ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Remarques sur des inégalités mixtes entre les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre

par W. PAWELSKI (Gdańsk)

Introduction. Dans son mémoire [1] M. J. Szarski a établi, entre autres, des conditions suffisantes pour que deux intégrales $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right) \tag{1}$$

satisfassent dans un certain ensemble E à l'inégalité

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) > v(x, y_1, \ldots, y_n)$$

sous l'hypothèse que

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) > v(x_0, y_1, \ldots, y_n) .$$

Ces conditions sont contenues dans l'énoncé du théorème 1 que nous citons textuellement d'après l'auteur.

THÉORÈME 1. *Considérons l'équation* (1) *et l'ensemble défini par les inégalités*

$$|x-x_0| < a, \quad |y_i-y_i^0| \leqslant a_i - M|x-x_0|, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

où

$$a > 0, \quad M > 0, \quad a_i > 0, \quad a < \frac{a_i}{M} .$$

Supposons que la fonction $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$, ainsi que ses dérivées du premier ordre par rapport aux variables $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$, soient continues dans un domaine D de l'espace à $2n+2$ dimensions, dont la projection sur le plan $x, y_1, \ldots, y_n$ recouvre l'ensemble (2). *Supposons que les dérivées f_{y_i}, f_z, f_{q_i} remplissent dans D la condition de Lipschitz par rapport aux variables $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ et qu'on ait l'inégalité*

$$|f_{q_i}| < M .$$

Soient $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ *deux intégrales de l'équation* (1) *définies et admettant une différentielle totale en tout point de l'ensemble* (2) (*cette hypothèse n'est nécessaire que pour les points de la surface latérale de l'ensemble* (2)) *et vérifiant l'inégalité*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) > v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \tag{3}$$

et telles que leurs éléments de contact respectifs

$$x, y_1, \ldots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_n},$$

$$x, y_1, \ldots, y_n, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n}$$

appartiennent au domaine D. Supposons enfin que les intégrales u *et* v *soient formées de caractéristiques.*

Dans ces conditions l'inégalité

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) > v(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{4}$$

est remplie dans tout le domaine (2).

En outre, on trouve dans le même mémoire une extension de ce problème au cas d'inégalités faibles, ainsi que de nombreuses généralisations de ces problèmes aux cas de systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Le but de la présente note est de démontrer que lesdites conditions peuvent être un peu affaiblies lorsqu'il s'agit d'équations aux dérivées partielles linéaires et quasi-linéaires du premier ordre et que l'ensemble du genre (2), où peuvent avoir lieu les inégalités (4), peut être défini d'une autre manière.

D'autre part nous ne nous bornerons pas ici à admettre une inégalité du type (3), ni même une inégalité faible; en effet, nous allons considérer, entre autres, des cas où une inégalité de la forme (3) sera vérifiée dans une portion de l'ensemble considéré, tandis que, dans une autre, une inégalité contraire à (3) aura lieu et dans le reste de l'ensemble on supposera

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) = v(x_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Il est d'ailleurs clair que la possibilité de ces extensions est due au fait que, dans les cas énumérés, la forme des équations linéaires du premier ordre et celle des équations caractéristiques qui y sont liées sont beaucoup plus simples que dans celui d'une équation non linéaire de la forme (1).

I. Il n'est guère difficile de comparer les positions de deux intégrales formées de caractéristgiques et satisfaisant à l'équation linéaire homogène

$$P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 . \tag{5}$$

Aussi déduit-on immédiatement le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Supposons*:

(α) *que les fonctions* $P(x, y)$ *et* $Q(x, y)$ *soient continues dans un domaine plan* D;

(β) *que chacune des intégrales envisagées de l'équation* (5) *soit formée de caractéristiques définies par les équations*

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y) , \tag{6}$$

où chacune des caractéristiques situées sur la surface intégrale est située à un niveau respectif $z = c$ *(on pourra trouver dans la monographie de E. Kamke* [2], p. 297-299, *une description détaillée de la construction de telles caractéristiques)*;

(γ) *que par tout point du domaine* D *passe exactement une intégrale du système* (6) *allant d'une frontière à l'autre de ce domaine*;

(δ) *que le segment* $l = \{x = x_0;\ y \in \langle c, d\rangle\}$ *soit compris dans* D;

(ε) *que les intégrales* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *de l'équation* (5) *soient définies, continues et possèdent des dérivées partielles du premier ordre dans l'ensemble* $\bar{D}_1 \subset D$, *où* D_1 *est le domaine séparé du reste du domaine* D *par les intégrales du système* (6) *passant par les points* $A(x_0, c)$ *et* $B(x_0, d)$;

(ζ) *que toute intégrale du système* (6) *issue d'un point appartenant à* $\bar{D}_1$ *ait avec le segment* l *exactement un point commun.*

Dans ces conditions on a:

1° *L'hypothèse*

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{>} v(x_0, y) ,$$

vérifiée sur le segment l, *entraine*

$$u(x, y) \underset{(<)}{>} v(x, y) \quad \text{sur} \quad D_1 .$$

2° *Par hypothèse*

$$u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \in l ,$$

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{>} v(x_0, y) \quad \text{pour} \quad y \neq y_0$$

sur le segment l; *il en résulte*

$$u(x, y) = v(x, y)$$

seulement aux points de la courbe intégrale du système (6) *issue du point* (x_0, y_0), *tandis qu'en tout autre point a lieu l'inégalité*

$$u(x, y) \underset{(<)}{>} v(x, y) .$$

Lorsque $y_0 \in (c, d)$, *on peut admettre* $u(x_0, y) \underset{(>)}{\leq} v(x_0, y)$ *pour* $y \in \langle c, y_0)$ *et* $u(x_0, y) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y)$ *pour* $y \in (y_0, d\rangle$. *Les inégalités du même sens subsistent dans les domaines formés par le partage du domaine* $\bar{D}_1$ *par la courbe intégrale du système* (6) *issue du point* (x_0, y_0).

