ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1964)

Quelques invariants de la géométrie centro-affine des courbes gauches

par J. Merza (Debrecen)

Dans son article [1] M. W. Haack a donné une caractéristique géométrique des invariants fondamentaux de la géométrie unimodulaire des courbes gauches au moyen du cône quadratique osculateur en un point de la courbe. En rapport avec ces résultats M. L. A. Santaló a démontré dans son travail [4] quelques élégants théorèmes. Le but de cette remarque est d'établir la caractéristique simple d'un invariant — jusqu'ici défini formellement — dans la géométrie centro-affine différentielle des courbes gauches et, en relation avec elle, quelques théorèmes de caractère projectif.

Dans l'étude de la courbe gauche

$$x = x(s)$$

rapportée à son arc centro-affine, nous employons le repère d'ordre minimum défini le long de la courbe. Ce repère est composé du vecteur de position x, du vecteur tangent t et du vecteur de la normale principale (I. Popa [2])

$$m = x'' - \tfrac{1}{3}\tau x' \tag{1}$$

(τ est la torsion centro-affine). Désignons les coordonnées relatives au repère vectoriel $\{x, t, m\}$ par les lettres x_1, x_2, x_3 (1). On peut obtenir le cône osculateur quadratique comme la limite d'un cône qui contient la tangente de la courbe au point considéré P_0 et quatre droites menées par le point P_0 parallèlement aux tangentes en quatre points voisins du point P_0. Le vecteur de position d'un point de ce cône K

$$y = x_1 x + x_2 t + x_3 m$$

doit satisfaire à l'équation

$$\varphi(y, y) = 0 ,$$

(1) En fixant le vecteur x au centre de l'espace on doit écrire $x_1 = z_1 - 1$, $x_2 = z_2$ $x_3 = z_3$.

où $\varphi(x, y)$ est une fonction scalaire bilinéaire des deux arguments. L'équation du cône cherché aura la forme

$$(2)\qquad \varphi(x, x)x_1^2+\varphi(t, t)x_2^2+\varphi(m, m)x_3^2+2\varphi(x, t)x_1x_2+2\varphi(x, m)x_1x_3+ \\ +2\varphi(t, m)x_2x_3 = 0\,.$$

Avant de calculer les coefficients il est nécessaire de déduire les dérivées des vecteurs du repère.

On a évidemment

$$x' = t, \qquad t' = m+\tfrac{1}{3}\tau t\,.$$

En dérivant (1) et en utilisant la relation

$$x''' = x+p_2x'+\tau x''$$

dans laquelle p_2 est la courbure centro-affine, nous obtenons

$$m' = x+kt+\tfrac{2}{3}\tau m$$

où k est la courbure d'ordre minimum définie par

$$k = p_2-\tfrac{1}{3}\tau'+\tfrac{2}{9}\tau^2\,.$$

Écrivons les conditions concernant les coefficients du cône K. Le cône K contenant la droite tangente, on a

$$\varphi(t, t) = 0\,.$$

Ce cône devant contenir les quatre tangentes voisines, les quatre dérivées de cette expression doivent s'annuler et nous obtenons ainsi les quatre équations suivantes:

$$\varphi(t, m) = 0\,,$$
$$\varphi(x, t)+\varphi(m, m) = 0\,,$$
$$\varphi(x, m)+\tfrac{1}{3}\tau\,\varphi(m, m) = 0\,,$$
$$\varphi(x, x)-\varkappa\varphi(m, m) = 0\,.$$

L'invariant $\varkappa$ figurant dans la dernière équation est l'invariant dual de la courbure k; on a

$$\varkappa = k-\tfrac{1}{3}\tau'\,.$$

L'équation du cône K s'écrit donc sous la forme

$$(3)\qquad \varkappa x_1^2+x_3^2-2x_1x_2-\tfrac{2}{3}\tau x_1x_3 = 0\,.$$

Ce cône coupe le plan osculateur $x_1 = 0$ suivant la tangente, par conséquent le plan osculateur se confond avec le plan polaire de la tangente par rapport au cône K.

