ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LIV.1 (1991)

Problèmes aux limites pour des inclusions différentielles sans condition de croissance

par MARLÈNE FRIGON* (Montréal)

Abstract. Applying the topological transversality method of Granas and the *a priori* bounds technique, we prove some existence theorems for differential inclusions of the form $x'' \in F(t, x, x')$, $x \in \mathscr{B}$, where F is a Carathéodory multifunction with convex, compact values. No growth condition will be imposed on F.

Nous sommes concernés ici par des théorèmes d'existence de solutions du problème suivant:

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t), x'(t)) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x \in \mathscr{B}, \end{cases}$$

où $F\colon [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to 2^{\mathbf{R}}$ est une fonction multivoque de L^1-Carathéodory à valeurs convexes, compactes, et $\mathscr{B}$ désignera une condition aux limites de la forme suivante:

$$\begin{cases} a_0 x(0) - b_0 x'(0) = \alpha_0; \\ a_1 x(1) + b_1 x'(1) = \alpha_1; \quad a_i, b_i \geqslant 0,\ a_i + b_i > 0,\ \alpha_i \in \mathbf{R};\ i = 0, 1. \end{cases}$$

Ce problème a été traité par plusieurs auteurs dont [4], [5], [7], [11] dans le cas où la fonction multivoque F satisfait une condition de croissance de type Bernstein–Nagumo. Dans cet article, nous donnons des théorèmes d'existence de solutions du problème (P) où aucune condition de croissance n'est imposée à F. Ces théorèmes reposent sur l'existence de surfaces convenables sur lesquelles la fonction F a un signe approprié (intersecte $(-\infty, 0]$ ou $[0, \infty)$).

Ces résultats sont basés sur un texte de l'auteur [6] qui traitait le cas où le membre de droite est une fonction univoque de Carathéodory.

Notre résultat principal, donné à la section 2, donne l'existence d'une solution de notre problème sous les hypothèses d'existence de sur et sous solutions et de surfaces supérieure et inférieure de (P). Aux sections suivantes, nous ne faisons pas l'hypothèse d'existence de sur et/ou sous solutions, toutefois, les surfaces devront satisfaire des hypothèses additionnelles.

1980 *Mathematics Subject Classification:* Primary 34B15.
* Ce travail a été supporté par un fond du CRSNG-Canada.

0. Préliminaires. Soient $a \in \mathbf{R}$ et $B \subset \mathbf{R}$. Nous définirons $B \vee a$ (resp. $B \wedge a$) par $B \cap [a, \infty)$ (resp. $B \cap (-\infty, a]$) si cet ensemble est non vide et par a sinon. L'enveloppe convexe fermée de B sera notée par $\overline{\text{co}}\,(B)$.

Nous noterons par $C^k[0, 1]$ l'espace des fonctions continûment différentiables jusqu'à l'ordre k, $k = 0, 1, \ldots$; et par $L^1(0, 1)$ l'espace des fonctions Lebesgue mesurables sur $(0, 1)$. Ces espaces seront munis de leur norme usuelle, respectivement: $\|x\|_k = \max\{\|x^{(i)}\|_0: i = 0, \ldots, k\}$ où $x^{(i)}$ est la i-ième dérivée de x ($x^{(0)}$ signifie x) et $\|x\|_0 = \max\{|x(t)|: t \in [0, 1]\}$; $\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|\,dt$. Nous poserons $C_0^k[0, 1] = \{x \in C^k[0, 1]: x(0) = 0\}$, $C[0, 1] = C^0[0, 1]$, et $C_0[0, 1] = C_0^0[0, 1]$. Pour $k \in \mathbf{N}$, nous dénoterons par $C_b^k[0, 1]$ l'ensemble des fonctions x dans $C^k[0, 1]$ telles que $x \in \mathscr{B}$ où $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites introduite précédemment.