3° *On a par hypothèse*

$$u(x_0, y) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y)$$

dans l'intervalle $(c_1, d_1) \subset (c, d)$, *et*

$$u(x_0, y) = v(x_0, y)$$

aux autres points du segment l. *Il en résulte que*

$$u(x, y) \underset{(<)}{\geq} v(x, y)$$

dans l'ensemble $D_1^* \subset \bar{D}_1$ *limité par les intégrales passant par les points* (x_0, c_1) *et* (x_0, d_1), *mais n'appartenant pas au domaine* D_1^*. *En tout autre point du domaine* D_1, *on aura*

$$u(x, y) = v(x, y) .$$

Remarque 1. Si les intégrales $u(x, y)$ et $v(x, y)$ de l'équation (5) n'étaient définies que dans un domaine Δ construit sur l et contenu dans $\bar{D}_1$, le théorème correspondant relatif à Δ ne subirait que peu de modifications; cependant nous ne les donnerons pas ici, puisque ce théorème ne serait qu'un cas particulier du théorème 4, énoncé dans la suite pour l'équation (11).

Etant donné leur simplicité les démonstrations des propositions énoncées seront très succinctes.

1° Si en un point $A_1(x_1, y_1) \in \bar{D}_1$ on avait $u(x_1, y_1) = v(x_1, y_1)$ par le point A_1 il passerait, d'après (β), une seule intégrale du système (6) qui conformément à (γ)-(ζ) aboutirait au segment l. Le long de cette intégrale on aurait constamment $u(x, y) = v(x, y)$ et par conséquent $u(x_0, y) = v(x_0, y)$ pour un $y \in \langle c, d\rangle$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite au 1°. Si par contre en un point $A_2(x_2, y_2)$ on avait $u(x_2, y_2) \underset{(<)}{\geq} v(x_2, y_2)$, on déduirait de la continuité de la différence $u - v$ qu'en un point A_1 de la courbe intégrale du système (6) issue du point A_2 dans la direction du segment l, on aurait l'égalité $u(x_1, y_1) = v(x_1, y_1)$ ce qui est contraire à l'hypothèse, comme nous l'avons vu.

2° Il s'ensuit de l'hypothèse $u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$ et des hypothèses (β), (γ), (ζ) que l'égalité $u(x, y) = v(x, y)$ a lieu dans $\bar{D}_1$ le long de la courbe intégrale issue du point $A_0(x_0, y_0)$. La démonstration se poursuit ensuite comme dans le cas 1°. Il suffit de remarquer que la courbe intégrale issue d'un point A_1, n'appartenant pas à la courbe intégrale issue du point A_0, aboutit au segment l en un point différent de A_0.

3° La démonstration est dans ce cas tout à fait pareille à celle des cas précédents.

II. Passons maintenant au cas plus général de l'équation aux dérivées partielles presque linéaires

$$P_0(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial x}+P_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_1}+\ldots+P_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_n} = R(x, y_1, \ldots, y_n, z)\,.$$

Afin de simplifier les énoncés des théorèmes qui suivent, on supposera $P_0(x, y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ ou, ce qui est au fond le même, $P_0 \equiv 1$. On a alors l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}+P_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_1}+\ldots+P_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_n} = R(x, y_1, \ldots, y_n, z)\,. \tag{7}$$

Pour commencer nous prouverons deux lemmes qui nous permettront de définir d'une manière précise un domaine qui correspond partiellement au domaine D_1 du théorème 2.

LEMME 1. *Si l'on suppose que les fonctions $f_\nu(x, z_1, \ldots, z_k)$, $\nu = 1, \ldots, k$ sont continues dans le domaine D, que par tout point $Q_0(x_0, \overset{0}{z_1}, \ldots, \overset{0}{z_k})$ appartenant à D passe exactement une intégrale du système d'équations différentielles*

$$z'_\nu = f_\nu(x, z_1, \ldots, z_k), \qquad \nu = 1, \ldots, k \tag{8}$$

définie dans l'intervalle (a, b) (l'intervalle (a, b) pouvant etre différent pour chaque Q_0), et que $\langle \alpha, \rangle\beta \subset (a, b)$, $x_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle$, on peut choisir pour chaque point Q_0 et tout nombre $\varepsilon > 0$ un voisinage tel que par tout point $\bar{Q}$ de ce voisinage il passe une intégrale du système (8), *définie dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta\rangle$ et satisfaisant aux inégalités*

$$|z_\nu(x, x_0, \overset{0}{z_1}, \ldots, \overset{0}{z_k} - z_\nu(x, \bar{x}, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k)| < \varepsilon, \qquad \nu = 1, \ldots, k\,.$$

Ce lemme est une conséquence directe du théorème 3 de [2], p. 149.

Admettons maintenant, qu'une famille de courbes continues C, définies par des équations de la forme

$$y_1 = y_1(x), \qquad \ldots, \qquad y_k = y_k(x)$$

jouisse dans le domaine Δ (ouvert ou fermé) de la propriété:

A. par tout point du domaine contenant les courbes C passe exactement une courbe de la famille, et, dans le domaine D, de la propriété:

B. si la courbe C_0 qui passe par le point P_0 est définie dans l'intervalle (a, b) et $\langle\alpha, \beta\rangle \subset (a, b)$, toutes les courbes issues d'un voisinage assez petit du point P_0 existent dans l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$ et elles y tendent uniformément vers C_0.

Les domaines Δ et D peuvent être identiques ou l'un d'eux peut être contenu dans l'autre.

Par exemple les courbes intégrales du système (8) jouissent dans le domaine D des propriétés A et B.

En se basant sur ces propriétés on peut prouver le lemme suivant.

