ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XIV, 1 (1974)

T. ZALESKI (Gliwice)

SUR LA RÉDUCTION DES DÉTERMINANTS DES MATRICES DE JACOBI D'UN TYPE SPÉCIAL AVEC L'APPLICATION À LA RECHERCHE DE LEURS VALEURS PROPRES

1. Introduction. Les champs de températures dans les échangeurs hélicoïdaux et ceux à plaques [1] peuvent être déterminés sous certaines conditions (voir [2] et [3]) en partant des équations:

1° pour un échangeur hélicoïdal

$$\frac{dT}{dx} = F_{2n}T,$$

T étant une matrice de la forme $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{2n})$ et F_{2n} étant une matrice jacobienne

$$F_{2n} = \begin{bmatrix} -A & A & & & & & \\ B & -2B & B & & & & \\ & A & -2A & A & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & B & -2B & B & \\ & & & & A & -2A & A \\ & & & & & B & -B \end{bmatrix},$$

2° pour un échangeur à plaques

$$\frac{dT}{dx} = G_{4n}T$$

où $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{4n})$ et G_{4n} est une matrice jacobienne

$$
G_{4n}=\begin{bmatrix}
A & -A & & & & & & & & & & \\
B & -2B & B & & & & & & & & & \\
 & A & -2A & A & & & & & & & & \\
 & & -B & 2B & -B & & & & & & & \\
 & & & -A & 2A & -A & & & & & & \\
 & & & & B & -2B & B & & & & & \\
 & & & & & A & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & B & & & & \\
 & & & & & & A & -2A & A & & & \\
 & & & & & & & -B & 2B & -B & & \\
 & & & & & & & & -A & 2A & -A & \\
 & & & & & & & & & B & -2B & B \\
 & & & & & & & & & & A & -2A & A \\
 & & & & & & & & & & & -B & B
\end{bmatrix}
$$

Grâce à l'hypothèse que $AB \neq 0$, on peut représenter les déterminants caractéristiques propres sous la forme

$$
\det(F_{2n}-\lambda E) = A^nB^n\begin{vmatrix}
-\frac{\lambda+A}{A} & 1 & & & & & & \\
1 & -\frac{\lambda+2B}{B} & 1 & & & & & \\
 & 1 & -\frac{\lambda+2A}{A} & 1 & & & & \\
 & & 1 & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & 1 & & & \\
 & & & 1 & -\frac{\lambda+2B}{B} & 1 & & \\
 & & & & 1 & -\frac{\lambda+2A}{A} & 1 \\
 & & & & & 1 & -\frac{\lambda+B}{B}
\end{vmatrix}
$$

$$
=A^nB^nP_{2n}(\lambda)
$$

et, respectivement,

$$
\det(G_{2n}-\lambda E) = A^{2n}B^{2n}\begin{vmatrix}
\frac{\lambda-A}{A} & 1 & & & & & & & & & & & \\
1 & -\frac{\lambda+2B}{B} & 1 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & -\frac{\lambda+2A}{A} & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & \frac{\lambda-2B}{B} & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & \frac{\lambda-2A}{A} & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & -\frac{\lambda+2B}{B} & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & -\frac{\lambda+2A}{A} & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & \frac{\lambda-2B}{B} & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \frac{\lambda-2A}{A} & 1 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & -\frac{\lambda+2B}{B} & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & -\frac{\lambda+2A}{A} & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & \frac{\lambda-B}{B}
\end{vmatrix}
$$

$$
=A^{2n}B^{2n}Q_{4n}(\lambda).
$$

La structure spécifique des déterminants $P_{2n}(\lambda)$ et $Q_{4n}(\lambda)$ permet non seulement de trouver les formules de réduction pour chacun d'eux, mais aussi de résoudre en conséquence les équations caractéristiques pour des n naturels quelconques.

Let déterminants $P_{2n}(\lambda)$ et $Q_{4n}(\lambda)$ se composent de blocs de plusieurs types bien déterminés. En particulier, les blocs situés sur la diagonale principale, sauf ceux dans les angles gauche supérieur et droit inférieur, coïncident. Ils peuvent être classés parmi les déterminants d'un type général. Introduisons les désignations:

$$A_k = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & \\ 1 & \alpha_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha_{k-1} & 1 \\ & & & 1 & \alpha_k \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$B_l = \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & & & \\ 1 & \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \beta_{l-1} & 1 \\ & & & 1 & \beta_l \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$D_s = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & & & \\ 1 & x_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x_{s-1} & 1 \\ & & & 1 & x_s \end{vmatrix}, \tag{3}$$

