

H. WOŹNIAKOWSKI (Warszawa)

**POLYNOMIAL DECOMPOSITION INTO QUADRATIC FACTORS
WITH CONTROLLED ACCURACY BY BAIRSTOW'S METHOD**

1. Procedure declaration.

procedure *Bairstow* $sp(n, a, eps)$;

value n, eps ;

integer n ;

real eps ;

array a ;

comment The procedure *Bairstow* sp calculates the quadratic factors of the real polynomial $w(x)$.

Data:

n — degree of the polynomial,

$a[0:n]$ — array of coefficients of the polynomial ($a[n]$ — coefficient of $x^n, \dots, a[0]$ — free term),

eps — the relative machine precision.

Results:

$a[0:n-1]$ — table of coefficients of the quadratic factors of the polynomial $w(x)$. We have $a[2 \times m] = r_m, a[2 \times m + 1] = p_m (m = 0, 1, \dots, \text{entier}(n/2) - 1)$, where $x^2 - p_m x - r_m$ is the m -th factor of $w(x)$. For odd n $a[n-1]$ is a real zero of $w(x)$;

begin

integer $i, i2, j, n3$;

real $an, a1, ea1, a0, ea0, b1, b0, p, pp, dp, r, rr, dr, q, k, s, v, z$;

Boolean H ;

$an := a[n]$;

$n3 := n - 3$;

for $i := 0$ **step** 2 **until** $n3$ **do**

begin

$H := \text{false}$;

$p := r := ea1 := ea0 := 0$;

```

a1 := a[i + 1];
a0 := a[i];
b1 := a[i + 3];
b0 := a[i + 2];
comment start with factor  $m(x) = x \uparrow 2$ ;
go to ZE;
ite : q := p × p + 4 × r;
      v := sqrt(abs(q));
      s := if q ≤ 0
            then sqrt(abs(r))
            else .5 × (v + abs(p));
a0 := an;
a1 := b1 := b0 := ea0 := ea1 := 0;
for j := n - 1 step -1 until i do
  begin
    q := p × b0 + r × b1 + a1;
    b1 := b0;
    b0 := q;
    z := p × a0;
    dp := r × a1;
    dr := z + dp;
    q := dr + a[j];
    a1 := a0;
    a0 := q;
    q := abs(z) + abs(dp) + abs(dr) + abs(q);
    ea0 := ea1 + ea0 × s;
    ea1 := q + ea1 × s
  end of the calculation of the coefficients of the remainders
    a1, a0, b1, b0 and of the quantities needed for error estimation;
if v > .2 × s / (n - i)
  then begin
    z := 2 × eps / v;
    ea0 := s × ea1 × z;
    ea1 := (ea1 - q) × z
  end
else begin
    z := ea0 × s + ea1;
    ea1 := ea0 × eps;
    ea0 := z × eps
  end of the calculation of the error estimates ea1, ea0

```

```

of  $a1$ ,  $a0$ ;
if  $H$ 
  then begin
     $q := a1 \times a1 + a0 \times a0$ ;
    if  $k \leq q \vee \text{abs}(a0) > ea0 \vee \text{abs}(a1) > ea1$ 
      then go to  $L$ ;
     $k := q$ 
  end of testing for maximum accuracy
else  $ZE$  : if  $\text{abs}(a0) \leq ea0 \wedge \text{abs}(a1) \leq ea1$ 
  then begin
     $H := \text{true}$ ;
     $k := a1 \times a1 + a0 \times a0$ 
  end of comparing  $a1$ ,  $a0$  with the error
    estimates;

 $pp := p$ ;
 $rr := r$ ;
 $s := b0 \times p + b1 \times r$ ;
 $z := b0 \times b0 - b1 \times s$ ;
if  $z = 0$ 
  then begin
    if  $H$ 
      then go to  $L$ ;
     $p := (\text{if } p \geq 0 \text{ then } 10^{-2} \text{ else } -10^{-2}) + p \times 1.01$ ;
     $r := r \times 1.01 + 10^{-2}$ ;
    go to  $ite$ 
  end small change of the quadratic factor in the case
    when the system of equations for determining
    the corrections is singular;

 $dp := (b1 \times a0 - a1 \times b0) / z$ ;
 $dr := (a1 \times s - a0 \times b0) / z$ ;
 $q := \text{abs}(p)$ ;
 $z := \text{abs}(r)$ ;
 $b1 := \text{abs}(dp)$ ;
 $b0 := \text{abs}(dr)$ ;
if  $b1 < eps \times q \wedge b0 < eps \times z$ 
  then go to  $L$ ;
 $s := b1 + b0$ ;
 $v := 3 \times (q + z + .1)$ ;
if  $s > v$ 
  then begin
     $v := v / s$ ;
     $dp := dp \times v$ ;