L'espace de Sobolev de toutes les fonctions x dans $C^1[0, 1]$ dont la dérivée x' est absolument continue sera noté $W^{2,1}(0, 1)$ et muni de la norme: $\|x\|_{2,1} = \|x\|_{L^1} + \|x'\|_{L^1} + \|x''\|_{L^1}$. Une *solution* de notre problème sera une fonction x dans $W^{2,1}(0, 1)$ vérifiant (P).

DÉFINITION 0.1. Une fonction $x \in W^{2,1}(0, 1)$ est une *sur solution* (resp. *sous solution*) de (P) si $F(t, x(t), x'(t)) \cap [x''(t), \infty) \neq \emptyset$ p.p. $t \in [0, 1]$; $a_0 x(0) - b_0 x'(0) \geqslant \alpha_0$, $a_1 x(1) + b_1 x'(1) \geqslant \alpha_1$ (resp. $F(t, x(t), x'(t)) \cap (-\infty, x''(t)] \neq \emptyset$ p.p. $t \in [0, 1]$; $a_0 x(0) - b_0 x'(0) \leqslant \alpha_0$, $a_1 x(1) + b_1 x'(1) \leqslant \alpha_1$).

Considérons maintenant l'opérateur linéaire

$$\Lambda: C_b^2[0, 1] \to C[0, 1] \quad \text{donné par} \quad \Lambda(x) = x'' \tag{0.1}$$

Si Λ est inversible, on définit l'opérateur linéaire inversible (voir [8])

$$L: C_b^1[0, 1] \to C_0[0, 1] \quad \text{par} \quad L(x)(t) = x'(t) - x'(0). \tag{0.2}$$

Si Λ n'est pas inversible, on définit l'opérateur linéaire inversible

$$\tilde{L}: C_b^1[0, 1] \to C_0[0, 1] \quad \text{par} \quad \tilde{L}(x)(t) = x'(t) - x'(0) - \int_0^t x(s)\,ds. \tag{0.3}$$

Dans la suite, une *application multivoque* signifiera une application multivoque à valeurs convexes fermées et une *fonction multivoque* signifiera une application multivoque à valeurs convexes, fermées, non-vides.

Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, X un sous-ensemble fermé de E_1 et T un espace mesurable. Soient $F: X \to E_2$ et $G: T \to E_2$ deux applications multivoques. Nous dirons que F est *semi-continue supérieurement* (*s.c.s*) si l'ensemble $\{x \in X: F(x) \cap B \neq \emptyset\}$ est fermé pour tout B fermé dans E_2. L'application F est *faiblement semi-continue supérieurement* (*f.s.c.s.*) si pour toutes suites $\{x_n\} \subset X$ et $\{y_n\} \subset E_2$ telles que $x_n \to x$, $y_n \rightharpoonup y$, $y_n \in F(x_n)$, alors $y \in F(x)$. L'application F est *compacte* (resp. *complètement continue*) si $\overline{F(X)}$ (resp. $\overline{F(A)}$ pour tout ensemble A borné dans X) est compact. Nous dirons que G est *mesurable* si l'ensemble $\{t \in T: G(t) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout B fermé dans E_2.

Soit $F\colon X \to L^1(0, 1)$ une fonction multivoque. Nous dirons que F est *intégrablement bornée sur les bornés* si pour tout ensemble A borné dans X, il existe une fonction $h_A \in L^1(0, 1)$ telle que pour tout $x \in A$ et $w \in F(x)$, $|w(t)| \leqslant h_A(t)$ p.p. $t \in (0, 1)$. Nous définissons un opérateur multivoque associé à F,

$$(0.4) \qquad \mathcal{N}_F\colon X \to C_0[0, 1] \quad \text{par}$$

$$\mathcal{N}_F(x) = \{v \in C[0, 1]\colon v(t) = \int_0^t w(s)\,ds \text{ où } w \in F(x)\}.$$

Lemme 0.2 (voir [11]). *Soit $F\colon X \to L^1(0, 1)$ une fonction multivoque faiblement semi-continue supérieurement et intégrablement bornée sur les bornés. Alors l'opérateur associé à F, $\mathcal{N}_F\colon X \to C_0[0, 1]$ est s.c.s. et complètement continu.*