Lemme 2. *Supposons*

(α) *que le domaine D, dans lequel la propriété* B *a lieu, contienne le domaine fermé et borné $\bar{\Delta}$ dans lequel la propriété* A *a lieu;*

(β) *que toute courbe C aille de la frontière à la frontière du domaine D et que dans son parcours dans le domaine $\bar{\Delta}$ (C désignant ici uniquement les courbes issues de points appartenant à $\bar{\Delta}$) elle passe par l'intersection $\bar{G} = S\cdot\bar{\Delta}$, où S est le plan défini par l'équation $x = x_0$ et G est un domaine situé sur S; en outre on suppose que la portion de la courbe entre chacun de ses points communs avec la frontière du domaine $\bar{\Delta}$ et le point commun avec $\bar{G}$ est entièrement contenue dans $\bar{\Delta}$ ($\langle\alpha, \beta\rangle$ sera choisi pour chaque courbe C de manière que sa portion correspondant à $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$ contienne tous ses points appartenant à $\bar{\Delta}$);*

(γ) *que le domaine $\bar{G}_1 \subset G$ soit fermé; sa frontière sera désignée par B_1;*

(δ) *que toute courbe C issue du domaine $\bar{G}_1$ ait avec la frontière, pour $x \geqslant x_0$ et pour $x \leqslant x_0$, exactement un point commun.*

Les courbes C issues des points du domaine G_1 forment alors à l'intérieur de Δ un domaine Δ_1 dont la frontière se compose de l'enveloppe Ω formée par les courbes C issues de la frontière B_1 et situées dans $\bar{\Delta}$, ainsi que des ensembles Z_1 et Z_2 déterminés sur la frontière du domaine Δ par les courbes C issues de G_1. On entendra, ici et dans la suite, par enveloppe du domaine Δ_1 l'ensemble fermé Ω composé de la somme de deux ensembles: 1° l'ensemble Γ des points limites du domaine Δ_1 intérieurs au domaine Δ, 2° l'ensemble des points d'accumulation de Γ.

Remarque 2. Si, en particulier, toutes les courbes C isuses de G et contenues dans $\bar{\Delta}$ sont définies dans l'intervalle $\langle a_0, b_0\rangle$, les ensembles Z_1 et Z_2 seront contenus respectivement dans les plans $x = a_0$, $x = b_0$ et la portion de l'enveloppe correspondant à $x \in (a_0, b_0)$ sera située à l'intérieur de Δ. (En particulier, dans le problème plan, le domaine Δ_1 correspond à celui dont la description est faite dans [2], p. 300 (317), où le champ caractéristique a été défini).

Démonstration du lemme 2. Il résulte des hypothèses qu'on peut prendre autour d'un point quelconque $\bar{Q}$ contenu dans Δ_1, donc sur une certaine courbe C de Δ_1, un voisinage tel que chaque courbe passant par un point quelconque de ce voisinage soit dans le même intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ à une distance de la courbe passant par $\bar{Q}$ moindre que $\varepsilon > 0$. Pour que tous les points de ce voisinage appartiennent aussi à l'ensemble Δ_1, il suffit de prendre $\varepsilon > 0$ en sorte que le voisinage de rayon $\varepsilon > 0$ du point de G_1, auquel la courbe issue de $\bar{Q}$ passe par G_1, soit contenu dans G_1.

Si l'on prend deux points arbitraires Q_1 et $Q_2 \in \Delta_1$, on peut les joindre par une ligne brisée contenue tout entière dans Δ_1. Or il résulte du théorème de Borel sur le recouvrement d'un ensemble fermé, ainsi que des hypothèses A et B, qu'on peut joindre par une ligne brisée les points Q_1 et Q_2 à ceux du domaine G_1 qui sont les points par lesquels passent les courbes issues de Q_1 et de Q_2. A leur tour ces points peuvent être joints par une ligne brisée contenue dans G_1. Ainsi l'ensemble Δ_1 est un domaine, de même que dans le cas plan [2], p. **300** (317).

Cependant il faudra encore démontrer que l'enveloppe Ω du domaine Δ_1 est composée uniquement de courbes C issues de la frontière B_1 du domaine G_1. Toute courbe issue d'un point Q appartenant à B_1 et contenue dans $\bar{\Delta}$ se compose des points limites du domaine Δ_1; elle appartient donc à l'enveloppe Ω. Cela est une conséquence immédiate des hypothèses A et B, vu qu'on peut associer à tout voisinage de rayon $\varepsilon > 0$ d'un point arbitraire Q_0 d'une telle courbe C un voisinage du point $Q \in B_1$ tel que les courbes issues de points soit intérieurs, soit extérieurs du domaine G, passent par ce voisinage du point Q_0.

On démontrera aussi que, réciproquement, par tout point limite Q_0 du domaine Δ_1 appartenant à Δ passe une courbe C issue d'un point $Q \in B_1$.

D'après les hypothèses (α) et (β) par tout point limite Q_0 passe une courbe C. Si la courbe C issue de Q_0 passait par l'intérieur ou par l'extérieur du domaine G_1, le point Q_0 serait nécessairement, en vertu des hypothèses A et B ainsi que des raisonnements précédents, un point intérieur ou extérieur du domaine Δ_1.

Il sera encore prouvé que la portion de la frontière du domaine Δ_1 située sur la frontière du domaine Δ est, pour $x \geqslant x_0$, un certain ensemble Z composé uniquement de points que les courbes issues de $\bar{G}_1$ déterminent sur la frontière du domaine Δ.

Si le point Q' était un point limite commun des deux domaines et n'appartenait pas à Z, la courbe C issue de ce point passerait par l'ensemble $\bar{G}$ à l'extérieur de G_1 ce qui impliquerait, d'après la propriété B, que toutes les courbes C issues d'un voisinage assez petit du point Q' passeraient par $\bar{G}$ à l'extérieur de G_1. Or cela est en contradiction avec la proposition affirmant que dans tout voisinage du point Q' il y a aussi des points du domaine Δ_1 tels que les courbes issues de ces points passent par G_1. Il résulte de l'hypothèse (δ) que tout point de la courbe C issue de $\bar{G}_1$ qui est commun avec la frontière du domaine Δ, appartient à Z. Il en résulte que $Z_1 = Z - \Omega$.