```

```

dr: = dr × v
    end of comparing the corrections with abs(p) and abs(r).
    If the corrections are too large they are reduced
    to enlarge the chance of determining the factor
    with smallest zeros;

p: = p + dp;
r: = r + dr;
go to ite;
L: v: = an;
z: = 0;
i2: = i + 2;
for j: = n - 1 step -1 until i2 do
    begin
        q: = a[j]: = pp × v + rr × z + a[j];
        z: = v;
        v: = q
    end of reducing the degree of the polynomial;
a[i]: = rr;
a[i + 1]: = pp
end i;
a[n - 1]: = -a[n - 1]/an;
if n/2 = n ÷ 2
    then a[n - 2]: = -a[n - 2]/an
end Bairstow sp

```

2. Method used. The used method is described in the author's paper [1].

3. Certification⁽¹⁾. The procedure *Bairstow sp* has been verified on 20 examples. A selection of examples being different in kind (polynomials with simple real zeros, in particular also near ones, with simple complex zeros, and with multiple zeros) is given in the table. It includes the exact zeros of the polynomials, the factors obtained on the Elliott 803 computer (on the left) and the factors obtained on the Odra 1204 computer (on the right).

TABLE

Example 1. 1, 2, 3, 4

$$x^2 - 3.00000011x + 2.00000010$$

$$x^2 - 6.99999990x + 11.9999995$$

Example 2. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3

$$x^2 - 1.110_{10} - 15x - .999999999$$

$$x^2 - 1.99999999x - 1.480_{10} - 15$$

$$x^2 - 1.944_{10} - 08x - 9.00000001$$

$$x + 2.00000001$$

$$x^2 - 3.0000000002x + 2.0000000001$$

$$x^2 - 6.9999999998x + 12.000000000$$

$$x^2 + .99999999997x - 2.0000000000$$

$$x^2 + 3.0000000000x - .257285_{10} - 20$$

$$x^2 - 1.9999999999x - 3.0000000002$$

$$x - 2.0000000001$$

⁽¹⁾ This section has been added by the editor of the algorithm.

Example 3. 1, 10, 100, 1000

$$x^2 - 11.0000000x + 9.99999995$$

$$x^2 - 1100.00001x + 99999.9999$$

$$x^2 - 101.00000000x + 99.999999999$$

$$x^2 - 1010.0000000x + 10000.000000$$

Example 4. -1.03, -1.02, -1.01, -1

$$x^2 + 2.0094737x + 1.00941027$$

$$x^2 + 2.05059264x + 1.05121380$$

$$x^2 + 2.0100031584x + 1.0100031436$$

$$x^2 + 2.0499968416x + 1.0505967301$$

Example 5 (polynomial $T_6(x)$).

$$-\cos \frac{\pi}{12}, -\cos \frac{\pi}{4}, -\cos \frac{5\pi}{12},$$

$$\cos \frac{5\pi}{12}, \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{12}$$