Définition 0.3. Une application multivoque $F\colon [0, 1] \times X \to \mathbf{R}$ est appelée de *L^1-Carathéodory* si elle vérifie:

(i) $t \mapsto F(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in X$;
(ii) $x \mapsto F(t, x)$ est semi-continue supérieurement p.p. $t \in [0, 1]$;
(iii) pour tout $k > 0$, il existe une fonction $h_k \in L^1(0, 1)$ telle que pour tout $x \in X$ avec $\|x\| \leqslant k$ et pour tout $w \in F(t, x)$, $|w| \leqslant h_k(t)$ p.p. $t \in (0, 1)$.

Soit une fonction multivoque $F\colon [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. On associe à F une application multivoque $\mathcal{F}\colon C^1[0, 1] \to L^1(0, 1)$ définie par:

$$(0.5) \qquad \mathcal{F}(x) = \{w \in L^1(0, 1)\colon w(t) \in F(t, x(t), x'(t)) \text{ p.p. } t \in (0, 1)\}.$$

Lemme 0.4 (voir [10]). *Soit $F\colon [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de L^1-Carathéodory. Alors l'application $\mathcal{F}$ définie en (0.5) est une fonction multivoque faiblement semi-continue supérieurement et intégrablement bornée sur les bornés.*

Un domaine $D \subset [0, 1] \times \mathbf{R}$ sera appelé *domaine admissible* de $[0, 1] \times \mathbf{R}$ s'il existe deux fonctions ψ et $\phi\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ telles que $\psi(t) \geqslant \phi(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $D = D(\phi, \psi) = \{(t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}\colon \phi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t)\}$. Nous définirons une projection de $[0, 1] \times \mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ relativement à D par $\pi(t, x) = y$ si $\min\{|x - z|\colon (t, z) \in D\}$ est atteint à y. Nous écrirons $\psi \geqslant \phi$ pour signifier $\psi(t) \geqslant \phi(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Le support de la fonction $\psi - \phi$ sera noté $\operatorname{supp}(\psi - \phi)$.

Nous introduisons maintenant les notions de surfaces supérieure et inférieure pour (P). Dans la suite, D sera un domaine admissible de $[0, 1] \times \mathbf{R}$.

Définition 0.5. Une surface $S \subset D \times \mathbf{R}$ est une *surface supérieure à D pour* (P) s'il existe deux fonctions $s\colon D \to [0, \infty)$ et $c \in C^1[0, 1]$ telles que:

(i) $S = \{(t, x, s(t, x))\colon (t, x) \in D\}$;
(ii) $(t, c(t)) \in D$ pour tout $t \in [0, 1]$;
(iii) il existe $\hat{N} \subset [0, 1]$ et $N \subset \mathbf{R}$ deux ensembles négligeables tels que la fonction $x \mapsto s(t, x)$ est continue pour tout $(t, x) \in D \backslash (\hat{N} \times N)$;

(iv) $c'(t) \leqslant s(t, c(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$;

(v) $s(t_1, x_1) \geqslant s(t_2, x_2)$ (resp. $s(t_1, x_1) \leqslant s(t_2, x_2)$) pour tout $t_1 \leqslant t_2$, $x_1 \leqslant x_2$ tels que (t_1, x_1) et (t_2, x_2) sont dans la même partie connexe de $D^+ = \overline{\{(t, x) \in D\colon x > c(t)\}}$ (resp. $D^- = \overline{\{(t, x) \in D\colon x < c(t)\}}$);

(vi) $(x - c(t))F(t, x, p) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$ p.p. $t \in [0, 1]$ et $(t, x, p) \in S$;

(vii) $a_0 c(0) \leqslant (\alpha_0 + b_0 s(0, \phi(0)))$ ou $c(0) = \phi(0)$, $a_1 c(1) \geqslant (\alpha_1 - b_1 s(1, \psi(1)))$ ou $c(1) = \psi(1)$.