Les déterminants A_k, B_l et D_s sont des jacobiens; par conséquent, tous les termes n'étant pas placés sur la diagonale principale, sur sa sur-diagonale et sur sa sous-diagonale, sont nuls. Considérons-les comme des blocs à partir desquels nous construisons le déterminant jacobien

$$(4)\qquad V_n = \begin{vmatrix} A_k & 1 & & & \\ 1 & D_s & 1 & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & 1 & D_s & 1 \\ & & & 1 & B_l \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p \end{matrix} \quad (n=ps+k+l;\ p=1,2,\ldots).$$

Dans la suite, nous allons nous occuper de la recherche et de la résolution d'une équation de récurrence correspondante à ce type de déterminantes.

2. Equation de récurrence. Soit donnée une matrice jacobienne

$$(5)\qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

où $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_n \neq 0$. Le déterminant de la matrice (5) peut être écrit sous la forme

$$(6)\qquad \det \mathbf{C} = C = \varphi_n \begin{vmatrix} \eta_1 a_1 & 1 & & & \\ 1 & \eta_2 a_2 & 1 & & \\ & 1 & \eta_3 a_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & \eta_n a_n \end{vmatrix}$$

où

$$\varphi_{2k} = b_1 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{2k-1} \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot \ldots \cdot c_{2k},$$
$$\varphi_{2k+1} = b_2 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{2k} \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_{2k+1},$$
$$\eta_1 = 1,\ \eta_2 = 1/b_1 c_2,\ \ldots,\ \eta_i = \varphi_{i-1}/\varphi_i,$$
$$k = 1, 2, \ldots \text{ et } i = 3, 4, \ldots$$

Examinons les déterminants du type (6), c'est-à-dire dont tous les termes de la sur-diagonale et de la sous-diagonale voisines de la diagonale principale sont des unités. Posons

(7) $$D(r,s) = \begin{vmatrix} x_r & 1 & & & \\ 1 & x_{r+1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x_{s-1} & 1 \\ & & & 1 & x_s \end{vmatrix}$$

où $1 \leqslant r \leqslant s$,

(7a) $$D(r, r) = x_r$$

et, conformément à (3),

(7b) $$D(1, s) = D_s.$$

Calculons:

(7c) $$D(r, r+1) = \begin{vmatrix} x_r & 1 \\ 1 & x_{r+1} \end{vmatrix} = x_r x_{r+1} - 1,$$
$$D(r, r+2) = \begin{vmatrix} x_r & 1 & 0 \\ 1 & x_{r+1} & 1 \\ 0 & 1 & x_{r+2} \end{vmatrix} = x_r x_{r+1} x_{r+2} - x_r - x_{r+2}.$$

Lemme. *Les déterminants du type* (7) *satisfont à la relation*

(8) $$D(r, s)D(r+1, s-1) - D(r, s-1)D(r+1, s) = -1$$

où $s = 3, 4, \ldots$ *et* $1 \leqslant r \leqslant s-2$.

Démonstration. Le développement de $D(r, s)$ et $D(r, s-1)$ suivant les termes de premières colonnes donne

$$D(r, s) = x_r D(r+1, s) - D(r+2, s),$$
$$D(r, s-1) = x_r D(r+1, s-1) - D(r+2, s-1).$$

Calculons:

$$D(r, s)D(r+1, s-1)-D(r, s-1)D(r+1, s)$$
$$= [x_r D(r+1, s)-D(r+2, s)]D(r+1, s-1)-$$
$$-[x_r D(r+1, s-1)-D(r+2, s-1)]D(r+1, s)$$
$$= D(r+1, s)D(r+2, s-1)-D(r+1, s-1)D(r+2, s).$$

Cette relation de récurrence prend par l'induction la forme

$$D(r, s)D(r+1, s-1)-D(r, s-1)D(r+1, s)$$
$$= D(s-2, s)D(s-1, s-1)-D(s-2, s-1)D(s-1, s),$$

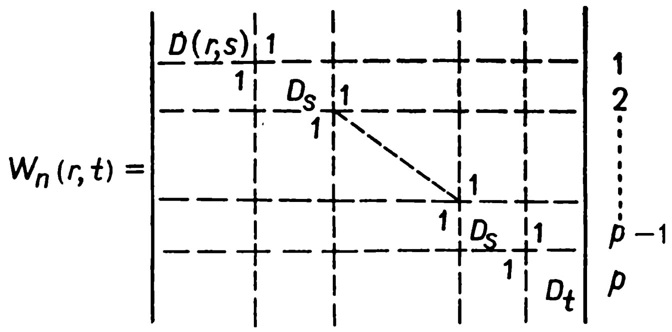
d'où en vertu de (7a) et (7c),

$$D(r, s)D(r+1, s-1)-D(r, s-1)D(r+1, s)$$
$$= (x_{s-2}x_{s-1}x_s-x_{s-2}-x_s)x_{s-1}-(x_{s-2}x_{s-1}-1)(x_{s-1}x_s-1) = -1.$$

La formule (8) est ainsi établie pour $1 \leqslant r \leqslant s-3$. Pour $r = s-2$, on peut la vérifier directement.

