ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Об одной постановке главной задачи в теории обобщённых потенциалов

А. Шибяк (Краков)

Цель настоящей работы — обобщение некоторых идей П. Л. Чебышева и Ф. Леи. Устанавливается новая экстремальная задача, имеющая решением меру равновесия, дальше находится связь между ней и некоторыми последовательностями точек, которые в специальном случае являются нулями полиномов Чебышева.

1. Основные определения и теоремы. Пусть E и F два компактные множества в эвклидовом пространстве $\mathcal{E}^m$. Буквой D будем обозначать ту составляющую дополнения к E, которая содержит бесконечно удаленную точку в $\mathcal{E}^m$.

Пусть $K(x, y)$ симметрическая функция-ядро определена в $\mathcal{E}^m \times \mathcal{E}^m$. Мы предпологаем, что она непрерывна и конечна кроме диагонали $x = y$, где она может принимать значение $+\infty$. Мы предпологаем также, что для неё удовлетворяется принцип максимума, которий виясним ниже.

Пусть μ какая нибудь мера на $\mathcal{E}^m$. Если найдутся точки, в которих функция

$$U^{\mu}(x) \overset{\text{def}}{=} \int K(x, y)\, d\mu(y)$$

конечна, то назовем её потенциалом. Тогда можем высказать

Принцип максимума. *Для всякой меры μ потенциал U^{μ} принимает свою верхнюю грань на несущем множестве меры μ.*

Этот принцип равносилен следующей теореме:

Теорема о равновесии. *Для всякого компактного множества A такого, что хотя бы при одной мере μ распределенной на A потенциал U^{μ} ограничен сверху, существует мера равновесия.*

Это такая положительная мера, распределённая на A, что её потенциал постоянен на A кроме, быть может, некоторого „малого“ множества исключительных точек. Это исключительное множество „мало“ в том смысле, что не возможно найти меру, которая была бы распределена на нём и её потенциал был бы везде конечен. Меру равновесия для A находим решая задачу на

$$\inf_{\mu} \iint K(x, y)\, d\mu(y)\, d\mu(x)\,, \tag{1}$$

где нижню грань берем по всем положительным мерам распределённым на таком множестве A, что их полные массы равны 1. Весь этот вопрос разработан подробно многими авторами (например [1]).

Предположим, что всякий шар в $\mathcal{E}^m$ обладает мерой равновесия и что E обладают мерой равноевсия, которую обозначим через η. Нижнюю грань (1) будем обозначать через γ.

2. Экстремальная задача для мер. В работе [3] доказана ([1]) следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть A компактное множество, на котором задана последовательность мер $\{\mu_n\}$. Пусть, дальше, $\{a_n\}$ последовательность точек, стремящихся к некоторой точке a. Если $\{\mu_n\}$ имеет пределом меру μ, тогда имеет место неравенство*

$$\underline{\lim} \int K(a_n, y) d\mu_n(y) \geqslant \int K(a, y) d\mu(y) .$$

Лемма 2. *Пусть x_0 точка множества E, а V некоторая её окрестность. Тогда существует положительная мера ϱ распределённая на V и такая, что её потенциал $U^\varrho(x)$ конечен и непрерывен.*

Доказательство. Построим такую меру. Возможны два случая:

а) x_0 — граничная точка E,

б) x_0 — внутренная точка.

В первом случае рассмотрим ограничение меры равновесия η до подмножества V. Это ограничение обозначим через η_v. Если U^{η_v} непрерывен, тогда положим просто $\varrho = \eta_v$. Если же U^{η_v} не является непрерывной функией, тогда рассматриваем её множество точек разрыва Z. Пусть $v(x)$ потенциал Эванса множества Z. Это потенциал положительной меры, бесконечный в каждой точке множества Z, но вне Z конечный. Он заведомо существует, так как Z множество типа F_σ ёмкости 0.