Le cône K coupe le plan rectifiant centro-affine suivant la droite tangente et la droite r:

$$(4) \qquad \varkappa x_1 - 2x_2 = 0\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

De cette équation résulte le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *L'invariant centro-affine $\varkappa$ est égal au double indicateur de direction de la droite d'intersection du plan rectifiant et du cône K droite différente de la tangente.*

Dans les raisonnements ultérieurs nous supposons $\varkappa \neq 0$ et nous introduisons les coordonnées homogènes. La conique qui est la section du cône K avec le plan à l'infini aura les équations

$$(5) \qquad \varkappa x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - \tfrac{2}{3}\tau x_1 x_3 = 0\,, \qquad x_4 = 0\,.$$

En utilisant cette conique on peut constater que la droite polaire du point à l'infini $(1, 0, 0, 0)$ de la droite x par rapport à la conique (5) est la droite

$$(6) \qquad \varkappa x_1 - x_2 - \tfrac{1}{3}\tau x_3 = 0\,, \qquad x_4 = 0$$

et par suite le plan polaire de la droite x par rapport au cône K est le plan de projection de la droite (6), c'est-à-dire le plan

$$(7) \qquad \varkappa x_1 - x_2 - \tfrac{1}{3}\tau x_3 = 0\,.$$

Ce plan polaire coupe le plan rectifiant centro-affine suivant la droite $\bar{r}$ dont les équations sont

$$(8) \qquad \varkappa x_1 - x_2 = 0\,, \qquad x_3 = 0$$

et le plan osculateur suivant la droite

$$(9) \qquad x_2 + \tfrac{1}{3}\tau x_3 = 0\,, \qquad x_1 = 0$$

que nous désignerons par la lettre s. Ajoutons aux droites (4) et (8) les droites x et t et ensuite déterminons le rapport anharmonique des quatre droites. Un simple calcul nous fournit le résultat

$$(trx\bar{r}) = -1\,.$$

THÉORÈME 2. *La droite tangente et la droite d'intersection déterminée par le cone osculateur K et par le plan rectifiant centro-affine sépare harmoniquement la droite du vecteur de position et la droite $\bar{r}$, où $\bar{r}$ est la ligne d'intersection du plan rectifiant avec le plan polaire de la droite du vecteur de position.*

Nous avons déterminé auparavant la droite d'intersection (9) du plan polaire de la droite x avec le plan osculateur. Cette droite s est en même temps la droite polaire du plan rectifiant. On reconnaît immédiatement que le plan rectifiant passe par les droites x et t, et par suite sa droite polaire est la droite d'intersection des plans polaires des droites x et t. Le plan polaire de la droite t étant le plan osculateur et celui de la droite x étant le plan (7), on constate que la droite polaire est la droite (9).

Dans le théorème suivant nous obtiendrons une méthode pour construire la normale principale d'ordre minimum centro-affine. Il est facile de voir que les équations de la droite de la normale principale ordinaire centro-affine sont

$$x_2 - \tfrac{1}{3}\tau x_3 = 0\,, \qquad x_1 = 0\,.$$

Considérons les droites t, m, s, n et formons le rapport anharmonique $(tmsn)$. Nous obtiendrons

$$(tmsn) = -1\,, \qquad \tau \neq 0\,.$$

Théorème 3. *On peut déterminer la normale principale d'ordre minimum centro-affine en construisant la droite harmoniquement associée à la tangente par rapport au couple composé de la normale principale ordinaire centro-affine et de la droite polaire du plan rectifiant centro-affine.*

Maintenant passons à la détermination de l'axe du complexe linéaire osculateur. Soit t le vecteur de direction d'une droite et ξ le moment de ce vecteur. Le complexe linéaire est formé de droites dont les coordonnées plückériennes satisfont à l'équation

$$\pi t + p\xi = 0\,.$$

Ce qui nous intéresse ici, c'est la détermination du vecteur p de la direction diamétrale du complexe linéaire. A cette fin remarquons que le complexe linéaire osculateur doit contenir la tangente au point considéré et quatre tangentes aux points voisins. Cela veut dire que les quatre premières dérivées de l'équation

$$\pi t + (prt) = 0$$

obtenue de l'équation ci-dessus par la substitution

$$\xi = [r, t]$$

doivent être nulles. Faisons nos calculs dans un repère d'ordre minimum, prenons en considération que $r \equiv x$, $t \equiv x'$ et supposons que $\tau \neq 0$. La dérivation et les substitutions nécessaires donnent

$$\begin{aligned} \pi m + (pxm) &= 0\,, \\ \pi x + (ptm) &= 0\,, \\ \tau(ptm) - 2(pxt) &= 0\,, \\ (\tfrac{1}{6}\tau^2 + \tau')(ptm) - 2(pxm) &= 0\,. \end{aligned}$$