Soit à présent

(9)



où $n = (p-1)s+t-r+1$, $1 \leqslant r \leqslant s$ et $1 \leqslant t \leqslant s$. Posons pour abréger

$$W_n(1, t) = W_n \qquad (n = (p-1)s+t).$$

Il vient pour $p = 1$

(9a) $$W_n(r, t) = D(r, t) \qquad \text{où } 1 \leqslant r \leqslant t,$$

et convenons pour $n = 0$ que $W_0 = 1$.

En supposant que $p \geqslant 3$, cherchons la formule de récurrence pour le déterminant W_n. A cet effet, développons le déterminant $W_n(r, t)$ suivant les mineurs de $s-r+1$ premières colonnes:

(10) $$W_n(r, t) = D(r, s)W_{n-s}-D(r, s-1)W_{n-s-1}(2, t).$$

Le développement suivant la première colonne donne

$$W_{n-s} = x_1 W_{n-s-1}(2, t) - W_{n-s-2}(3, t),$$

d'où

(10a) $$x_1 W_{n-s-1}(2, t) = W_{n-s} + W_{n-s-2}(3, t).$$

On vérifie qu'en même temps

(10b) $$D_{s-1} = x_i D(2, s-1) - D(3, s-1).$$

En posant $r = 1$ dans (10) et en appliquant (10a) et (10b), il vient

$$\begin{aligned} W_n &= D_s W_{n-s} - [x_1 D(2, s-1) - D(3, s-1)] W_{n-s-1}(2, t) \\ &= D_s W_{n-s} - D(2, s-1) x_1 W_{n-s-1}(2, t) + D(3, s-1) W_{n-s-1}(2, t) \\ &= D_s W_{n-s} - D(2, s-1)[W_{n-s} + W_{n-s-2}(3, t)] + D(3, s-1) W_{n-s-1}(2, t) \\ &= [D_s - D(2, s-1)] W_{n-s} - D(2, s-1) W_{n-s-2}(3, t) + D(3, s-1) W_{n-s-1}(2, t) \end{aligned}$$

et on a en vertu de (10)

$$\begin{aligned} W_{n-s-2}(3, t) &= D(3, s) W_{n-2s} - D(3, s-1) W_{n-2s-1}(2, t), \\ W_{n-s-1}(2, t) &= D(2, s) W_{n-2s} - D(2, s-1) W_{n-2s-1}(2, t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} W_n = [D_s - D(2, s-1)] W_{n-s} + \\ + [D(3, s-1) D(2, s) - D(2, s-1) D(3, s)] W_{n-2s}. \end{aligned}$$

En vertu du lemme (pour $r = 2$), nous pouvons écrire

$$W_n = [D_s - D(2, s-1)] W_{n-s} - W_{n-2s},$$

cette formule se trouvant ainsi établie pour $n \geqslant 2s+1$ et $s \geqslant 4$. Remarquons cependant que

1° La même formule subsiste pour $n = 2s$, car $W_{2s} = D_s D_s - D_{s-1} D(2, s)$ et conformément au lemme $D_{s-1} D(2, s) = D_s D(2, s-1) + 1$. Par conséquent, $W_{2s} = [D_s - D(2, s-1)] D_s - 1$; or $D_s = W_s$ et $1 = W_0$, d'où finalement

$$W_{2s} = [D_s - D(2, s-1)] W_s - W_0.$$

2° On a de même pour $s \leqslant 3$:

