brisée sphérique $\hat{W}_n = \langle \hat{M}_0, \hat{M}_1, \ldots, \hat{M}_n\rangle$

inscrite dans l'indicatrice sphérique $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ de la courbe $\langle A*B\rangle$. Comme la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ est rectifiable, la longueur $[\hat{W}_n]$ de la courbe $\hat{W}_n$ tend vers la longueur $[\langle\langle A*B\rangle\rangle]$ de la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$.

Désignons par $l(A)$ le vecteur-unité sur la droite $\mathrm{l}(A)$. Nous allons prouver que le développement de la surface cylindrique Φ sur un plan ne change pas l'angle entre les vecteurs $l(A)$ et $p(M_i)$. Si τ désigne un plan perpendiculaire à $l(A)$ et ne coupant pas la courbe $\langle A*B\rangle$, $h(M)$ la distance du point M au plan τ, alors $h(M)$ ne change pas quand nous développons la surface Φ sur un plan.

Désignons par P et Q les points satisfaisant aux conditions: $P\in\langle M_i*Q\rangle\subset\langle A*B\rangle$, $Q\in\langle P*B\rangle\subset\langle A*B\rangle$. Alors, nous avons $\overline{PQ}/[PQ]\to$ $\to p(M_i)$ lorsque $P,Q\to M_i$. Soient P',Q',M_i',A',B' les points obtenus des points P,Q,M_i,A,B après le développement de la surface Φ sur un plan. Alors, si φ est l'angle entre le vecteur $\overline{PQ}/[PQ]$ et le plan τ, nous obtenons du lemme 3

$$\sin\varphi=\frac{|h(Q)-h(P)|}{[PQ]}\to\sin\psi_i \tag{2}$$

lorsque $P,Q\to M_i$, où ψ_i est l'angle entre le vecteur $p(M_i)$ et le plan τ.

Soit φ' l'angle entre le vecteur $\overline{P'Q'}$ et le plan τ. Alors

$$\sin\varphi'=\frac{|h(Q')-h(P')|}{[Q'P']}=\frac{|h(Q)-h(P)|}{[Q'P']}\,. \tag{3}$$

Evidemment on a

$$[Q*P]=[Q'*P']\geqslant[Q'P']\geqslant[QP]\,. \tag{4}$$

Dans l'arc $\langle P*Q\rangle$ nous inscrivons une ligne brisée $W_{PQ}=\langle N_1=P,$ $N_2,\dots,N_m=Q\rangle$ et soit $\sphericalangle(\overline{N_iN_{i+1}},\overline{PQ})=\varphi_i$. Alors [5]

$$[PQ]=\sum_{i=1}^{m-1}[N_iN_{i+1}]\cos\varphi_i\geqslant\cos\hat{\varphi}\sum_{i=1}^{m-1}[N_iN_{i+1}]=\cos\hat{\varphi}\,([P*Q]+\varepsilon)\,,$$

où $\hat{\varphi}=\max\varphi_i$ et ε est un nombre positif arbitrairement petit. Comme $\hat{\varphi}\to0$ lorsque $P,Q\to M$, il en résulte $[P*Q]:[PQ]\to1$ et de (3) il vient

$$[P'Q']:[PQ]\to1\,. \tag{5}$$

De (2), (3) et (5) nous obtiendrons

$$\sin\varphi'=\frac{|h(Q)-h(P)|}{[PQ]}\cdot\frac{[PQ]}{[P'Q']}=\sin\varphi\frac{[PQ]}{[P'Q']}\to\sin\psi_i$$

et, comme l'angle entre un vecteur et un plan ne surpasse pas $\pi/2$, on a $\varphi'\to\psi_i$. Nous avons donc démontré que la courbe $\langle A'*B'\rangle$ admet un vecteur tangent à droite (à gauche) au sens strict et si nous posons $\psi_i' = \lim\limits_{P',Q' \to M_i'} \varphi'$, alors $\psi_i' = \psi_i$.

Nous avons démontré que les angles que forment avec le plan τ les vecteurs tangents des courbes $\langle A \ast B \rangle$ et $\langle A' \ast B' \rangle$ aux points correspondants sont égaux.