Положим $\varrho = \big(v(x)\big)^{-1}\eta_v$. Докажем, что U^ϱ всюду непрерывна. Ясно, что достаточно проверить непрерывность лишь в точках множества Z. Пусть ε какое-то положительное число. Тогда найдём такое открытое множество $W \supset Z$, что для $x \in W$ будем иметь

$$\int\limits_W K(x, y) d\varrho(y) \leqslant \varepsilon .$$

Возмём теперь последовательность точек $\{x_n\}$, стремящуюся к некоторой точке $x_0 \in Z$. Тогда получим оценки

$$\overline{\lim}\, U^\varrho(x_n) \leqslant \overline{\lim} \int\limits_{Z-W} K(x, y) d\varrho(y) + \overline{\lim} \int\limits_W K(x, y) d\varrho(y) \leqslant U^\varrho(x_0) + \varepsilon\varrho(W) .$$

Но так как ε произвольно близко к нулю, то

$$\overline{\lim}\, U^\varrho(x_n) \leqslant U^\varrho(x_0) .$$

([1]) См. теорему 6 в [3].

Обратное неравенство следует из нижней полунепрерывности потенциалов. Итак, непрерывность в точках множества Z доказана. В остальных точках она очевидна.

В случае (б) берём в качествие ϱ меру равновесия некоторого шара, содержащегося в V.

Лемма 3. *Пусть $\{\mu_n\}$ последовательность мер на E стремящаяся к мере μ. Пусть a точка множества E, в которой U^μ принимает локальный максимум. Тогда для всякого положительного числа ε найдется такая последовательность точек a_n, стремящаяся к a, что*

$$|\lim U^{\mu_n}(a_n) - U^\mu(a)| < \varepsilon .$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такая окрестность V точки a, что на V имеем для всех достаточно больших n неравенство

$$U^{\mu_n}(x) \geqslant U^\mu(a) + \varepsilon_0 , \quad \text{где} \quad \varepsilon_0 > 0. \tag{2}$$

(В силу леммы 1 противное исключается). Теперь используем только что построенную (по лемме 2) меру ϱ и проинтегрируем обе части неравенства (2) по $d\varrho(x)$.

$$\int U^{\mu_n}(x)\,d\varrho(x) \geqslant \int U^\mu(a)\,d\varrho(x) + \varepsilon\varrho(V) . \tag{3}$$

Пользуясь теоремой Фубини легко проверить, что

$$\int U^{\mu_n} d\varrho = \int U^\varrho d\mu_n \cdot$$

Переходя здесь к пределу, получаем

$$\lim \int U^{\mu_n} d\varrho = \int U^\varrho d\mu_n ,$$

что противоречит (3). Лемма доказана.

Теперь мы поставим задачу, которая имеет в качестве решения меру равновесия. Отыскание меры равновесия и баляяж — это самые главные задачи теории потенциала. Обозначим буквой M совокупность распределённых на E положительных мер полной массы 1. Пусть на F задана положительная мера ν, полная маса которой не превосходит 1.

Задача 1. *Найти меру которая осуществляет*

$$\inf_{\mu \in M} \{\sup_{x \in E} U^\mu(x) - \int U^\nu d\mu\} .$$

Докажем, что эта задача имеет решение. Пусть $\{\mu_n\}$ минимизирующая последовательность мер, и a_n последовательность точек на E, подобрана так, что

$$\sup_{x \in E} U^{\mu_n}(x) \geqslant U^{\mu_n}(a_n) > \sup_{x \in E} U^{\mu_n}(x) - n^{-1} . \tag{4}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можем принять, что a_n имеет предельную точку a и что μ_n стремится к некоторой мере $\underline{\mu}$. Полагаем

$$m_n = \sup U^{\mu_n}(x) - \int U^{\nu} d\mu_n \quad \text{и} \quad m = \lim m_n . \tag{5}$$

Лемма 4. *Имеют место равенства*

$$U^{\underline{\mu}}(a) = \sup U^{\underline{\mu}}(x) , \tag{6}$$

$$m = U^{\underline{\mu}}(a) - \int U^{\nu} d\underline{\mu} . \tag{7}$$

Доказательство. Допустим что (6) неверно. Тогда существует точка b и положительное число ε такие, что

$$U^{\underline{\mu}}(b) > U^{\underline{\mu}}(a) + \varepsilon_0 .$$

Но, всилу леммы 3, существует такая последовательность точек b_n, что начиная с некоторово номера

$$U^{\mu_n}(b_n) \geqslant U^{\underline{\mu}}(b) - \varepsilon/2 > U^{\mu_n}(a_n) ,$$

а это противоречит соотношению (4). Таким образом доказано (6).