$$x^2 - .0669872983$$

$$x^2 - .4999999992$$

$$x^2 - .933012711$$

$$x^2 - .066987298108$$

$$x^2 - .49999999998$$

$$x^2 - .93301270194$$

Example 6. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4

$$x^2 - 1.99999722x + .999997719$$

$$x^2 - 3.99998669x + 3.99998314$$

$$x^2 - 5.99999665x + 9.00000969$$

$$x^2 - 8.00001944x + 16.0000860$$

$$x^2 - 2.0000000035x + 1.0000000030$$

$$x^2 - 4.0000000298x + 4.0000000298$$

$$x^2 - 7.0000665449x + 12.000171184$$

$$x^2 - 6.9999334219x + 11.999828682$$

Example 7. 1, 1, 1, 1, 1

$$x^2 - 2.01028804x + 1.00935951$$

$$x^2 - 2.00714050x + 1.00829932$$

$$x - .982571470$$

$$x^2 - 2.0147783418x + 1.0148616568$$

$$x^2 - 1.9943732214x + .99445681191$$

$$x - .99084843679$$

Example 8. 1, 1, i , $-i$

$$x^2 - 1.250_{10} - 09x + .999999999$$

$$x^2 - 2.00000001x + 1.00000000$$

$$x^2 - .136531_{10} - 11x + 1.0000000000$$

$$x^2 - 2.0000000000x + .99999999999$$

Example 9. i , i , i , $-i$, $-i$, $-i$

After more than 100 iterations no results were obtained.

Reference

[1] H. Woźniakowski, *Some remarks on Bairstow's method*, Zastosow. Matem. 11 (1969), pp. 213-220.

NUMERICAL LABORATORY
UNIVERSITY OF WARSAW

Received on 4. 9. 1968

H. WOŹNIAKOWSKI (Warszawa)

ALGORYTM 4

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI KWADRATOWE METODĄ BAIRSTOWA Z KONTROLOWANĄ DOKŁADNOŚCIĄ

STRESZCZENIE

Procedura *Bairstow sp* rozkłada wielomian $w(x)$ o współczynnikach rzeczywistych na czynniki kwadratowe.

Dane:

n — stopień wielomianu,

$a[0:n]$ — таблица коэффициентов полинома ($a[n]$ — коэффициент при $x^n, \dots, a[0]$ — член свободный),

eps — относительная машинная точность.

Результаты:

$a[0:n-1]$ — массив коэффициентов квадратичных множителей полинома $w(x)$.
 Jest $a[2 \times m] = r_m, a[2 \times m + 1] = p_m$ ($m = 0, 1, \dots, \text{entier}(n/2) - 1$),
 gdzie $x^2 - p_m x - r_m$ jest m -тым множителем полинома $w(x)$. Если n
 jest нечетное число, то $a[n-1]$ есть действительный нуль $w(x)$.

Узита метод *Bairstow sp* ест описана в работе автора [1]. Процедуру проверено на 20 примерах. Некоторые результаты вычислений приведены в таблице в § 3, содержащей точные нули полиномов, множители полученные на ЭВМ Эллиотт 803 (слева) и множители полученные на ЭВМ Одра 1204 (справа).

АЛГОРИТМ 4

Х. ВОЗЬНЯКОВСКИ (Варшава)

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМА НА КВАДРАТИЧНЫЕ МНОЖИТЕЛИ ПО МЕТОДУ БЭРСТОУ С КОНТРОЛИРОВАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

РЕЗЮМЕ

Процедура *Bairstow sp* разлагает полином $w(x)$ с вещественными коэффициентами на квадратичные множители.

Данные:

n — степень полинома,

$a[0:n]$ — массив коэффициентов полинома ($a[n]$ — коэффициент при $x^n, \dots, a[0]$ — свободный член),

eps , — относительная машинная точность.

Результаты:

$a[0:n-1]$ — массив коэффициентов квадратичных множителей полинома $w(x)$ такой, что $a[2 \times m] = r_m, a[2 \times m + 1] = p_m$ ($m = 0, 1, \dots, \text{entier}(n/2) - 1$), где $x^2 - p_m x - r_m$ является m -тым множителем $w(x)$. Если n — нечетное число, то $a[n-1]$ есть действительный нуль $w(x)$.

В процедуре *Bairstow sp* применяется метод описанный в работе автора [1]. Процедура была проверена на 20 примерах. Некоторые результаты вычислений приведены в таблице в § 3, содержащей точные нули полиномов, множители полученные на ЭВМ Эллиотт 803 (слева) и множители полученные на ЭВМ Одра 1204 (справа).