Considérons maintenant la ligne brisée sphérique $\hat{W}_n$. Si nous développons la surface Φ, les points $\hat{M}_i$ et $\hat{M}_{i+1}$ décriront sur la surface de la sphère-unité des cercles Γ_i et Γ_{i+1} de centres au point $\hat{E}$ (extrémité du vecteur $l(A)$) jusqu'au moment les points $\hat{E}, \hat{M}_i, \hat{M}_{i+1}$ se trouveront dans un plan (après le développement de la surface Φ sur un plan, la courbe $\langle\langle A \ast B \rangle\rangle$ deviendra une courbe plane $\langle\langle A' \ast B' \rangle\rangle$) donc la longueur de l'arc $\langle \hat{M}_i \ast \hat{M}_{i+1} \rangle$ (grand cercle) n'augmentera pas (ce qui résulte de l'hypothèse que les droites parallèles à $l(A)$ peuvent avoir en commun avec la courbe $\langle A' \ast B' \rangle$ au plus un point ou un segment de droite). Autrement dit, les vecteurs tangents $p(M)$ de la courbe $\langle A' \ast B' \rangle$ peuvent former avec le vecteur $p(A)$ seulement des angles qui ne surpassent pas $\pi/2$, donc leurs extrémités se trouveront dans un ensemble limité par un grand cercle dont le centre est l'extrémité du vecteur $p(A')$. D'où il résulte évidemment que la longueur de la ligne brisée sphérique, après le développement de Φ sur un plan, n'augmentera pas.

Désignons par $\hat{W}_n^0$ la ligne brisée sphérique obtenue de la ligne brisée $\hat{W}_n$ après le développement de Φ sur un plan. Evidemment, la ligne brisée $\hat{W}_n^0$ sera inscrite dans la courbe $\langle\langle A' \ast B' \rangle\rangle$. D'où, en vertu du théorème III. 3.6 du travail [4], p. 223, nous avons: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que pour $n > n_0$

$$[\langle\langle A' \ast B' \rangle\rangle] < [W_n^0] + \varepsilon .$$

En tenant compte de ces considérations on obtient

$$[\hat{W}_n^0] \leqslant [\hat{W}_n] \quad \text{et} \quad [\hat{W}_n] \leqslant [\langle\langle A \ast B \rangle\rangle]$$

donc

$$[\langle\langle A' \ast B' \rangle\rangle] \leqslant [\hat{W}_n^0] + \varepsilon \leqslant [\hat{W}_n] + \varepsilon \leqslant [\langle\langle A \ast B \rangle\rangle] + \varepsilon$$

et, comme ε est un nombre positif arbitrairement petit, on a

$$[\langle\langle A' \ast B' \rangle\rangle] \leqslant [\langle\langle A \ast B \rangle\rangle]$$

ce qui prouve le lemme 4.

LEMME 5. *Soient S_1 et S_2 des surfaces convexes isométriques. Désignons par $\Gamma_i \subset S_i$, $i = 1, 2$, une courbe plane et par $\Gamma_i^h \subset S_i$, $h = 1, 2$, $i \neq h$, l'image de la courbe Γ_h suivant l'isométrie entre S_1 et S_2.*

Si la courbure intégrale de Γ_h est égale à la courbure intégrale de Γ_i^h, $h = 1, 2$, pour toutes les courbes planes Γ_i^h, $h = 1, 2$, alors l'image suivant l'isométrie d'un point lisse $M_1 \in S_1$ est un point lisse $M_2 \in S_2$.

Démonstration. Soit M_1 un point lisse de la surface S_1 et M_2 son image sur la surface S_2.

Le point M_2 ne peut être un sommet, car la courbure intégrale de la surface [2] en un sommet est positive et, comme la courbure intégrale de la surface est un invariant de l'isométrie, nous avons une contradiction avec le fait que la courbure intégrale de la surface S_1 au point M_1 est égale à zero.

Si M_2 était un point d'arête de la surface S_2, alors la section Γ_2 de la surface S_2 par un plan perpendiculaire à l'arête au point M_2 aurait une courbure intégrale différente de la courbure intégrale de la courbe correspondante Γ_1^2.