Пусть теперь (7) неверно. Тогда имеем

$$m < U^{\underline{\mu}}(a) - \int U^{\nu} d\eta . \tag{8}$$

(Овратное неравенство исключает лемма 1). Но из (6) следует

$$m = \lim m_n = \lim \left\{ \sup U^{\mu_n}(a_n) - \int U^{\nu} d\mu_n \right\} ,$$

и мы получили противоречие с (8). Этим лемма полностью доказана.

Из неё получается непосредственно

Следствие: *Существует мера, дающая решение задаи* 1.

Лемма 5. *Пусть σ знакопеременная мера распределена на E и таковая, что $\sigma(E) = 0$. Тогда*

$$\sup_E U^{\eta+\sigma}(x) - \int U^{\nu} d(\eta+\sigma) \geqslant \sup_E U^{\eta}(x) - \int U^{\nu} d\eta .$$

Доказательство.

$$\sup U^{\eta+\sigma}(x) - \sup U^{\eta}(x) \geqslant \sup_E U^{\sigma}(x) \geqslant \sup_F U^{\sigma}(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int U^{\sigma} d\nu = \int U^{\nu} d\sigma = \int U^{\nu} d(\eta+\sigma) - \int U^{\nu} d\eta .$$

Рассматривая первый и последний члены полученного неравенства легко приходим к утверждению леммы.

Теперь мы представим меру $\underline{\mu}$ как $\eta + \sigma$ (здесь η мера равновесия для E). Из леммы 5 и из предыдущего следствия вытекает непосредственно

Теорема 1. *Задача* 1 *имеет решение. В каждом случае, независимо от ν, мера, реализующая искомый экстремум, является мерой равновесия.*

3. Экстремельная задача Ф. Леи. Рассмотрим функцию $\omega(x,y) = \exp\{-K(x,y)\}$. Пусть, в качествие F взято одноточечное множество $\{z_0\}$ и n целое число больше единицы. Находим систему точек $\zeta_1^n, \dots, \zeta_n^n$, которые осуществляют

$$\inf_{x_0,\dots,x_n\in E}\left\{\max_{j=0,\dots,n}\prod_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant n\\ \nu\neq j}}\frac{\omega(z_0,x_\nu)}{\omega(x_j,x_\nu)}\right\}.$$

Несомненно, системы $\{\zeta_0^n,\dots,\zeta_n^n\}$ зависят от z_0. В монографии [2] ([2]) доказано существование предела

$$\lim\left[\prod_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant n\\ \nu\neq j}}\frac{\omega(z_0,\zeta_\nu^n)}{\omega(\zeta_j^n,\zeta_\nu^n)}\right]^{1/n},$$

но $\omega(z,z') = |z-z'|$ только в классическом случае (в комплексной плоскости этот предел найден) ([2]). Попытаемся объяснить качественный смысл этих функций. Вернёмся к нашим прежним обозначениям, в пространство $\mathcal{E}^m$.

Задача 2. *Требуется найти точки $\{\zeta_0^n, \dots, \zeta_n^n\}$, для которых осуществляется*

$$\inf_{x_0,\dots,x_n\in E}\left\{\max_{0\leqslant j\leqslant n}\sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant n\\ \nu\neq j}}\big(K(x_j,x_\nu)-K(z_0,x_\nu)\big)\right\}$$

и найти предельное распределение этих точек.

Первый вопрос этой задачи разрешим при всяком $n\geqslant 1$. Обозначим это решение через $\{\zeta_0^n,\dots,\zeta_n^n\}$, приписывая индексы таким образом, чтобы $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n}$ был осуществлен для $j=0$. Определим последовательность мер $\{\vartheta_n\}$, задавая каждой точке ζ_j^n, $j=1,\dots,n$ меру n^{-1}. Тепер можно более точно поставить второй вопрос задачи 2:

Стремится ли ϑ_n к какой то мере и если так, то какая это мера?