(a) $$W_n = x_1 W_{n-1} - W_{n-2} \quad \text{pour } s = 1,$$

(b) $$W_n = D_2 W_{n-2} - x_1 W_{n-3}(2, t) \quad \text{pour } s = 2$$

et, le développement de W_{n-2} donnant

$$W_{n-2} = x_1 W_{n-3}(2, t) - W_{n-4},$$

on a

$$x_1 W_{n-3}(2, t) = W_{n-2} W_{n-4},$$

d'où en vertu de (10a)

$$W_n = (D_2 - 1) W_{n-2} - W_{n-4} = (x_1 x_2 - 2) W_{n-2} - W_{n-4}.$$

(c) $$\begin{aligned} W_n &= D_3 W_{n-3} - D_2 W_{n\;4}(2, t) \\ &= D_3 W_{n-3} - x_1 x_2 W_{n-4}(2, t) + W_{n-4}(2, t) \qquad \text{pour } s = 3, \end{aligned}$$

d'où en vertu de (10a)

$$\begin{aligned} W_n &= D_3 W_{n-3} - x_2 [W_{n-3} + W_{n-5}(3, t)] + W_{n-4}(2, t) \\ &= (D_3 - x_2) W_{n-3} - x_2 W_{n-5}(3, t) + W_{n-4}(2, t). \end{aligned}$$

Le développement de $W_{n-4}(2, t)$ suivant la première colonne donne

$$W_{n-4}(2, t) = x_2 W_{n-5}(3, t) - W_{n-6},$$

d'où en tenant compte de (7a),

$$W_n = [D_3 - D(2, 2)] W_{n-3} - W_{n-6}.$$

Nous pouvons donc écrire la formule de récurrence suivante:

(11) $$W_n = a(s) W_{n-s} - W_{n-2s},$$

où $s = 1, 2, \ldots,\ p \geqslant 2,\ n = (p-1)s + t,\ n \geqslant 2s,\ 0 \leqslant t \leqslant s$ et

(12) $$a(s) = \begin{cases} x_1 & \text{pour } s = 1, \\ x_1 x_2 - 2 & \text{pour } s = 2, \\ D_s - D(2, s-1) & \text{pour } s = 3. \end{cases}$$

Ceci établi, posons

(13) $$A(r,k) = \begin{vmatrix} \alpha_r & 1 & & & \\ 1 & \alpha_{r+1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha_{k-1} & 1 \\ & & & 1 & \alpha_k \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B(r,l) = \begin{vmatrix} \beta_r & 1 & & & \\ 1 & \beta_{r+1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \beta_{l-1} & 1 \\ & & & 1 & \beta_l \end{vmatrix}.$$

On a d'après (1) et (2)

$$A(1, k) = A_k \quad \text{et} \quad B(1, l) = B_l.$$

Reprenons la formule (4). Nous allons établir l'égalité

(14) $$V_n = a(s) V_{n-s} - V_{n-2s},$$

où $n = ps + k + l$, $p = 2, 3, \ldots$ et $s = 1, 2, \ldots$

Développons d'abord le déterminant (4) suivant les mineurs formés de k premières colonnes et puis les déterminants ainsi obtenus — suivant les mineurs formés de l dernières colonnes. En utilisant maintenant les notations de (9) et (13), on arrive à la formule

$$
\begin{aligned}
(15)\qquad V_n &= V_{ps+k+l}\\
&= A_k B_l W_{ps} - A_k B(2, l) W_{ps-1} - A_{k-1} B_l W_{ps-1}(2, s) +\\
&\qquad + A_{k-1} B(2, l) W_{ps-2}(2, s-1).
\end{aligned}
$$

Posons dans cette formule

$$(15\mathrm{a})\qquad A_0 = 1 \text{ pour } k = 1 \quad \text{et} \quad B(2, 1) = 1 \text{ pour } l = 1.$$

Posons en outre pour $s = 1$ $x_1 = x_1'$ et pour $s = 2, 3, \ldots$

$$x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ \ldots,\ x_{s-1}' = x_s,\ x_s' = x_1.$$

$$
D'(r,s) = \begin{vmatrix}
x_r' & 1 & & & \\
1 & x_{r+1}' & 1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & 1 & x_{s-1}' & 1 \\
 & & & 1 & x_s'
\end{vmatrix}, \quad D'(1,s) = D'_s,
$$

$$
W_n'(r,t) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c}
D'(r,s) & 1 & & & \\
\hline
1 & D_s' & 1 & & \\
\hline
 & 1 & \ddots & 1 & \\
\hline
 & & 1 & D_s' & 1 \\
\hline
 & & & 1 & D_t'
\end{array}\right|
$$