DÉFINITION 0.6. Une surface $S \subset D \times \mathbf{R}$ est une *surface inférieure à D pour* (P) s'il existe deux fonctions $s\colon D \to (-\infty, 0]$ et $c \in C^1[0, 1]$ satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii), (vi) de la définition 0.5 et:

(iv) $c'(t) \geqslant s(t, c(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$;

(v) $s(t_1, x_1) \leqslant s(t_2, x_2)$ (resp. $s(t_1, x_1) \geqslant s(t_2, x_2)$) pour tout $t_1 \geqslant t_2$, $x_1 \leqslant x_2$ tels que (t_1, x_1) et (t_2, x_2) sont dans la même partie connexe de $D^+ = \overline{\{(t, x) \in D\colon x > c(t)\}}$ (resp. $D^- = \overline{\{(t, x) \in D\colon x < c(t)\}}$);

(vii) $a_0 c(0) \geqslant (\alpha_0 + b_0 s(0, \psi(0)))$ ou $c(0) = \psi(0)$, $a_1 c(1) \leqslant (\alpha_1 - b_1 s(1, \phi(1)))$ ou $c(1) = \phi(1)$.

Remarques 0.7. Si F est une fonction multivoque de L^1-Carathéodory et S est une surface supérieure (resp. inférieure) à D pour (P),

(1) on peut trouver $\tilde{S}$ une surface supérieure (resp. inférieure) à D pour (P) bornée.

Nous supposerons donc sans perte de généralité que S est une surface bornée.

(2) Sans perte de généralité, nous supposerons que

$$s(t, c(t)) = \limsup_{\substack{y \to c(t) \\ (t,y) \in D}} s(t, y) \qquad \left(\text{resp. } s(t, c(t)) = \liminf_{\substack{y \to c(t) \\ (t,y) \in D}} s(t, y)\right).$$

Dans un but de référence, nous énonçons les trois résultats suivants:

LEMME 0.8 (voir [1]). *Soient $x\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction absolument continue et $\mathcal{O} \subset [0, 1]$ un ensemble mesurable tel que $x(\mathcal{O})$ est négligeable. Alors $x'(t) = 0$ p.p. $t \in \mathcal{O}$.*

LEMME 0.9 (principe du maximum). *Soit $x \in W^{2,1}(0, 1)$. Supposons qu'une des deux conditions suivantes est satisfaite:*

(i) $x''(t) \geqslant 0$ *p.p.* $t \in (0, 1)$; $a_0 x(0) - b_0 x'(0) \leqslant 0$, $a_1 x(1) + b_1 x'(1) \leqslant 0$; $a_i, b_i \geqslant 0$, $a_i + b_i > 0$, $i = 0, 1$; $a_0 + a_1 > 0$;

(ii) $x''(t) - x(t) \geqslant 0$ *p.p.* $t \in (0, 1)$; $a_0 x(0) - b_0 x'(0) \leqslant 0$, $a_1 x(1) + b_1 x'(1) \leqslant 0$; $a_i, b_i \geqslant 0$, $a_i + b_i > 0$, $i = 0, 1$.

Alors $x(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Nous énonçons un corollaire du théorème de transversalité topologique de A. Granas [3] que nous utiliserons pour déduire l'existence d'une solution.

Soient E un espace de Banach et U un ouvert dans E. Notons ∂U la frontière de U.

THÉORÈME 0.10. *Soient $u_0 \in U$ et H: $[0, 1] \times \bar{U} \to E$ une fonction multivoque semi-continue supérieurement, compacte et à valeurs compactes, convexes, non vides telle que $u \notin H(\lambda, u)$ pour tout $(\lambda, u) \in [0, 1] \times \partial U$; et $H(0, \bar{U}) \equiv \{u_0\}$. Alors $H(1, \cdot)$ a un point fixe.*

1. Théorèmes généraux d'existence. Nous donnons deux théorèmes généraux d'existence de solution d'un problème aux limites, lesquels réduisent l'existence d'une solution à l'existence d'une famille opportune de problèmes et à la majoration a priori de leurs solutions.

