ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXV (1971)

Sur les deux notions de l'invariant caractéristique

par Zenon Moszner (Kraków)

En géométrie on définit la notion de l'invariant caractéristique de deux manières. Soit n un nombre entier positif quelconque, X un espace arbitraire, $\mathscr{G}$ un groupe de transformations de X et E un ensemble donné, dont la puissance est au moins égale à celle de X^n.

Définition 1. On dit que la fonction

$$F(p_1, \ldots, p_n)\colon X^n \to E$$

est un *invariant par rapport au groupe* $\mathscr{G}$ si

$$F(p_1, \ldots, p_n) = F\big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big) \tag{1}$$

pour chaque φ de $\mathscr{G}$.

Définition 2. L'invariant $C(p_1, \ldots, p_n)$ est dit *fondamental* s'il existe, pour chaque invariant $F(p_1, \ldots, p_n)$, une fonction f telle que

$$F(p_1, \ldots, p_n) = f\big(C(p_1, \ldots, p_n)\big) \tag{2}$$

sur X^n.

Définition 3. Soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe d'un groupe $\mathscr{G}^*$ de transformations de X. On dit que l'invariant $C(p_1, \ldots, p_n)$ par rapport au groupe $\mathscr{G}$ est un *invariant caractéristique du groupe* $\mathscr{G}$ *par rapport au groupe* $\mathscr{G}^*$ si pour chaque φ de $\mathscr{G}^*$ on a:

$$\bigwedge_{p_1, \ldots, p_n \in X} \big[C(p_1, \ldots, p_n) = C\big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big)\big] \to (\varphi \in \mathscr{G}). \tag{3}$$

Citons encore la

Définition 4. Désignons par $\mathscr{G}^n$ le groupe des transformations Φ de X^n qui sont définies comme il suit:

$$\Phi(p_1, \ldots, p_n) \overset{\mathrm{df}}{=} \big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big) \tag{4}$$

pour une φ de $\mathscr{G}$.

Rappelons enfin la

Définition 5. L'ensemble

$$O(p) \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi(p);\, \varphi \in \mathscr{G}\}$$

est dit *l'orbite du point p de X* par rapport au groupe $\mathscr{G}$. Nous disons qu'une transformation φ ne change pas les orbites du groupe $\mathscr{G}$ si

$$\varphi\big(O(p)\big) \subset O(p)$$

pour chaque p de X.

On démontre dans cette note que:

(T_1) *Il existe toujours des invariants fondamentaux.*

(T_2) *L'invariant caractéristique peut ne pas exister. Il existe seulement (dans le cas s'il n'existe dans l'ensemble $(\mathscr{G}^*)^n \setminus \mathscr{G}^n$ aucune transformation qui ne change pas les orbites du groupe $\mathscr{G}$ sur X. S'il existe, alors les invariants fondamentaux sont en même temps des invariants caractéristiques, mais l'inverse n'a pas nécessairement lieu.*

Démonstration du théorème (T_1). Désignons par $\boldsymbol{F}$ la famille de toutes les orbites du groupe $\mathscr{G}^n$ sur l'espace X^n. On sait que deux orbites sont identiques ou disjointes et que la famille $\boldsymbol{F}$ couvre l'espace X^n. Considérons une fonction biunivoque $c(O)\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ est posons

$$C(p_1, \ldots, p_n) = c(O) \quad \text{si } (p_1, \ldots, p_n) \in O. \tag{5}$$

Puisque $(p_1, \ldots, p_n)$ et $\big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big)$ appartiennent à la même orbite, on a

$$C(p_1, \ldots, p_n) = C\big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big).$$

Soit F un invariant; dans ce cas, d'après (1), F est constante sur les orbites du groupe $\mathscr{G}^n$ et en désignant

$$\tilde{F}(O) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(p_1, \ldots, p_n) \quad \text{pour } (p_1, \ldots, p_n) \in O$$

il suffit de poser

$$f(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \tilde{F}\big(c^{-1}(x)\big)$$

pour avoir (2).