On peut déterminer la direction de l'axe du complexe linéaire en utilisant les deux dernières conditions. Mettons le vecteur p sous la forme

$$p = x + \alpha t + \beta m .$$

Après avoir substitué cette forme du vecteur p dans les deux dernières conditions on trouve

$$\alpha = -\tfrac{1}{12}(\tau^2 + 6\tau') , \qquad \beta = \tfrac{1}{2}\tau .$$

Le point à l'infini de la direction diamétrale du complexe sera $(1, \alpha, \beta, 0)$. Le plan polaire

$$(\varkappa - \alpha - \tfrac{1}{3}\beta\tau)x_1 - x_2 + \tfrac{1}{6}\tau x_3 = 0$$

de la direction diamétrale par rapport au cône K coupe le plan osculateur suivant la droite

$$x_2 - \tfrac{1}{6}\tau x_3 = 0 , \qquad x_1 = 0 .$$

En désignant cette droite par d et en formant le rapport anharmonique $(tmds)$ on obtient le résultat

$$(tmds) = -2 .$$

En rapprochant ce résultat des théorèmes précédents nous obtenons un procédé fondé sur des notions projectives pour la construction du repère centro-affine d'ordre minimum.

THÉORÈME 4. *Le plan osculateur est le plan polaire de la tangente relatif au cône K. Soient d et s les droites d'intersection du plan osculateur avec les plans polaires de la direction diamétrale du complexe linéaire osculateur et de la droite du vecteur de position. La droite qui forme avec les droites d, s et avec la tangente le rapport anharmonique*

$$(dstm) = -2$$

est la normale principale centro-affine d'ordre minimum.

En effectuant la construction suivante on peut trouver une formule intégrale pour la torsion centro-affine. Menons un plan par le vecteur de position et par la direction diamétrale du complexe linéaire osculateur. L'équation de ce plan aura la forme

$$\beta x_2 - \alpha x_3 = 0 .$$

Employons la condition $\tau \neq 0$ et écrivons cette équation sous la forme

$$x_2 - \frac{\alpha}{\beta} x_3 = 0 .$$

Ce plan coupe le plan osculateur suivant la droite

$$x_2 - \frac{\alpha}{\beta} x_3 = 0 , \qquad x_1 = 0$$

que nous désignons par la lettre g. Le calcul du rapport anharmonique $(mgtd)$ nous donne le résultat

$$(mgtd) = 1 - \frac{6\alpha}{\beta\tau}$$

d'où, après la substitution des quantités α et β, nous obtenons

$$(mgtd) = 2 + \frac{6\tau'}{\tau^2}.$$

Comme $\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{\tau}\right) = -\frac{6\tau'}{\tau^2}$, on a

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{\tau}\right) = 2 - (mgtd).$$

A l'aide du théorème 4 on peut écrire

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{\tau}\right) = -[(mgtd) + (mtsd)].$$

En intégrant cette expression nous aurons le

THÉORÈME 5. *La torsion centro-affine est égale à l'intégrale suivante*:

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{6}\int [(mgtd) + (mtsd)]\, ds + C.$$

En terminant remarquons qu'un calcul facile permet de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 6. *Si l'on remplace les quantités centro-affines hyperboliques par les quantités centro-affines paraboliques correspondantes, les théo. rèmes* 1-5 *seront aussi vrais dans la géométrie centro-affine parabolique-*

Travaux cités

[1] W. Haack, *Eine geometrische Deutung der Affin-Invarianten einer Raumkurve*, Math. Z. 38 (1934), p. 155-162.

[2] I. Popa, *Géométrie centro-affine hyperbolique des courbes gauches*, Ann. Sci. Univ. Jassy 21 (1934-1935), p. 78-140.

[3] — *Géométrie centro-affine parabolique des courbes et des surfaces*, Ann. Sci. Univ. Jassy 21 (1934-1935), p. 141-181.

[4] L. A. Santaló, *A geometrical characterization for the affine differential invariants of a space curve*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), p. 625-632.

[5] P. A. Shirokov, A. P. Shirokov, *Géométrie différentielle affine*, Moscou 1959 (en russe).

Reçu par la Rédaction le 22. 9. 1960