Далее, рассмотрим так называемые „экстремальные точки" $\eta_0^n,\dots,\eta_n^n$, т. е. точки, для которых осуществляется

$$\inf_{x_i\in E}\left\{\sum_{\substack{i,k=0,\dots,n\\ i\neq k}}K(x_i,x_j)\right\}.$$

Мы нумеруем их таким образом, чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{n}\big(K(\eta_0^n,\eta_\nu^n)-K(z_0,\eta_\nu^n)\big) = \max_{0\leqslant j\leqslant n}\sum_{\nu\neq j}\big(K(\eta_j^n,\eta_\nu^n)-K(z_0,\eta_\nu^n)\big).$$

([2]) См. [2], главу XI, § 4.

Определяем последовательность мер τ_n, задавая каждой точке η_j^n, $j = 1, \ldots, n$, меру n^{-1}. В работе [3] доказано, что τ_n стремится к мере равновесия η.

Лемма 6. *Последовательность мер $\{\vartheta_n\}$ стремится к мере равновесия.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что предельная мера последовательности ϑ_n дает решение задачи 1. Допустим, что это не так. Тогда, согласно теореме 1, найдется последовательность ϑ_{a_n}, имеющая пределом некоторую меру θ, для которой

(9) $$\sup_{x\in E} U^\theta(x) - U^\theta(z_0) > \sup_{x\in E} U^\eta(x) - U^\eta(z_0) .$$

Далее, в работе [3] доказано ([3]) что

$$\overline{\lim} \sum_{j=0}^{n} K(\eta_0^{a_n}, \eta_j^{a_n}) \leqslant \gamma \big(= \sup_{x\in E} U^\eta(x)\big) .$$

Мы можем считать, что $\eta_0^{a_n}$ имеет пределом некоторую точку b и $\zeta_0^{a_n}$ — точку a. Согласно лемме 1

$$\underline{\lim} \sum_{j=1}^{n} K(\eta_0^{a_n}, \eta_j^{a_n}) \geqslant \int K(b, y) d\eta(y) = U^\eta(b) .$$

Поэтому

(10) $$U^\eta(b) \leqslant \gamma .$$

По определению

$$\sum_{j=1}^{n} \big(K(\zeta_0^{a_n} - \zeta_j^{a_n}) - K(z_0, \zeta_j^{a_n})\big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \big(K(\eta_0^{a_n}, \eta_j^{a_n}) - K(z_0, \eta_j^{a_n})\big) .$$

Переходя к пределу и учитывая (10), получим

(11) $$U^\theta(a) - U^\theta(z_0) \leqslant \gamma - U^\eta(z_0) .$$

По основным свойствам потенциала рановесия

$$\gamma = \sup_{x\in E} U^\eta(x) .$$

Пользуясь такими же рассуждениями, как в доказательстве леммы 4, можно доказать, что

$$U^\theta(a) = \sup_{x\in E} U^\theta(z_0) .$$

([3]) См. теоремы 14, 15, 16 в [3].

Теперь (11) приобретает вид

$$\sup U^{\theta}(x) - U^{\theta}(z_0) \leqslant \sup U^{\eta}(x) - U^{\eta}(z_0) . \tag{12}$$

Учитывая, что $U^{\theta}(z_0)$ может быть представлено как $\int U^{\theta} d\nu$, где ν мера $+1$ сосредоточена на одноточечном множестве $\{z_0\}$, приходим к противоречию.

В качествие следствия получается

Теорема 2. *Последовательность функций*

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(K(z_0, \zeta_j^n) - K(\zeta_0^n, \zeta_j^n)\right)\right\}$$

стремится вне E к потенциалу равновесия $U^{\eta}(z_0) - \gamma$.