On établit de même que l'ensemble correspondant Z pour $x \leqslant x_0$ se compose uniquement de points déterminés par les courbes issues de $\bar{G}_1$ sur la frontière du domaine Δ et que $Z_2 = Z - \Omega$.

Les propositions préliminaires étant démontrées, passons maintenant au théorème qui s'énonce comme il suit.

THÉORÈME 3. *Faisons les hypothèses suivantes*:

(α) *Les fonctions* $P_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, P_n(x, y_1, \ldots, y_n), R(x, y_1, \ldots, y_n, z)$ *sont continues dans le domaine à* $n+2$ *dimensions* $M = D \times R_0$ *(dans le théorème suivant le domaine* M *sera défini d'une manière plus générale), où* D *est un domaine à* $n+1$ *dimensions dans lequel les fonctions* $P_1, \ldots, P_n$ *sont définies, tandis que* R_0 *est l'ensemble des nombres réels contenus dans l'intervalle* (c, d), $c = -\infty$ *et* $d = +\infty$ *n'étant pas exclus.*

(β) *Toute intégrale parmi les intégrales considérées de l'équation* (7) *est formée des caractéristiques définies par le système d'équations*

$$y_i' = -P_i(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$z' = R(x, y_1, \ldots, y_n, z). \tag{10}$$

(γ) *Par tout point* $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ *du domaine* D *passe exactement une intégrale du système* (9) *s'étendant de la frontière à la frontière de ce domaine. En outre, à toute intégrale du système d'équations* (9) *substituée dans l'équation* (10) *au lieu des* $y_1, \ldots, y_n$, *correspondra exactement une intégrale de l'équation* (10) *contenue dans* $X \times R_0$ *et passant par le point* $\bar{x}, \bar{z}$ ($\bar{z} \in R_0$). *Chacune de ces intégrales est définie pour les mêmes* x *que l'intégrale correspondante du système* (9).

(δ) *En adoptant les notations* $k = n$, $z_i = y_i$ *et* $f_\nu = -P_\nu$ *pour* $i, \nu = 1, \ldots, n$, *les intégrales du système* (9) *satisfont dans le domaine* $\bar{\Delta} \subset D$ *aux hypothèses* (β) *et* (δ) *du lemme 2 relativement aux courbes* C.

(ε) *Le domaine* $\bar{G}_1 \subset G$ *(où* G *est le domaine du lemme 2). Le domaine* Δ_1 *construit sur* G_1 *sera du même type que dans le lemme 2, et sera désigné ici pareillement, comme d'ailleurs son enveloppe par* Ω *et la frontière de* G_1 *par* B_1.

(ζ) *Les intégrales* $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ *de l'équation* (7) *sont définies et continues dans* $\bar{\Delta}$ *(évidemment elles ont aussi des dérivées partielles du premier ordre), et sont formées de caractéristiques.*

(η) *Les points* $x, y_1, \ldots, y_n, u(x, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $x, y_1, \ldots, y_n, v(x, y_1, \ldots, y_n)$ *sont contenus dans* M.

Dans ces conditions on a:

1° *L'hypothèse*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(\leq)}{\geq} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{dans} \qquad \bar{G}$$

entraîne

$$u(x, y_1, \dots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta} .$$

2° *D'après l'hypothèse on a*

$$u(x_0, y_1, \dots, y_n) = v(x_0, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{G}_1 ,$$

$$u(x_0, y_1, \dots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{G} - \bar{G}_1 .$$

Cela implique

$$u(x, y_1, \dots, y_n) = v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta}_1 ,$$

$$u(x, y_1, \dots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1$$

(cette conclusion subsiste si l'ensemble $\bar{G}_1$ se réduit à un point).

3° *En vertu des hypothèses:*

$$u(x_0, y_1, \dots, y_n) = v(x_0, y_1, \dots, y_n) \quad \text{sur} \quad B_1 ,$$

$$u(x_0, y_1, \dots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad G_1 ,$$

$$u(x_0, y_1, \dots, y_n) \underset{(>)}{\leq} v(x_0, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{G} - G_1 ,$$

on a

$$u(x, y_1, \dots, y_n) = v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{sur} \quad \Omega ,$$

$$u(x, y_1, \dots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta}_1 - \Omega$$

ainsi que

$$u(x, y_1, \dots, y_n) \underset{(>)}{\leq} v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1 .$$

Les démonstrations de ces propositions sont très simples et presque analogues à celles du théorème 2. En effet, il est facile de le voir, puisque les courbes intégrales du système (9) satisfont dans D, grâce aux notations de l'hypothèse (δ), aux hypothèses du lemme 1 et par cela même jouissent des propriétés **A** et **B**.

La remarque qui se rapporte au théorème 2 est aussi valable dans ce cas.

III. Dans le cas de l'équation quasi-linéaire

$$\frac{\partial z}{\partial x} + P_1(x, y_1, \dots, y_n, z) \frac{\partial z}{\partial y_1} + \dots + P_n(x, y_1, \dots, y_n, z) \frac{\partial z}{\partial y_n} = R(x, y_1, \dots, y_n, z) \tag{11}$$

on admettra des hypothèses un peu modifiées puisque les fonctions $P_1, \dots, P_n$ dépendent ici de la variable z. L'énoncé du théorème correspondant sera mis sous une forme un peu plus générale que dans le cas précédent.

THÉORÈME 4. *On suppose:*

(α) *Les fonctions* $P_1(x, y_1, \ldots, y_n, z), \ldots, P_n(x, y_1, \ldots, y_n, z), R(x, y_1, \ldots \ldots, y_n, z)$ *sont continues dans les domaine* M *à* $n+2$ *dimensions.*

(β) *Par tout point du domaine* M *passe exactement une intégrale du système d'équations caractéristiques*

$$
\begin{aligned}
y_i' &= -P_i(x, y_1, \ldots, y_n, z), \qquad i = 1, \ldots, n, \\
z' &= R(x, y_1, \ldots, y_n, z).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Chaque intégrale va de la frontière à la frontière du domaine M.