Alors

$$W_{ps-1}(2, s) = W_{ps-1}'(1, s-1) = W_{ps-1}',$$

$$W_{ps-2}(2, s-1) = W_{ps-2}'(1, s-2) = W_{ps-2}',$$

$$V_n = A_k B_l W_{ps} - A_k B(2, l) W_{ps-1} - A_{k-1} B_l W_{ps-1}' + A_{k-1} B(2, l) W_{ps-2}',$$

d'où en appliquant (11),

$$V_n = V_{ps+k+l} = A_k B_l [a(s) W_{(p-1)s} - W_{(p-2)s}] -$$
$$- A_k B(2, l) [a(s) W_{(p-1)s-1} - W_{(p-2)s-1}] - A_{k-1} B_l [a'(s) W'_{(p-1)s-1} -$$
$$- W'_{(p-2)s-1}] + A_{k-1} B(2, l) [a'(s) W'_{(p-1)s-2} - W'_{(p-2)s-2}].$$

Remarquons que

$$a'(s) = \begin{cases} x_1' & \text{pour } s = 1, \\ x_1' x_2' - 2 & \text{pour } s = 2, \\ D_s' - D'(2, s-1) & \text{pour } s \geqslant 3. \end{cases}$$

Pour $s = 1$ nous avons $x_1' = x_1$ et $a'(1) = a(1)$, pour $s = 2$ il vient $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$ et $a'(2) = a(2)$, et pour $s \geqslant 3$

$$a'(s) = D_s' - D'(2, s-1) = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & x_s & 1 \\ & & & 1 & x_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & x_s \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} x_2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & x_s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & x_{s-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & x_s \end{vmatrix} = D_s - D(2, s-1) = a(s).$$

On a donc toujours $a'(s) = a(s)$ et par conséquent

$$V_n = a(s) [A_k B_l W_{(p-1)s} - A_k B(2, l) W_{(p-1)s-1} -$$
$$- A_{k-1} B_l W_{(p-1)s-1}(2, s) + A_{k-1} B(2, l) W_{(p-1)s-2}(2, s-1)] -$$
$$- [A_k B_l W_{(p-2)s} - A_k B(2, l) W_{(p-2)s-1} -$$
$$- A_{k-1} B_l W_{(p-2)s-1}(2, s) + A_{k-1} B(2, l) W_{(p-2)s-2}(2, s-1)].$$

En vertu de (15), les expressions en crochets sont égales respectivement à V_{n-s} et V_{n-2s}, d'où la formule (14) pour les valeurs considérées des indices.

Reste à compléter la démonstration de la formule (14) pour le cas de $p = 3$ avec $s = 1$ et pour celui de $p = 2$ avec un s quelconque. Or on a pour $p = 2$ et $s \geqslant 3$

$$
\begin{aligned}
V_n &= A_k B_l W_{2s} - A_k B(2, l) W_{2s-1} - A_{k-1} B_l W_{2s-1}(2, s) + \\
&\quad + A_{k-1} B(2, l) W_{2s-2}(2, s-1) \\
&= A_k B_l [a(s) W_s - W_0] - A_k B(2, l)[D_s D_{s-1} - D_{s-1} D(2, s-1)] - \\
&\quad - A_{k-1} B_l [D(2, s) D_s - D(2, s-1) D(2, s)] + \\
&\quad + A_{k-1} B(2, l)[D(2, s) D_{s-1} - D^2(2, s-1)] \\
&= A_k B_l [a(s) W_s - W_0] - A_k B(2, l)[D_s - D(2, s-1)] D_{s-1} - \\
&\quad - A_{k-1} B_l [D_s - D(2, s-1)] D(2, s) + \\
&\quad + A_{k-1} B(2, l)[1 + D_s D(2, s-1) - D^2(2, s-1)].
\end{aligned}
$$

En vertu de (9a) et (12),

$$
\begin{aligned}
V_n &= A_k B_l [a(s) W_s - W_0] - A_k B(2, l) a(s) W_{s-1} - \\
&\quad - A_{k-1} B_l a(s) W_{s-1}(2, s) + \\
&\quad + A_{k-1} B(2, l) a(s) W_{s-2}(2, s-1) + A_{k-1} B(2, l) \\
&= a(s)[A_k B_l W_s - A_k B(2, l) W_{s-1} - A_{k-1} B_l W_{s-1}(2, s) + \\
&\quad + A_{k-1} B(2, l) W_{s-1}(2, s-1)] - [A_k B_l - A_{k-1} B(2, l)] \\
&= a(s) V_{n-s} - V_{n-2s}.
\end{aligned}
$$

Enfin, pour $p = 2$ et $s = 1$, pour $p = 2$ et $s = 2$, de même que pour $p = 3$ et $s = 1$, la formule (14) peut être facilement démontrée par vérification directe.