LEMME 6. *Soient S_1 et S_2 des surfaces convexes isométriques ayant un plan tangent commun $\tau(A)$ aux points $A_1 = A_2 = A$ correspondants suivant l'isométrie.*

Si, en profitant des notations du lemme 5, la courbure intégrale de Γ_h est égale à la courbure intégrale de Γ_i^h, $h = 1, 2$, pour toutes les courbes planes $\Gamma_h \in S_h$, $h = 1, 2$, alors il existe un entourage $U_1(A) \subset S_1$ du point A et un entourage $U_2(A) \subset S_2$, correspondant suivant l'isométrie, tel que pour les points correspondants suivant l'isométrie on a

$$h(M_1) = h(M_2)$$

où $h(M)$ désigne la distance du point M au plan $\tau(A)$.

Démonstrations. Admettons sans nuire à la généralité, que S_1 et S_2 se trouvent d'un même côté du plan $\tau(A)$.

Désignons par σ_1 un plan passant par les points M_1 et A et perpendiculaire au plan $\tau(A)$. Le plan σ_1 coupe la surface S_1 suivant une courbe et $\Gamma_1 = \langle A \ast M_1 \rangle$ désigne un de ses arcs. Soit $\Gamma_2^1 = \langle A \ast M_2 \rangle \subset S_2$ l'image, suivant l'isométrie, de la courbe Γ_1. Il existe un entourage connexe $U_1'(A)$ du point A sur S_1 tel que $\Gamma_1 \subset U_1'(A)$ et $k(A \ast M_1) \leqslant \pi/2$. Soit $U_2'(A) \subset S_2$ l'image, suivant l'isométrie, de $U_1'(A)$. Menons par les points $M \in \Gamma_2^1$ des droites $l(M)$ perpendiculaires au plan $\tau(A)$. Ces droites formeront une surface cylindrique Φ_2.

Nous développerons la surface Φ_2 sur le plan σ_1. Après le développement de Φ_2 la courbe Γ_2^1 se transformera en une courbe plane Γ_2^0, mais la distance $h(M_2)$ du point M_2 au plan $\tau(A)$ ne changera pas.

Comme $k(\Gamma_1) = k(\Gamma_2^1)$, en profitant du lemme 4 nous obtiendrons

$$k(\Gamma_2^0) \leqslant k(\Gamma_1) \,. \tag{6}$$

Dans la courbe Γ_2^0 nous inscrivons une ligne brisée W_n: $\langle N_0 = A, N_1, \ldots$ $\ldots, N_n = M_2^0 \rangle$ (ici M_2^0 désigne le point obtenu du point M_2 après le développement de Φ_2 sur le plan σ_1, $h(M_2) = h(M_2^0)$) telle que $k(\Gamma_2^0) = k(W_n) + \varepsilon$. Par l'hypothèse on a $k(\Gamma_1) \leqslant \pi/2$. Ensuite nous déformerons la ligne brisée W_n tout en conservant les longueurs de ses côtés et les valeurs absolues des angles entre ses côtés consécutifs pour obtenir une ligne brisée convexe W'_n. Les sommets de W'_n seront désignés par N'_i respectivement. Nous aurons évidemment

$$(7) \qquad k(W'_n) = k(W_n) \quad \text{et} \quad h(N'_n) \geqslant h(N_n)\,.$$

On a maintenant $W_n \to \Gamma_2^0$ et $W'_n \to \Gamma'_2$ (on peut former une sous-suite convergente), $N'_n \to M'_n$ et de (6), (7), [1] nous obtenons

$$(8) \qquad \begin{gathered} k(W_n) \to k(\Gamma_2^0)\,, \qquad k(W'_n) \to k(\Gamma'_2)\,, \\ h(N'_n) \to h(M'_2) \geqslant h(N_n)\,, \\ k(\Gamma'_2) = k(\Gamma_2^0) \leqslant k(\Gamma_1)\,. \end{gathered}$$

D'où, en vertu du lemme 2, nous avons

$$(9) \qquad h(M'_2) \leqslant h(M_1)\,.$$

Mais

$$(10) \qquad h(M'_2) \geqslant h(N_n) = h(M_2^0) = h(M_2)\,,$$

donc il s'ensuit de (9) et (10) que

$$(11) \qquad h(M_1) \geqslant h(M_2)\,.$$

Si maintenant les points M_1 et M_2 échangent leurs rôles, alors il existe un entourage $U''_2(A) \subset S_2$ et un entourage $U''_1(A) \subset S_1$, correspondant suivant l'isométrie, tels que pour les points $M_1 \in U''_1(A)$ et $M_2 \in U''_2(A)$ nous aurons

$$(12) \qquad h(M_2) \geqslant h(M_1)$$

et de (11) et (12) nous obtiendrons pour les points

$$M_1 \in U'_1(A) \cap U''_1(A) = U_1(A)\,, \qquad M_2 \in U'_2(A) \cap U''_2(A) = U_2(A)\,,$$
$$h(M_1) = h(M_2)$$

et le lemme 6 est prouvé.