(γ) *En posant* $k = n+1$, $z_i = y_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$, $z_{n+1} = z$ *et* $f_\nu = -P_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, $f_{n+1} = R$, *il résulte du lemme* 1 *que les courbes du système* (12) *remplissent dans le domaine* M *les conditions* A *et* B.

(δ) *L'ensemble* E *est la projection du domaine* M *sur le plan* $x, y_1, \ldots, y_n$ *et* D *est un domaine contenu dans* E.

(ε) *Dans le plan* S *défini par l'équation* $x = x_0$ *(dans l'espace* $E_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n)$) *est contenu le domaine* $G \subset S \cdot D$ *ainsi qu'un domaine fermé* $\bar{G}_1 \subset G$. *On désignera par* B_1 *la frontière du domaine* G_1.

(ζ) $\bar{\Delta} \subset D$ *est un domaine fermé et borné dont les points pour* $x = x_0$ *forment l'ensemble* $\bar{G}$.

(η) C *désigne la courbe appartenant à* D *qui est la projection sur le plan* $x, y_1, \ldots, y_n$ *de la caractéristique issue du point* $Q(x, y_1, \ldots, y_n, z) \in M_1$.

(ϑ) *Deux intégrales* $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $v(x, y_1, \ldots, y_n)$ *de l'équation* (11) *définies dans* $\bar{\Delta}$ *y sont continues et sont formées de caractéristiques. Cela veut dire que la caractéristique issue de tout point* $Q\big(x, y_2, \ldots, y_n, v(x, y_1, \ldots \ldots, y_n)\big)$ *respectivement* $\bar{Q}\big(x, y_1, \ldots, y_n, v(x, y_1, \ldots, y_n)\big)$, *où* $(x, y_1, \ldots, y_n) \in \bar{\Delta}$, *vérifie la condition* $u(x) = u\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ *respectivement* $v(x) = v\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$; *la courbe correspondante* C *ou* $\bar{C}$ *est située en partie dans* $\bar{\Delta}$ *et passe par le domaine* $\bar{G}$. *En outre ces courbes satisfont aux conditions* (β) *et* (δ) *du lemme* 2.

(ι) *Les points* $x, y_1, \ldots, y_n, u(x, y_1, \ldots, y_n)$ *et* $x, y_1, \ldots, y_n, v(x, y_1, \ldots, y_n)$ *appartiennent au domaine* M.

Dans ces conditions on a:

1° *L'hypothèse*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{G}$$

entraîne

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Delta}.$$

2° *D'après les hypothèses*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) = v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{G}_1 \tag{13}$$

et

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{G} - \bar{G}_1$$

il vient

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) = v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad dans \quad \bar{\Delta}_1$$

où $\bar{\Delta}_1$ est le domaine fermé contenu dans $\bar{\Delta}$ et formé des courbes C qui, d'après l'hypothèse (ϑ), correspondent aux caractéristiques issues des points $Q(x_0, y_1, \ldots, y_n, u(x_0, y_1, \ldots, y_n))$, le point $(x_0, y_1, \ldots, y_n)$ étant dans $\bar{G}$ et u, v étant soumis à la condition (13). *En outre*

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad dans \quad \bar{\Delta}-\bar{\Delta}_1$$

(l'ensemble $\bar{G}_1$ pourra en particulier se réduire à un point).

3° *Il résulte des hypothèses*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) = v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad sur \quad B_1\,,$$

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad dans \quad G_1$$

et

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad dans \quad \bar{G}-\bar{G}_1$$

qu'on a

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) = v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad sur \quad \Omega\,,$$

où Ω est l'enveloppe du domaine Δ_1 contenue dans $\bar{\Delta}$ et formée des courbes C issues des points de la frontière B_1. En outre

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \underset{(>)}{\leq} v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad dans \quad \bar{\Delta}_1-\Omega\,,$$

où $\Delta_1 \subset \Delta$ est le domaine formé par les courbes C issues des points du domaine G_1 et contenues dans Δ. Le domaine Δ_1 qui intervient ci-dessus est le même pour l'intégrale $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ et pour l'intégrale $v(x, y_1, \ldots, y)$. Nous le prouverons dans la suite. Enfin on a aussi

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \underset{(>)}{\leq} v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad dans \quad \bar{\Delta}-\bar{\Delta}_1\,.$$

Démonstration. On établira d'abord que les courbes C dans $\bar{\Delta}$ c'est-à-dire les projections des caractéristiques dont sont formées les intégrales u ou v, jouissent de la propriété A. Il suffit de le prouver pour l'intégrale u, puisque le raisonnement relatif à v sera analogue.

Considérons donc un point arbitraire $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in \bar{\Delta}$.

Si deux courbes C_1 et C_2 passaient par ce point $\bar{Q}$, leurs équations appartiendraient à celles de la même courbe caractéristique qui passe par le point $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{z})$, où $\bar{z} = u(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$. Mais comme à tout point $\bar{Q}$ correspond une valeur de l'intégrale u, cette courbe est, en vertu de (γ), définie d'une manière univoque, ce qui entraîne l'unicité de ses composantes, par conséquent aussi celle des courbes C_1 et C_2. Les courbes C_1 et C_2 se confondent donc dans $\bar{\Delta}$.

Afin de vérifier la propriété B dans D, il suffit de remarquer que, d'après (γ), les courbes intégrales du système (12) jouissent de cette propriété dans le domaine M. Il s'ensuit que leurs composantes, notamment les courbes $y_i = y_i(x)$, $z = z(x)$ ont la même propriété. Les courbes $y_i = y_i(x)$, $z = u(x)$ respectivement $y_i = y_i(x)$, $z = v(x)$ ont alors la même propriété. Il en résulte facilement que la propriété est vérifiée aussi par les courbes C (respectivement $\bar{C}$) définies par le système d'équations $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ et situées dans le domaine $D \subset E$ (car les courbes C satisfont, d'après (ϑ), à la condition (β) du lemme 2).