Soit A l'opérateur linéaire de $C^2_{\mathscr{B}}[0, 1]$ dans $C[0, 1]$ introduit en (0.1). Si cet opérateur est inversible, nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1. *Supposons que A est inversible et soit une fonction multivoque de L^1-Carathéodory F: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbf{R}$. Supposons que $F(\cdot, \cdot, \cdot, 0) \equiv \{0\}$ et qu'il existe une constante k telle que $\|x\|_1 < k$ pour tout $x \in W^{2,1}(0, 1)$ solution de $(1.1)_\lambda$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$, où*

$$(1.1)_\lambda \quad \begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t), x'(t), \lambda) & p.p. \ t \in [0, 1], \\ x \in \mathscr{B}. \end{cases}$$

Alors le problème $(1.1)_1$ possède au moins une solution.

Preuve. Posons $F_\lambda(t, x, p) = F(t, x, p, \lambda)$. Transformons notre famille de problèmes en problèmes de point fixe. Considérons l'opérateur multivoque H: $[0, 1] \times \bar{B} \to C^1[0, 1]$ défini par $H(\lambda, x) = L^{-1} \circ \mathscr{N}_{\mathscr{F}_\lambda}(x)$ où $\bar{B} = \{x \in C^1[0, 1]: \|x\|_1 \leqslant k\}$, et L, $\mathscr{N}_{\mathscr{F}_\lambda}$ et $\mathscr{F}_\lambda$ sont définis en (0.2), (0.4) et (0.5) respectivement. Vu les lemmes 0.2 et 0.4, on vérifie que H est compact et semi-continu supérieurement. De plus, $H(0, \cdot) \equiv \{x_0\}$ où $x_0 \in W^{2,1}(0, 1)$, $x \in \mathscr{B}$ et $x_0''(t) = 0$ p.p. $t \in (0, 1)$. D'autre part, les points fixes de $H(\lambda, \cdot)$ sont des solutions de $(1.1)_\lambda$; d'où $H(\lambda, \cdot)$ est sans point fixe sur ∂B. On applique le théorème 0.10 et on déduit l'existence d'un point fixe pour $H(1, \cdot)$ et par conséquent l'existence d'une solution du problème $(1.1)_1$. ∎

Dans le cas où l'opérateur A n'est pas inversible, on prouve analoguement le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2. *Supposons que A n'est pas inversible et soit une fonction multivoque de L^1-Carathéodory F: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbf{R}$. Supposons que $F(\cdot, \cdot, \cdot, 0) \equiv \{0\}$ et qu'il existe une constante k telle que $\|x\|_1 < k$ pour tout $x \in W^{2,1}(0, 1)$ solution de $(1.2)_\lambda$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$, où*

$$(1.2)_\lambda \quad \begin{cases} x''(t) - x(t) \in F(t, x(t), x'(t), \lambda) & p.p. \ t \in [0, 1], \\ x \in \mathscr{B}. \end{cases}$$

Alors le problème $(1.2)_1$ a au moins une solution.

2. Avec hypothèse d'existence de sur et sous solutions

2.1. *Résultat principal.* Rappelons que nous sommes concernés par le problème suivant:

$$\text{(P)}\quad \begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t), x'(t)) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x \in \mathscr{B}, \end{cases}$$

où $\mathscr{B}$ désigne une condition aux limites de la forme suivante:

$$\begin{cases} a_0 x(0) - b_0 x'(0) = \alpha_0; \\ a_1 x(1) + b_1 x'(1) = \alpha_1; \quad a_i, b_i \geqslant 0,\ a_i + b_i > 0,\ \alpha_i \in \mathbf{R};\ i = 0, 1. \end{cases}$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal. La preuve sera donnée au paragraphe 2.4.

THÉORÈME 2.1. *Soit* F: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory satisfaisant les hypothèses suivantes*:

(H2.1) *il existe* ψ *et* ϕ *dans* $W^{2,1}(0, 1)$ *respectivement sur et sous solutions de* (P) *telles que* $\psi \geqslant \phi$;

(H2.2) *il existe* S_0 *et* S_1 *respectivement surfaces supérieure et inférieure à* $D = D(\phi, \psi)$ *pour* (P).