LEMME 7. *Soient S_1 et S_2 des surfaces convexes isométriques.*

Si les courbes planes Γ_h et Γ_i^h, $h = 1, 2$, définies dans le lemme 5, admettent des courbures intégrales égales pour chaque courbe plane $\Gamma_h \subset S_h$, $h = 1, 2$, alors chaque point lisse $A_1 \in S_1$ possède un entourage $U_1(A_1) \subset S_1$ congruent au sens large avec un entourage $U_2(A_2) \subset S_2$ correspondant à $U_1(A_1)$ suivant l'isométrie.

Démonstration. Nous utiliserons les notations du lemme 6.

Considérons les segments de droite $\langle AM_1\rangle$ et $\langle AM_2\rangle$. Nous prouverons, en répétant le raisonnement donné dans [3], p. 64, que $[AM_1] = [AM_2]$. Dans ce but nous développons la surface cylindrique Φ_2 sur un plan. Puisque $h(M') = h(M'')$ pour tous les points $M' \in \langle A{\ast}M_1\rangle$ et $M'' \in \langle A{\ast}M_2\rangle$ correspondants suivant l'isométrie, on a $\Gamma_2^0 = \Gamma_1$, d'où $[AM_1] = [AM_2^0]$.

Après le développement de Φ_2, la longueur du segment $\langle AM_2\rangle$ ne diminuera pas, donc

$$[AM_2] \leqslant [AM_2^0] = [AM_1]\,. \tag{13}$$

Si les points M_1 et M_2 échangent leurs rôles, on aura

$$[AM_1] \leqslant [AM_2] \tag{14}$$

et de (13), (14)

$$[AM_1] = [AM_2]$$

pour $M_1 \in U_1(A) \subset S_1$, $M_2 \subset U_2(A) \subset S_2$.

Admettons maintenant que les surfaces S_1 et S_2 sont tangentes au point $A = A_1 = A_2$ et $M_1 = M_2$. Alors $\Gamma_2 = \Gamma_1$, sinon Γ_2^0 ne serait pas identique à Γ_1.

Nous avons donc obtenu que les courbes Γ_1 et Γ_2 sont identiques. Prenons maintenant les points $P_1 \in U_1(A)$ et $P_2 \in U_2(A)$ correspondants suivant l'isométrie. Désignons par $\psi_i = \langle A{\ast}P_i\rangle$, $i = 1, 2$, la section de la surface S_i par le plan contenant la droite AP_i et perpendiculaire à $\tau(A)$.

En vertu du théorème 3, [2], p. 280, et de l'isométrie des surfaces S_1 et S_2 il résulte qu'au point A l'angle entre les tangentes des courbes ψ_1 et Γ_1 est égal à l'angle entre les tangentes des courbes ψ_2 et Γ_2. D'où il résulte que les courbes ψ_1 et ψ_2 sont identiques, donc $P_1 = P_2$. Nous avons donc obtenu que $U_1(A) = U_2(A)$, ce qui prouve le lemme 7.

LEMME 8. *Le lemme 7 reste vrai si A_1 est un point d'arête de la surface convexe.*

Démonstration. Le raisonnement du lemme 7 peut être répété si au lieu du plan tangent commun des surfaces S_1 et S_2 on prend un plan d'appui $\tau(A)$ divisant l'angle entre les plans d'appui frontières au point A en deux parties égales (les angles entre les plans d'appui frontières des surfaces S_1 et S_2 sont égaux, comme le montre la démonstration du lemme 5). Les courbes Γ_1 et Γ_2 forment des angles égaux avec le plan $\tau(A)$ au point A et tous les lemmes 1-7 seront vrais, car les démonstrations ne changeront pas si les courbes correspondantes suivant l'isométrie forment un angle positif au lieu d'un angle égal à zéro avec un plan ou une droite au point A. Donc il existe un entourage du point A satisfaisant aux conditions du lemme 7.