On établira encore que les domaines de la forme Δ_1 constitués par les projections des caractéristiques qui sont situées sur les intégrales u et v, sont identiques.

A cet effet on se basera sur le théorème:

Deux domaines qui ont les mêmes frontières et dont les intérieurs ont des points communs, sont identiques.

Désignons par Δ_1^* le domaine déterminé par les courbes C et par Δ_2^* celui déterminé par les courbes $\bar{C}$.

Il résulte des hypothèses du théorème, de la démonstration qui précède et du lemme 2, que les ensembles Δ_1^* et Δ_2^* sont des domaines. Il suffit donc de prouver que les portions de ces domaines issues de G_1, par exemple pour $x > x_0$, sont identiques.

G_1 est la partie commune de leurs frontières. De même leurs enveloppes Ω_1^* et Ω_2^* sont identiques, attendu qu'elles sont formées des courbes C issues de la frontière B_1 sur laquelle $u = v$. Ainsi les courbes C et $\bar{C}$, étant issues des mêmes points de B_1, sont identiques et par tout point de l'enveloppe passe exactement une telle courbe C, confondue avec $\bar{C}$, le long de laquelle $u = v$. Les courbes C issues de G_1 déterminent sur la frontière du domaine Δ_1^* un ensemble Z_1^* (pareil à celui qui intervient dans le lemme 2) qui ferme la frontière de la portion considérée du domaine Δ_1^*. De même les courbes $\bar{C}$ déterminent un ensemble respectif Z_2^*. Une courbe arbitraire $\bar{C}$ issue d'un point du domaine G_1 pénètre à l'intérieur du domaine Δ_1^*, mais ne peut en ressortir à travers l'enveloppe, sinon elle devrait avoir avec elle un point commun et par suite un point commun avec une courbe $\bar{C}_1$ engendrant l'enveloppe. Mais alors on conclurait de l'unicité de ces courbes que $\bar{C}$ appartient à l'enveloppe, en contradiction avec l'hypothèse que $\bar{C}$ est issue de l'intérieur de G_1.

Ainsi chaque courbe $\bar{C}$ issue de G_1 doit passer par l'ensemble Z_1^*, donc tout point de l'ensemble Z_2^* appartient à Z_1^*, c'est-à-dire $Z_2^* \subset Z_1^*$. On déduit pareillement que $Z_1^* \subset Z_2^*$, par conséquent $Z_1^* = Z_2^*$. Il est à remarquer que dans la démonstration on a prouvé que les intérieurs des domaines Δ_1^* et Δ_2^* ont des points communs situés sur la courbe $\bar{C}$, d'où l'on conclut que les deux portions des domaines sont identiques et par conséquent les domaines Δ_1^* et Δ_2^* le sont aussi.

Démontrons maintenant les propositions 1°-3°.

1° Si en un point $\bar{Q} \in \bar{\Delta}$ l'inégalité $u(x, y_1, \dots, y_n) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} v(x, y_1, \dots, y_n)$ était vérifiée, il existerait sur la courbe $\bar{C}$ contenue dans $\bar{\Delta}$ et joignant le point $\bar{Q}$ à un point $Q \in \bar{G}$, un point $Q_0 \in \bar{\Delta}$ auquel les deux intégrales seraient égales. Mais alors elles seraient aussi égales le long de la courbe $\bar{C}$, qui passe par le domaine $\bar{G}$. On arriverait ainsi à une contradiction évidente avec l'hypothèse que

$$u(x_0, y_1, \dots, y_n) \underset{(<)}{>} v(x_0, y_1, \dots, y_n)\,.$$

2° Etant donné l'hypothèse (13), les courbes C sont univoques dans $\bar{\Delta}_1$, par conséquent l'égalité

$$u(x, y_1, \dots, y_n) = v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta}_1$$

est une conclusion directe de l'hypothèse.

La proposition relative aux points se trouvant à l'extérieur de $\bar{\Delta}_1$ s'établit comme dans 1°. Il suffit de remarquer que si on prend un point arbitraire $Q \in \bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1$ (c'est-à-dire extérieur à $\bar{\Delta}_1$), la courbe C qui passe par ce point aboutit au domaine $\bar{G} - \bar{G}_1$, aussi bien dans le cas où elle provient de la projection sur le plan $x, y_1, \dots, y_n$ de la caractéristique située sur la surface $z = u(x, y_1, \dots, y_n)$, que dans celui où la caractéristique est située sur la surface $z = v(x, y_1, \dots, y_n)$. Car si la courbe C issue de Q aboutissait à $\bar{G}_1$, il résulterait du lemme 2, ainsi que des conditions (β)-(ϑ) que dans tout voisinage de ce point il y aurait des courbes C issues de G_1, ce qui prouverait que Q n'est pas extérieur à Δ_1.

3° Dans ce cas on reprend encore le raisonnement des cas précédents, tout en tenant compte de ce que les courbes C et $\bar{C}$ définies par (ϑ) forment, comme nous l'avons démontré, le même domaine Δ_1.

IV. Nous avons vu dans les théorèmes 2, 3, 4 que, à mesure que disparaissait la propriété linéaire de l'équation aux dérivées partielles, le domaine dans lequel on établissait les conclusions sur la position réciproque de deux intégrales devenait plus spécialisé. Le domaine (2) du théorème 1 est un autre exemple d'une telle spécialisation, cette fois par rapport à l'équation non linéaire (1).

Nous y avons aussi imposé à la fonction f et à l'intégrale $z(x, y_1, \dots, y_n)$ d'autres conditions. De telles conditions suffisent dans le théorème 1 pour prouver la proposition qui correspond dans le théorème 4 à la conclusion 1°.

Essayons encore d'étendre le problème posé dans la proposition 2° du théorème 4 au cas d'une équation non linéaire aux dérivées partielles (1).