3. Résolution de l'équation de récurrence. La résolution de l'équation de récurrence (14) conduit à une formule pour calculer le déterminant V_n.

Admettons que q_1 et q_2 sont les racines de l'équation

(16) $$q^2 - aq + 1 = 0,$$

où l'on a écrit, pour abréger, a au lieu de $a(s)$. On a

(17) $$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \\ q_2 &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } a^2 \neq 4,$$

$$q_1 = q_2 = \pm 1 \quad \text{pour } a = \pm 2$$

et naturellement

(18a) $$q_1 q_2 = 1,$$

(18b) $$q_1 + q_2 = a.$$

Nous allons démontrer que la solution de l'équation de récurrence (14) a la forme

$$(19a)\qquad V_{k+l+ps} = \frac{q_1^p - q_2^p}{q_1 - q_2} V_{k+l+s} - \frac{q_1^{p-1} - q_2^{p-1}}{q_1 - q_2} V_{k+l}$$
$$= Q(p) V_{k+l+s} - Q(p-1) V_{k+l},$$

où $p = 1, 2, \ldots, q_1 \neq q_2$ et

$$(20)\qquad Q(m) = \frac{q_1^m - q_2^m}{q_1 - q_2} \quad \text{pour } m = 0, 1, \ldots$$

Il sera également démontré que, pour $q_1 = q_2$, on a la forme limite suivante de (19a):

$$(19b)\qquad V_{k+l+ps} = \lim_{q_1 \to q_2} \left[\frac{q_1^p - q_2^p}{q_1 - q_2} V_{k+l+s} - \frac{q_1^{p-1} - q_2^{p-1}}{q_1 - q_2} V_{k+l}\right]$$
$$= \lim_{q_1 \to q_2} [Q(p) V_{k+l+s} - Q(p-1) V_{k+l}]$$
$$= \begin{cases} p V_{k+l+s} - (p-1) V_{k+l} & \text{pour } q = 1 \ (a = 2), \\ (-1)^{p-1}[p V_{k+l+s} + (p-1) V_{k+l}] & \text{pour } q = -1 \ (a = -2). \end{cases}$$

Le procédé de démonstration de (19a) et (19b) sera celui de l'induction. Vérifions ces formules d'abord pour $p = 1$ et $p = 2$. Soit ensuite

(a) $q_1 \neq q_2$. On a alors d'après (14) et (18b)

$$V_{k+l+(p+1)s} = a V_{k+l+ps} - V_{k+l+(p-1)s} = (q_1 + q_2) V_{k+l+ps} - V_{k+l+(p-1)s}$$
$$= (q_1 + q_2)\left[\frac{q_1^p - q_2^p}{q_1 - q_2} V_{k+l+s} - \frac{q_1^{p-1} - q_2^{p-1}}{q_1 - q_2} V_{k+l}\right] -$$
$$- \left[\frac{q_1^{p-1} - q_2^{p-1}}{q_1 - q_2} V_{k+l+s} - \frac{q_1^{p-2} - q_2^{p-2}}{q_1 - q_2} V_{k+l}\right]$$
$$= \frac{q_1^{p+1} - q_2^{p+1} - q_1 q_2 q_2^{p-1} + q_1 q_2 q_1^{p-1} - q_1^{p-1} + q_2^{p-1}}{q_1 - q_2} V_{k+l+s} -$$
$$- \frac{q_1^p - q_2^p - q_1 q_2 q_2^{p-2} + q_1 q_2 q_1^{p-2} - q_1^{p-2} + q_2^{p-2}}{q_1 - q_2} V_{k+l}$$

et, vu l'équation (18a),

$$V_{k+l+(p+1)s}$$
$$= \frac{q_1^{p+1} - q_2^{p+1}}{q_1 - q_2} V_{k+l+s} - \frac{q_1^p - q_2^p}{q_1 - q_2} V_{k+l} = Q(p+1) V_{k+l+s} - Q(p) V_{k+l}.$$

Soit à présent

(b) $q_1 = q_2 = 1$ et $a = 2$. Alors

$$V_{k+l+(p+1)s} = 2V_{k+l+ps} - V_{k+l+(p-1)s} = 2[pV_{k+l+s} - (p-1)V_{k+l}] - \\ - [(p-1)V_{k+l+s} - (p-2)V_{k+l}] = (p+1)V_{k+l+s} - pV_{k+l}.$$

