ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1971)

Les solutions non bornées d'un système parabolique d'équations

par J. CHABROWSKI (Katowice)

Dans ce travail nous démontrerons quelques théorèmes sur l'unicité et la représentation des solutions non bornées du problème de Cauchy pour le système parabolique d' équations de la forme

(1) $$L^k(u^1, \ldots, u^N) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^k(t, x) u_{x_i x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k(t, x) u_{x_j}^k + \sum_{l=1}^{N} c_l^k(t, x) u^l - u_t^k = 0,$$

$k = 1, \ldots, N$, dont les coefficients sont définis dans une couche H: $0 < t \leqslant T$, $x \in E_n$ (E_n étant l' espace euclidien à n dimensions). Les solutions qui vont être étudiées sont seulement bornées inférieurement par la fonction $-M \exp(a|x|^2)$, où $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, M et a étant des constantes positives. Nos considérations seront basées sur les propriétés des solutions non négatives du système (1) (voir [3]).

Dans la suite du présent travail nous admettons les hypothèses suivantes:

I. Les coefficients du système (1) sont bornés et hölderiens par rapport aux variables (t, x) dans H, ainsi que toutes les dérivées du premier ordre des coefficients $b_i^k(t, x)$ ($k = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, n$) par rapport aux variables x_j ($j = 1, \ldots, n$) et les dérivées du second ordre des coefficients $a_{ij}^k(t, x)$ ($k = 1, \ldots, N, i, j = 1, \ldots, n$) par rapport aux mêmes variables.

II. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(t, x)\xi_i \xi_j \geqslant a|\xi|^2$, $k = 1, \ldots, N$, pour tout vecteur $(\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n) \in E_n$ et pour $(t, x) \in H$, a set une constante positive.

III. $c_l^k(t, x) \geqslant 0$ pour $(t, x) \in H$ et pour $l \neq k$, $l, k = 1, \ldots, N$.

Les hypothèses I et II garantissent l' existence de la matrice des solutions fondamentales $\{\Gamma_{pq}(t, x; \tau, y)\}$, $p, q = 1, \ldots, N$, $(t, x), (\tau, y) \in H$ $t > \tau$ (voir [4], [5], chap. 9 ou [6]). Grâce à l'hypothèse II tous les éléments

$\Gamma_{pq}(t, x; \tau, y)$ de la matrice fondamentale sont non négatifs (voir [2], théorème 2.1).

Avant de passer à nos théorèmes nous introduisons quelques définitions.

Une fonction $f(t, x)$ est dite *régulière* par rapport au système (1) dans un ensemble $G \subset H$, si elle est continue dans G et admet les dérivées $f_{x_i}, f_{x_i x_j}, f_t$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ continues à l'intérieur de G.

Une suite de fonctions $\{u^i(t, x)\}$, $i = 1, \ldots, N$, est dite *solution* du système (1) régulière dans G, si toute fonction $u^i(t, x)$ est régulière dans G et si elles satisfont à (1) à l'intérieur de G.

THÉORÈME 1. *Supposons que les hypothèses* I, II *et* III *soient satisfaites. Si* $\{u^k(t, x)\}$, $k = 1, \ldots, N$, *est une solution de* (1) *régulière dans* $\bar{H}$ *satisfaisant aux inégalités*

$$u^k(t, x) \geqslant -M \exp(a|x|^2), \qquad k = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in \bar{H}$, *il existe une constante positive* δ *telle que*

$$u^k(t, x) = \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) u^p(0, y)\, dy, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

pour $(t, x) \in (0, \delta] \times E_n$.

Démonstration. En vertu du théorème 3 dans [5] (chap. 9, sec. 4) la suite des fonctions

$$w^k(t, x) = M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(a|y|^2)\, dy, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

constitue la solution du système (1) avec la condition initiale $w^k(0, x) = M\exp(a|x|^2)$, $k = 1, \ldots, N$, dans une couche $(0, T_1] \times E_n$, où $T_1 = \min(T, \bar{c}/a)$, $\bar{c}$ étant une constante positive dépendant des coefficients du système (1). Les fonctions

$$v^k(t, x) = u^k(t, x) + w^k(t, x), \qquad k = 1, \ldots, N,$$

satisfont à (1) dans $(0, T_1] \times E_n$ et aux conditions initiales

$$v^k(0, x) = u^k(0, x) + M \exp(a|x|^2) \geqslant 0, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

pour $x \in E_n$, donc d'après le théorème 1 dans [1] nous avons

$$v^k(t, x) \geqslant 0, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in [0, T_1] \times E_n$. Il résulte du théorème 2 dans [3] que à tout $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < T_1)$ on peut faire correspondre un nombre $\delta_1 > 0$ tel qu'on ait

$$v^k(t, x) = \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) v^p(0, y)\, dy, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in (0, \delta_1] \times E_n$, donc

$$u^k(t, x) + M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(a|y|^2)\,dy$$

$$= \int_{E_n} \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y)[u^p(0, y) + M \exp(a|y|^2)]\,dy,$$

d'où il résulte l'égalité (2).

Théorème 2. *Supposons que les hypothèses* I, II *et* III *soient satisfaites. Soient* $\{u_l^k(t, x)\}$, $k = 1, \ldots, N$, $l = 1, 2$, *des solutions régulières dans* $\bar{H}$ *du système* (1), *satisfaisant aux conditions*

$$u_1^k(0, x) = u_2^k(0, x), \quad k = 1, \ldots, N,$$

pour $x \in E_n$ *et*

$$u_l^k(t, x) \geqslant -M \exp(a|x|^2), \quad k = 1, \ldots, N,\ l = 1, 2,$$

dans $\bar{H}$. *Alors*

$$u_1^k(t, x) = u_2^k(t, x), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

pour $(t, x) \in \bar{H}$.