Faisons à cette fin une hypothèse supplémentaire: admettons que $z(x, y_1, \ldots, y_n)$ soit de la classe C^1.

Théorème 5. *On suppose:*

(α) *Toutes les hypothèses du théorème* 1 *subsistent, sauf* 3° *qui sera remplacée par une autre.*

(β) *On désignera par* $\bar{\Delta}$ *le domaine fermé qui résulte de* (2) *en admettant* $|x-x_0| \leqslant c$, *où* $0 < c < a$ *et par* $\bar{G}$ *le domaine à* n *dimensions, obtenu de* $\bar{\Delta}$ *en posant* $x = x_0$.

(γ) *Le domaine fermé* $\bar{G}_1 \subset G$; B_1 *sera sa frontière.*

(δ) P *est un point situé sur la caractéristique formant l'intégrale* u *ou* v. C *est une courbe dans* $\bar{\Delta}$ *qui est la projection sur le plan* $x, y_1, \ldots, y_n$ *de la caractéristique issue du point* $P \in D$, *dont la projection* $Q \in \bar{\Delta} \subset D_1$, D_1 *étant un domaine contenu dans l'ensemble qui est la projection du domaine* D *sur le plan* $x, y_1, \ldots, y_n$. *Chaque courbe* C *pénètre dans* $D_1 - \bar{\Delta}$ *et va de la frontière à la frontière de* D_1.

En outre on admet l'hypothèse supplémentaire:

(ε) *Les intégrales* u *et* v *sont de la classe* C^1.

Avec ces hypothèses on a:

1° *Les hypothèses*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) = v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{G}_1 \tag{14}$$

et

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{G} - \bar{G}_1$$

entrainent

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) = v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Delta}_1$$

où $\bar{\Delta}_1$ *est un domaine fermé contenu dans* $\bar{\Delta}$ *et engendré par les courbes* C *qui correspondent, d'après la condition* (δ), *aux caractéristiques issues des points* $P\big(x_0, y_1, \ldots, y_n,\ u(x_0, y_1, \ldots, y_n)\ u_{y_1}(x_0, y_1, \ldots, y_n), \ldots, u_{y_n}(x_0, y_1, \ldots \ldots, y_n)\big)$ *satisfaisant à* (14) *et*

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Delta} - \Delta_1$$

(l'ensemble $\bar{G}_1$ *pouvant y etre remplacé par un point).*

2° *Il résulte des hypothèses*

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad G_1$$

et

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) = v(x_0, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{G} - G_1$$

que

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \underset{(<)}{\geq} v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Delta}_1 - \Omega\,,$$

où Δ_1 *est un domaine engendré par les courbes* C *issues des points du domaine* G_1. *La construction de ce domaine est analogue à celle de* 1°; *cepen-*

dant les courbes C correspondant aux intégrales $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ ou $v(x, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n)$ peuvent etre différentes, mais elles forment toujours le même domaine Δ_1, et

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) = v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{dans} \quad (\bar{\Delta}-\bar{\Delta}_1)+\Omega .$$

Remarque 3. Les conditions (α)-(ε) énumérées plus haut sont vérifiées si l'on admet les hypothèses supplémentaires du mémoire de M. T. Ważewski [3] et si l'on y pose $a = \delta$ et $a_i = K/4n(M+1)$.

Remarque 4. Si l'on prend pour $\bar{G}_1$ un domaine du plan $x = x_0$, défini comme dans [3], par exemple

$$x = x_0, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant c \quad \text{où} \quad c = K, \quad i = 1, \ldots, n$$

le domaine $\bar{\Delta}_1$ de 1° convenablement construit contiendra l'ensemble défini par les inégalités

$$|x-x_0| \leqslant \delta, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)} - M|x-x_0|, \quad i = 1, \ldots, n .$$

Cet ensemble intervient dans le théorème 1 du mémoire [3]. De même si l'on admet que l'ensemble

$$x = x_0, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant a_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

est contenu dans G_1, l'ensemble de la forme (2) du théorème 1 sera contenu dans Δ_1.

Démonstration. Le point essentiel de la démonstration consiste à prouver que

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta} .$$

On se basera à cet effet sur une remarque (encore non publiée) de M. A. Pliś. Elle m'a été communiquée par M. J. Szarski sous une forme qui s'adapte au théorème 5.

Si: a) le second membre de l'équation (1) vérifie une condition de Lipschitz par rapport à z avec une certaine constante et par rapport à q_i avec la constante M, b) u et v sont des intégrales admettant dans l'ensemble (2) une différentielle totale, c) $u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v(x_0, y_1, \ldots, y_n)$, on a $u \geqslant v$ dans l'ensemble (2).

On déduit des hypothèses 1° et 2° que dans l'ensemble $\bar{G}$ l'inégalité

$$u(x_0, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v(x_0, y_1, \ldots, y_n)$$

a lieu. Il en résulte, ainsi que de la remarque précédente, dont les hypothèses sont vérifiées par celles du théorème 1, que

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \geqslant v(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \text{dans} \quad \bar{\Delta} .$$

On établira maintenant, comme dans la démonstration du théorème 4, que la propriété A est vérifiée par les courbes C dans $\bar{\Delta}$, c'est-à-dire par les projections des caractéristiques dont est formée soit l'intégrale u, soit l'intégrale v (on se basera ici sur la définition de l'intégrale formée des caractéristiques — voir [1], p. 3). Nous l'établirons par exemple pour l'intégrale u.

Prenons un point arbitraire $\bar{Q} \in \bar{\Delta}$. Si deux courbes C_1 et C_2 passaient par le point $\bar{Q}$, leurs équations seraient comprises parmi les équations des courbes caractéristiques passant par le même point $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{z}, \bar{z}_{y_1}, \ldots, \bar{z}_{y_n})$, où $\bar{z} = u(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ et $\bar{z}_{y_i} = u_{y_i}(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$. Mais d'après les hypothèses du théorème 5, la courbe caractéristique passant par un tel point est univoquement déterminée, les équations composantes les courbes C_1 et C_2 sont donc identiques.