Démonstration du théorème (T_2). Supposons qu'il n'existe dans l'ensemble $(\mathscr{G}^*)^n \setminus \mathscr{G}^n$ aucune transformation qui ne change pas les orbites du groupe $\mathscr{G}^n$ sur X^n. Dans ce cas pour chaque transformation $\Phi(p_1, \ldots, p_n) = \big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big)$ de $(\mathscr{G}^*)^n \setminus \mathscr{G}^n$ il existe au moins une orbite O et un point $(p_1, \ldots, p_n)$ de cette orbite tels que $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$ appartient à une orbite O_1 différente de O. D'après (5) nous avons

$$C(p_1, \ldots, p_n) = c(O) \neq c(O_1) = C\big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big),$$

donc, pour avoir (3), il suffit de remarquer que

$$\Phi \in [(\mathscr{G}^*)^n \setminus \mathscr{G}^n] \equiv \varphi \in (\mathscr{G}^* \setminus \mathscr{G}).$$

Supposons à présent qu'il existe une transformation $\Phi(p_1, \ldots, p_n) = \big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big)$ de $(\mathscr{G}^*)^n \setminus \mathscr{G}^n$, qui ne change pas les orbites du groupe $\mathscr{G}^n$ sur X^n. Il en résulte que $\varphi \notin \mathscr{G}$ et que pour chaque invariant C:

$$C(p_1, \ldots, p_n) = C\big(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)\big) \quad \text{pour } (p_1, \ldots, p_n) \in X$$

puisque C, étant un invariant, est constant sur les orbites de $\mathscr{G}^n$ sur X^n et Φ ne change pas les orbites. Donc (3) n'a pas lieu.

Pour achever la démonstration du théorème (T_2) il suffit de poser $\mathscr{G}^* = \mathscr{G}$ et de remarquer que dans ce cas tous les invariants (non seulement les invariants fondamentaux) sont des invariants caractéristiques.

Remarques et exemples.

1. On voit facilement que chaque invariant fondamental doit être de la forme

$$f(C(p_1, \ldots, p_n))$$

où C est un invariant fondamental arbitrairement fixé et f est une fonction biunivoque et $f\colon C(X^n) \to E$.

2. La condition sous laquelle il existe un invariant caractéristique, n'est pas équivalente à la condition que les familles des orbites de $\mathscr{G}^n$ et $(\mathscr{G}^*)^n$ sur X^n soient différentes. Par exemple prenons pour X le plan, pour $\mathscr{G}$ le groupe des translations de la forme $x' = x+a$, $y' = y+a$ et pour $\mathscr{G}^*$ le groupe de toutes les transformations de X sur X. La famille des orbites du groupe $\mathscr{G}$ sur X est évidemment différente de celle des orbites de $\mathscr{G}^*$ sur X, mais il existe dans $\mathscr{G}^* \setminus \mathscr{G}$ des transformations qui ne changent pas les orbites de $\mathscr{G}$ sur X.

3. L'invariant caractéristique pour un k est aussi un invariant caractéristique pour chaque $n > k$, évidemment pour les mêmes $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}^*$ (on peut éventuellement remplacer $\mathscr{G}^*$ par un sous-groupe).

4. En prenant pour X la droite, pour $\mathscr{G}$ le groupe des translations sur X et pour $\mathscr{G}^*$ le groupe des transformations affines aussi sur X, nous voyons que la condition du téorème (T_2) est vérifié pour $n = 2$, donc dans ce cas il existe des invariants caractéristiques (par exemple $C(p_1, p_2) = p_1 - p_2$), mais pour $n = 1$ l'invariant caractéristique n'existe pas.

5. Ajoutons à l'espace X un point p^* et élargissons les groupes $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}^*$ en supposant que p^* soit un point fixe pour chaque transformation de $\mathscr{G}$ et de $\mathscr{G}^*$. Prolongeons l'invariant caractéristique $C(p_1, \ldots, p_n)$ sur X^n (s'il existe) à l'espace $[X \cup \{p^*\}]^n$ en posant pour un $c \in E$: $C(p_1, \ldots, p_n) = c$ s'il existe un v tel que $p_v = p^*$ On voit que cet invariant prolongé est dès lors caractéristique et qu'il peut être fondamental seulement dans le cas où $c \notin C(X^n)$. Cette remarque fournit une démonstration nouvelle, moins banale que ci-dessus, de la fin du théorème (T_2).

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1970