Soit enfin

(c) $q_1 = q_2 = -1$ et $a = -2$. Alors

$$V_{k+l+(p+1)s} = -2V_{k+l+ps} - V_{k+l+(p-1)s} = -2\{(-1)^{p-1}[pV_{k+l+ps} + \\ + (p-1)V_{k+l}]\} - (-1)^{p-2}[(p-1)V_{k+l+s} + (p-2)V_{k+l}] \\ = (-1)^p[(p+1)V_{k+l+s} + pV_{k+l}].$$

4. Un cas particulier. Considérons l'équation

$$V_{k+l+s} = a(s)V_{k+l} = (q_1+q_2)V_{k+l}. \tag{21}$$

En tenant compte de (19a) et (19b), on conclut en vertu de (18a) que

$$V_{k+l+ps} = \begin{cases} \dfrac{q_1^{p+1} - q_2^{p+1}}{q_1 - q_2} V_{k+l} & \text{pour } q_1 \neq q_2, \\ (p+1)V_{k+l} & \text{pour } q_1 = q_2 = 1 \ (a = 2), \\ (-1)^p(p+1)V_{k+l} & \text{pour } q_1 = q_2 = -1 \ (a = -2). \end{cases} \tag{22}$$

Cherchons une condition nécessaire pour que l'équation (21) soit satisfaite. Le développement du déterminant V_{k+l+s} montre que

$$V_{k+l+s} = \begin{cases} a(1)V_{k+l} - A_k B(2, l) - A_{k-l}[B_l - x_1 B(2, l)] & \text{pour } s = 1, \\ a(s)V_{k+l} + A_k[B_l D(2, s-1) - B(2, l)D_{s-1}] - \\ \qquad - A_{k-1}[B_l D(2, s) - B(2, l)D_s] & \text{pour } s \geqslant 2. \end{cases}$$

Il en résulte la condition cherchée:

$$\begin{aligned} -A_k B(2, l) &= A_{k-1}[B_l - x_1 B(2, l)] \qquad \text{pour } s = 1, \\ A_k[B_l D(2, s-1) - B(2, l)D_{s-1}] &= A_{k-1}[B_l D(2, s) - B(2, l)D_s] \\ & \qquad \text{pour } s \geqslant 2. \end{aligned} \tag{23}$$

Dans les formules (23) restent en vigueur les définitions (15a), auxquelles vient s'ajouter la définition $D(2, 1) = 1$. L'équation (21) facilite en particulier la recherche des valeurs propres de la matrice correspondante. Admettons que le déterminant caractéristique peut être transformé dans la forme (4) par les opérations employées dans le cas du déterminant (6). Les termes de la diagonale principale sont alors des fonctions linéaires de la variable λ. En admettant (21), on a

$$V_n = V_{k+l+ps} = \frac{q_1^{p+1} - q_2^{p+1}}{q_1 - q_2} V_{k+l}.$$

Transformons:

$$\frac{q_1^{p+1}-q_2^{p+1}}{q_1-q_2}=\frac{\prod\limits_{m=0}^{m=p}\left[q_1-q_2\left(\cos\frac{2m\pi}{p+1}+j\sin\frac{2m\pi}{p+1}\right)\right]}{q_1-q_2}$$

$$=\prod_{m=1}^{m=p}\left[q_1-q_2\left(\cos\frac{2m\pi}{p+1}+j\sin\frac{2m\pi}{p+1}\right)\right].$$

Conformément à la notation de (17), on parvient par une série de transformations à l'égalité

$$\frac{q_1^{p+1}-q_2^{p+1}}{q_1-q_2}=\prod_{m=1}^{m=p}\left(\cos\frac{m\pi}{p+1}+j\sin\frac{m\pi}{p+1}\right)\left[\sqrt{a^2-4}\cos\frac{m\pi}{p+1}-ja\sin\frac{m\pi}{p+1}\right].$$

Le membre gauche, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{q_1^{p+1}-q_2^{p+1}}{q_1-q_2},$$

est un polynôme du degré p de la variable a, le coefficient de a^p étant égal à l'unité, tandis que le membre droit possède p racines réelles différentes de la forme

$$2\cos\frac{m\pi}{p+1}\qquad \text{où } m=1,2,\ldots,p.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{q_1^{p+1}-q_2^{p+1}}{q_1-q_2}=\prod_{m=1}^{m=p}\left(a-2\cos\frac{m\pi}{p+1}\right),$$

donc

$$(24)\qquad V_n=V_{k+l+ps}=V_{k+l}\prod_{m=1}^{m=p}\left(a-2\cos\frac{m\pi}{p+1}\right)\qquad \text{pour } p=1,2,\ldots$$

Comme $a=a(s)$ est un polynôme du degré s de la variable λ, tandis que V_{k+l} est un polynôme du degré $k+l$, la forme de (24) montre que la recherche des racines du polynôme du degré $k+l+ps$ revient à trouver celles de p polynômes du degré s et d'un polynôme du degré $k+l$. En particulier, pour $s\leqslant 4$ et $k+l\leqslant 4$, ce problème ne comporte pas de difficultés.