Quant à la propriété B, on voit que les courbes intégrales du système

$$y_i' = -f_{q_i}, \quad z' = f - \sum_{i=1}^{n} q_i f_{q_i}, \quad q_i' = f_{y_i} + q_i f_z, \quad i = 1, \ldots, n$$

en jouissent. L'intégrale u étant de la classe C^1, les courbes caractéristiques dont est formée l'intégrale u ont la même propriété qui est par conséquent aussi la propriété de ses composantes. Mais cela implique directement que les courbes C jouissent aussi dans le domaine D_1 de la propriété B.

Il est à remarquer que les courbes C satisfont encore aux conditions (β) et (δ) du lemme 2; cela résulte aisément de la définition donnée dans [1], p. 3, de l'intégrale formée des caractéristiques, et de l'hypothèse (10) du théorème 1

$$|f_{q_i}| < M .$$

En effet on a alors $|y_i'| < M$, ce qui entraine, en vertu des inégalités

$$|y_i - y_i^0| \leqslant a_i - M|x - x_0|, \quad i = 1, \ldots, n$$

admises dans le théorème 1, que toute courbe C a exactement un point commun avec la frontière de Δ, tant pour $x \geqslant x_0$ que pour $x \leqslant x_0$, et elle passe par le domaine $\bar{G}$, tout en étant entièrement contenue dans D_1, de la frontière à la frontière.

Ainsi en vertu de la propriété A vérifiée dans $\bar{\Delta}$, de la propriété B vérifiée dans le domaine D_1 (où $\bar{\Delta}$ est formé par les courbes C) et des hypothèses du lemme 2, l'ensemble Δ_1 est le domaine défini dans la conclusion de ce lemme.

La démonstration que les deux domaines de la forme Δ_1, provenant respectivement des intégrales u et v, sont identiques, et presque analogue à celle du théorème 4. Il faut seulement tenir compte de ce que, dans ce cas, l'identité des deux enveloppes résulte de l'identité des courbes C et $\bar{C}$ passant par un point $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ tel que $u = v$. En effet, la différence des fonctions $u-v$ admet alors au point $\bar{Q}$, conformément au raisonnement du début de la présente démonstration, sa valeur minimum égale à zéro, ce qui entraîne

$$u_{y_i}(\bar{Q}) = v_{y_i}(\bar{Q}) ,$$

d'où l'identité des caractéristiques passant par le point $\bar{P}\big(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, u(\bar{Q}), u_{y_1}(\bar{Q}), \ldots, u_{y_n}(\bar{Q})\big)$ et finalement l'identité des courbes C et $\bar{C}$.

Passons maintenant à la preuve des propositions 1° et 2° du théorème.

1° De même qu'il a été démontré ci-dessus, il résulte de ce que la différence des fonctions $u(x_0, y_1, \ldots, y_n) - v(x_0, y_1, \ldots, y_n)$ atteint au point $\bar{Q}(x_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in \bar{G}_1$ son minimum (égal à zéro) que la caractéristique issue du point $\bar{P}$ est la même pour les deux surfaces. Par conséquent les deux intégrales ont les mêmes valeurs le long de la courbe C correspondant à cette caractéristique. On a vu que ces courbes issues de $\bar{G}_1$ forment dans $\bar{\Delta}$ un domaine fermé $\bar{\Delta}_1$. Si en un point Q_1 extérieur au domaine Δ_1, donc pour $Q_1 \in \bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1$, l'égalité $u(Q_1) = v(Q_1)$ avait lieu, on prouverait, comme dans le cas traité précédemment, que le long de la courbe C_1 issue de Q_1 on aurait $u(x, y_1, \ldots, y_n) = v(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Mais comme la courbe C_1 aboutit à un point de $\bar{G} - \bar{G}_1$, il en résulterait une contradiction avec l'hypothèse que $u \underset{(<)}{>} v$.

Il est à remarquer que la courbe C_1 ne peut pas passer par $\bar{G}_1$; car si elle passait par le point Q_2, il y aurait, d'après la propriété B, dans tout voisinage du point Q_1 des courbes C issues de points appartenant à G_1 et à un voisinage suffisamment petit du point Q_2. Mais alors Q_1 ne serait pas un point extérieur du domaine.

Si le point Q_1 appartenant à une face latérale de la pyramide $\bar{\Delta}$, on aboutirait à une contradiction comme dans la démonstration du théorème 1 de [1], p. 5-9. Enfin si ce point se trouvait dans le plan $x = x_0 \pm c$, on pourrait appliquer dans un voisinage du point Q_1 le théorème 1, attendu que $c < a$.

2° La démonstration de ce cas est pareille aux précédentes si l'on tient compte de la proposition établie auparavant, à savoir que les domaines Δ_1 provenant des projections de deux sortes de caractéristiques engendrant les intégrales u et v, sont identiques. Dans ce cas le point Q_1 appartient soit à l'intérieur de Δ_1, soit à la face latérale de la pyramide, soit enfin au plan $x = x_0 \pm c$.

Le théorème 5 représente le cas le plus simple où il a été possible d'étendre aux équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre les problèmes dans lesquels sont simultanément vérifiées dans certaines portions du domaine d'existence, soit des inégalités de différentes sortes, soit des égalités entre intégrales définies dans le même domaine.

Il reste encore à résoudre le problème de la localisation des intégrales dans le cas où l'on fait des hypothèses sous forme d'inégalités mixtes concernant les conditions initiales.

Qu'il me soit permis, pour terminer, de remercier M. J. Szarski de ses judicieuses remarques concernant la généralisation du lemme 2 et l'extension des théorèmes 4 et 5.

Travaux cités

[1] J. Szarski, *Sur certaines inégalités entre les intégrales des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), p. 1-34.

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[3] T. Ważewski, *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 14 (1935), p. 149-177.

Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1961