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème 1, nous montrons que les fonctions $v_l^k(t, x)$ données par les formules

$$v_l^k(t, x) = u_l^k(t, x) + M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(a|y|^2)\,dy,$$

$k = 1, \ldots, N$, $l = 1, 2$, sont des solutions non négatives régulières dans $[0, T_1] \times E_n$. Puisque $v_l^k(0, x) = v_2^k(0, x)$, $k = 1, \ldots, N$, pour $x \in E_n$, il résulte du théorème 3 dans [3] que

$$v_1^k(t, x) = v_2^k(t, x), \quad k = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in [0, T_1] \times E_n$. Pour prouver les égalités (3) dans $\bar{H}$ on divise la couche H en couches partielles par les plans $k = s \cdot T_1$ $(s = 1, \ldots, r)$ et on établit de proche en proche les égalités (3) dans ces couches.

Théorème 3. *Supposons que les hypothèses* I, II *et* III *soient satisfaites. Soit* $\{u^k(t, x)\}$, $k = 1, \ldots, N$, *une solution du système* (1) *régulière dans* H *et soit de plus*

$$u^k(t, x) \geqslant -M \exp(a|x|^2), \quad k = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in H$. *Alors il existe un nombre* $\delta_2 > 0$ *et des mesures non négatives* γ^p *telles qu'on ait*

$$u^k(t, x) = \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \gamma^p(dy) - M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(a|y|^2)\,dy,$$

$k = 1, \ldots, N$, *pour* $(t, x) \in (0, \delta_2] \times E_n$.

Démonstration. Il est facile de vérifier (voir la démonstration du théorème 1) que pour un T_1 et pour tout $\tau > 0$ $(\tau < T_1)$ les fonctions

$$v^k(t, x) = u^k(t, x) + M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; \tau, y) \exp(\alpha |y|^2)\, dy,$$

$k = 1, \ldots, N$, constituent une solution non négative régulière dans la couche $(\tau, T_1] \times E_n$ du système (1), donc la suite des fonctions

$$u^k(t, x) + M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(\alpha |y|^2)\, dy$$

est une solution non négative régulière dans $(0, T_1] \times E_n$ du système (1). Il résulte du théorème 4 dans [3] qu'il existe un nombre $\delta_2 > 0$ et des mesures non négatives γ^p telles que

$$u^k(t, x) + M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(\alpha |y|^2)\, dy$$
$$= \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \gamma^p(dy), \qquad k = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in (0, \delta_2] \times E_n$.

THÉORÈME 4. *Supposons que les hypothèses* I, II *et* III *soient satisfaites. Soit* $\{u^k(t, x)\}$, $k = 1, \ldots, N$, *une solution du système* (1) *régulière dans* H *et satisfaisant aux conditions*

$$u^k(t, x) \geqslant -M \exp(\alpha |x|^2), \qquad k = 1, \ldots, N,$$

pour $(t, x) \in H$ *et soit de plus*

$$\lim_{t \to 0} u^k(t, x) = -M \exp(\alpha |x|^2) \qquad si\ x \neq y^k,\ k = 1, \ldots, N$$

(y^k *étant des points fixés de* E_n*). Alors il existe des constantes* A_p *positives telles que*

$$u^k(t, x) = \sum_{p=1}^{N} A_p \Gamma_{kp}(t, x; 0, y^k) - M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(\alpha |y|^2)\, dy$$

dans $(0, \delta_2] \times E_n$, δ_2 *étant la constante introduite dans le théorème* 3.

Démonstration. Introduisons les fonctions

$$v^k(t, x) = u^k(t, x) + M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; \tau, y) \exp(\alpha |y|^2)\, dy,$$

$k = 1, \ldots, N$. La suite des fonctions $\{v^k(t, x)\}$, $k = 1, \ldots, N$, est une solution de (1) non négative régulière dans une couche $(\tau, T_1] \times E_n$, donc les fonctions

$$w^k(t,x) = u^k(t, x) + M \int_{E_n} \sum_{p=1}^{N} \Gamma_{kp}(t, x; 0, y) \exp(a|y|^2) dy,$$

$k = 1, \ldots, N$, constituent une solution non négative régulière dans $(0, T_1] \times \times E_n$, satisfaisant à la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} w^k(t, x) = 0, \quad k = 1, \ldots, N,$$

pour $x \neq y^k$. En vertu du théorème 5 dans [3] il existe des constantes positives A_p telles qu'on a

$$w^k(t, x) = \sum_{p=1}^{N} A_p \Gamma_{kp}(t, x; 0, y^k), \quad k = 1, \ldots, N,$$

dans $(0, \delta_2] \times E_n$, ce qui achève la démonstration de notre théorème.

Travaux cités

[1] P. Besala, *Limitations of solutions of non-linear parabolic equations in unbounded domains*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), p. 25-47.

[2] J. Chabrowski, *Les solutions non négatives d'un système parabolique d'équations*, ibidem 19 (1967), p. 193-197.

[3] — *Les propriétés des solutions non négatives d'un système parabolique d'équations*, ibidem 22 (1970), p. 323-331.

[4] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Москва 1964.

[5] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Englewood Cliffs 1964.

[6] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche Mat. 7 (1958), p. 153-185.

Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1968