LEMME 9. *Le lemme 7 reste vrai si A_1 est un sommet.*

Démonstration. On voit aisément que l'égalité des courbures intégrales des courbes correspondantes suivant l'isométrie (Γ_h et Γ_i^h dans les notations du lemme 5) entraîne l'identité des cônes tangents des surfaces S_1 et S_2 au point $A_1 = A_2 = A$.

Au lieu du plan tangent commun $\tau(A)$ nous prendrons maintenant un plan d'appui $\tau(A)$ formant avec toutes les génératrices du cône tangent un angle moindre de $\pi/2$. En répétant les raisonnements du lemme 8 nous obtiendrons la démonstration de notre lemme.

THÉORÈME. *Soient S_1 et S_2 des surfaces convexes isométriques.*

Désignons par $\Gamma_i \subset S_i$, $i = 1, 2$, une courbe plane et par $\Gamma_i^h \subset S_i$, $h = 1, 2$, $i \neq h$, l'image, suivant l'isométrie entre S_1 et S_2, de la courbe $\Gamma_h \subset S_h$.

Si les courbures intégrales des courbes Γ_h et Γ_i^h sont égales pour toutes les courbes planes $\Gamma_h \subset S_h$, $h = 1, 2$, alors les surfaces S_1 et S_2 sont congruentes au sens large.

Démonstration. Soient $D_1 \subset S_1$ et $D_2 \subset S_2$ des domaines fermés correspondants suivant l'isométrie. Comme chaque point de D_1 a un entourage congruent à un entourage correspondant de D_2, il existe, en vertu du lemme de Borel, un nombre fini de tels domaines qui couvrent le domaine fermé D_1. En profitant des lemmes 7, 8 et 9 nous obtiendrons immédiatement la conclusion du théorème pour les domaines D_1 et D_2. Comme le domaine D_1 peut différer arbitrairement peu de la surface S_1, le théorème est ainsi démontré.

Remarque. Le théorème donné plus haut peut être prouvé en profitant seulement du lemme 7. Notamment, supposons que les surfaces S_1 et S_2 aient des entourages du point A égaux, $U_1(A) = U_2(A)$. Nous élargirons l'ensemble $U_1(A)$ d'une façon continue jusqu'un entourage $U(A)$, dans lequel S_1 et S_2 sont identiques et différentes en dehors de $U(A)$.

Considérons l'ensemble G des points frontières de l'ensemble $U(A)$. L'ensemble G est une somme d'ensembles connexes qui ne peuvent pas être des points isolés. L'ensemble $S_1 - U(A) - G$ est une somme de domaines. L'ensemble G ne contient pas de points lisses de la surface S_1 et tous les points de G ne peuvent être des sommets. Donc, l'ensemble G contient au moins un point d'arête P de la surface S_1. Désignons par $\tau^+(P)$ le plan d'appui frontière de S_1 du côté de $U(A)$, et par $\tau^-(P)$ le deuxième plan d'appui frontière de la surface S_1 au point P. Les plans $\tau^+(P)$ et $\tau^-(P)$ sont aussi des plans d'appui frontières de la surface S_2. Soient $M_1 \in S_1 - U(A)$ et $M_2 \in S_2 - U(A)$ des points correspondants suivant l'isométrie et assez proches P. Maintenant nous pouvons appliquer le lemme 7 relativement aux points M_1 et M_2 en prenant le plan $\tau^-(P)$ pour plan tangent. Nous obtenons $M_1 = M_2$, donc l'ensemble G est vide et le théorème est ainsi prouvé.

Travaux cités

[1] А. Д. Александров (A. D. Aleksandrov), *Теория кривых на основе приближения ломаными*, У. М. Н. 2 (3) (1947), pp. 182-184.

[2] — *Внутренная геометрия выпуклых поверхностей*, Moskwa-Leningrad 1948.

[3] А. В. Погорелов (A. W. Pogorielov), *Изгибание выпуклых поверхностей*, Moskwa-Leningrad 1951.

[4] T. Radó, *Length and area*, New York 1948.

[5] K. Radziszewski, *Sur la courbure intégrale d'une classe de courbes*, Ann. Univ. M. C.-Skłodowska 16.

[6] — *Sur un théorème de Pogorielov*, Ann. Univ. M. C.-Skłodowska 16.

[7] A. Winter, *On isometric surfaces*, Amer. Math. J. 74 (1952), pp. 198-214.

Reçu par la Rédaction le 1. 6. 1962