5. Exemples d'application. Appliquons les formules établies à la recherche des valeurs propres des matrices F_{2n} et G_{4n} envisagées dans l'Introduction. Puisque, comme on peut le vérifier, la condition (23) est satisfaite dans les deux cas, nous pouvons faire l'usage de la formule (24).

(a) Pour trouver les valeurs propres de la matrice F_{2n}, il faut résoudre l'équation $P_{2n}(\lambda) = 0$. Comme $P_{2n}(\lambda) = V_{k+l+ps}$, où $k = 1, l = 1, s = 2$ et $p = n-1$, on a

$$P_{2n}(\lambda) = V_{2+2(n-1)} = V_2 \prod_{m=1}^{n-1}\left[a(2) - 2\cos\frac{m\pi}{n}\right].$$

Calculons:

$$V_2 = \begin{vmatrix} -\dfrac{\lambda+A}{A} & 1 \\ 1 & -\dfrac{\lambda+B}{B} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2+(A+B)\lambda}{AB},$$

$$a(2) = \frac{\lambda^2+2(A+B)\lambda+2AB}{AB},$$

$$a(2)-2\cos\frac{m\pi}{n} = \frac{\lambda^2+2(A+B)\lambda+4AB\sin^2\dfrac{m\pi}{2n}}{AB}.$$

Toutes les valeurs propres de la matrice F_{2n} résulteront donc en résolvant les équations carrées

$$\lambda^2+(A+B)\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda^2+2(A+B)\lambda+4AB\sin^2\frac{m\pi}{2n} = 0$$

où $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

(b) Pour trouver les valeurs propres de la matrice G_{4n}, il s'agit de résoudre l'équation $Q_{4n}(\lambda) = 0$.

Comme $Q_{4n}(\lambda) = V_{k+l+ps}$, où $k = 2,\ l = 2,\ s = 4$ et $p = n-1$, on a

$$Q_{4n}(\lambda) = V_{4+4(n-1)} = V_4 \prod_{m=1}^{n-1}\left[a(4) - 2\cos\frac{m\pi}{n}\right],$$

$$V_4 = \frac{\lambda^2+(A+B)\lambda-2(A^2+B^2-AB)}{A^2B^2}\lambda^2,$$

$$a(4) = \frac{\lambda^4-4(A^2+B^2)\lambda^2+2A^2B^2}{A^2B^2}.$$

Toutes les valeurs propres de la matrice G_{4n} se trouveront donc déterminées en résolvant les équations

$$\lambda^2[\lambda^2+(A+B)\lambda-2(A^2+B^2-AB)] = 0$$

et

$$\lambda^4 - 4(A^2+B^2)\lambda^2 + 4A^2B^2\sin^2\frac{m\pi}{2n} = 0 \qquad \text{où } m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Travaux cités

[1] J. Wolf, *Przeponowe wymienniki równoległoprądowe o wielokrotnej wymianie ciepła*, Archiwum Budowy Maszyn 9 (1962), p. 55-76.

[2] T. Zaleski et J. Jarząbek, *Obliczanie wymiennika płytowego o kanałach łączonych szeregowo*, Inżynieria Chemiczna 3 (1973), p. 405-420.

[3] T. Zaleski et W. Krajewski, *Obliczanie wymiennika śrubowego*, ibidem 3 (1973), p. 389-404.

Reçu le 15. 4. 1972

T. ZALESKI (Gliwice)

O REDUKCJI WYZNACZNIKÓW PEWNEGO TYPU MACIERZY JACOBIEGO Z ZASTOSOWANIEM DO ZNAJDOWANIA WARTOŚCI WŁASNYCH

STRESZCZENIE

W pracy wyprowadzono wzory rekurencyjne dla wyznaczników Jacobiego o specjalnej budowie. Rozwiązując równania rekurencyjne otrzymano odpowiednie wzory redukcyjne, które w pewnych przypadkach stają się szczególnie proste. Własność tę można wykorzystać dla obniżenia stopnia wielomianu przy poszukiwaniu wartości własnych macierzy.

Podano dwa przykłady zastosowań do wyznaczenia rozkładu temperatur w wymiennikach ciepła.