4. Обобщение задачи Чебышева. В классическом случае полиномы Чебышева множества E ([4]) — это полиномы комплексного переменного, которые осуществляют

$$\inf_{x_i \in E} \max_{z \in E} \prod_{i=1}^{n} (z - x_i) .$$

Или, в терминах логарифмического потенциала

$$\sup_{x_i} \min_{z \in E} \sum_{i=1}^{n} \log |z - x_i|^{-1} .$$

Здесь рассмотрим более общую задачу в $\mathcal{E}^m$.

Задача 3. *Тревуется найти точки $\omega_1^n, \ldots, \omega_n^n$, для которых осуществляется*

$$\sup_{x_i \in E} \min_{z \in E} \sum_{i=1}^{n} K(z, x_i)$$

и найти их предельное распределение.

Факт, что такие точки существуют при всяком $n \geqslant 1$, очевиден. Мы обозначим эти точки символами ω_i^n. Далее, определим последовательность мер λ_n, полагая

$$\int \varphi d\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\omega_i^n) n^{-1}$$

для каждой непрерывной функции φ.

([4]) См. [5], главу „Ёмкость замкнутих множеств".

Теорема 3. *Всякая подпоследовательность λ_{a_n}, имеющая пределом какую-то меру λ_a, определяет последовательность $U^{\lambda_{a_n}}$, стремящуюся к потенциалу U^{λ_a}. Это стремление по мере η на E и почти равномерное вне E. На несущем множествие меры η имеем $U^{\lambda_a}(x) = U^{\eta}(x)$.*

Доказательство. В работе [4] доказано что последовательность чисел

$$\left\{\frac{1}{n} \min \sum_{i=1}^{n} K(x, \omega_i^n)\right\}$$

стремится к постоянной $\gamma = \sup U^{\eta}(x)$. Отсюда, согласно лемме 1, получаем

$$\underline{\lim}\, U^{\lambda_n}(x) \geqslant \gamma \quad (x \in E)\,. \tag{13}$$

Далее, получаем оценку

$$\int U^{\lambda_n} d\eta = \int U^{\eta} d\lambda_n \leqslant \eta\,.$$

Другими словами — интегральное среднее значение $U^{\lambda_n}(x)$ по мере η не превосходит γ. Переходя к пределу и учитивая (13) видим, что $U^{\lambda}(x) = \gamma$ почти везде по мере η, и $U^{\lambda_a}(x) \geqslant \gamma$ на E. Существование подпоследовательностей $\{\lambda_{a_n}\}$, обладающих предельными мерами, следует из общих теорем теории меры.

Можно проверить на простых примерах, что вообще λ_a отлично от η. Чтобы доказать больше, сделаем новые предположения.

А. (Усиленный принцип максимума). *Потенциал всякой положительной меры μ достигает свою верхнюю грань на несущем множестве меры μ и в каждой точке вне этого несущего множества он меньший от своей верхней грани.*

Б. *E есть просто граница области D.*

На этих же предположениях основана

Лемма 7. *Несущим множеством меры равновесия множества E является всё E.*

Доказательство. По существу, если допустить противное, тогда найдется открытое множество Q, удалённое от несущего множества меры η на положительное расстояние, и такое, что $\eta(Q) = 0$. Но это, в силу усиленного принципа максимума, противоречило бы теореме о равновеси, так как Q открытое и не может быть исключительным множеством (т. е. таким, что $U^{\eta}(x) < \gamma$ для $x \in Q$).

Из теоремы 3 и только что доказанной леммы получается.

Теорема 4. *Если выполнени предположения* А *и* Б, *то $\lambda_n \to \eta$, и вне E существует предел*

$$\lim U^{\lambda_n}(x) = U^{\eta}(x)$$

и это стремление почти равномерно.

Цитированная литература

[1] N. Ninomiya, *Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symmetrique*, Journ. Inst. Polyt. Osaka City Univ. 8 (1957), стр. 147-179.

[2] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.

[3] A. Szybiak, *Investigation of some measures and sequences related to the extreme points*, Ann. Polon. Math. 10 (1961), стр. 279-291.

[4] — *On some constants related to generalised potentials*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), стр. 265-268.

[5] И. М. Голузин, *Геометрическа теория функций комплексного переменного*, Москва 1950.

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1962