Alors le problème (P) *possède une solution* $x \in W^{2,1}(0, 1)$ *telle que* $\phi \leqslant x \leqslant \psi$.

COROLLAIRE 2.2. *Supposons que* F: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory et que les hypothèses suivantes sont satisfaites*:

(i) *il existe* M_0 *et* M_1 *des constantes telles que* $M_0 \geqslant \alpha_i \geqslant M_1$, $i = 0, 1$; $F(t, M_0, 0) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$ *et* $F(t, M_1, 0) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset$ *p.p.* $t \in [0, 1]$;

(ii) *il existe des constantes* $s_0 \geqslant 0 \geqslant s_1$ *et* c_0, c_1: $[0, 1] \to [M_1, M_0]$ *des fonctions de classe* C^1 *telles que* $(x - c_i(t))F(t, x, s_i) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$, *pour* $x \in [M_1, M_0]$ *et p.p.* $t \in [0, 1]$, $i = 0, 1$; $c_0'(t) \leqslant s_0$, $c_1'(t) \geqslant s_1$, $t \in [0, 1]$; $c_0(0) \leqslant \alpha_0$, $c_0(1) \geqslant \alpha_1$, $c_1(0) \geqslant \alpha_0$, $c_1(1) \leqslant \alpha_1$.

Alors le problème $x''(t) \in F(t, x(t), x'(t))$ *p.p.* $t \in [0, 1]$; $x(0) = \alpha_0$, $x(1) = \alpha_1$, *a une solution.*

COROLLAIRE 2.3. *Supposons que* F: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory et que les hypothèses suivantes sont satisfaites*:

(i) *il existe* $M_0 \geqslant M_1$ *des constantes telles que*

$$F(t, M_0, 0) \cap [0, \infty) \neq \emptyset,$$
$$F(t, M_1, 0) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset \quad \text{p.p. } t \in [0, 1];$$

(ii) *il existe des constantes* $s_0 \geqslant 0 \geqslant s_1$ *telles que pour chaque* $i \in \{0, 1\}$, *on a* $F(t, x, s_i) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$ *ou* $F(t, x, s_i) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset$ *pour tout* $x \in [M_1, M_0]$ *et p.p.* $t \in [0, 1]$.

Alors le problème $x''(t) \in F(t, x(t), x'(t))$ *p.p.* $t \in [0, 1]$; $x'(0) = 0$, $x'(1) = 0$, *a une solution.*

L'existence d'une solution de notre problème découlera de l'existence de solutions de familles de problèmes que nous allons considérer. Définissons d'abord des familles de fonctions.

2.2. *Familles de fonctions multivoques.* Soient s_l: $D \to \mathbf{R}$ et $c_l \in C^1[0, 1]$ les fonctions associées à la surface S_l, $l = 0, 1$ (voir les définitions 0.5 et 0.6).

Pour chaque $t \in [0, 1]$, considérons les ensembles de $\mathbf{R}^2$ suivants:

$$R_1(t) = \{(x, p) \in \mathbf{R}^2\colon \psi(t) \geqslant x \geqslant \phi(t),\ s_0(t, x) \geqslant p \geqslant s_1(t, x)\};$$

$$R_2(t) = \{(x, p) \in \mathbf{R}^2\colon (\psi(t) > x > c_0(t) \text{ et } p > s_0(t, x)) \text{ ou } (\psi(t) > x > c_1(t) \text{ et } p < s_1(t, x))\};$$

$$R_3(t) = \{(x, p) \in \mathbf{R}^2\colon (\phi(t) < x < c_0(t) \text{ et } p > s_0(t, x)) \text{ ou } (\phi(t) < x < c_1(t) \text{ et } p < s_1(t, x))\};$$

$$R_4(t) = \{(x, p) \in \mathbf{R}^2\colon x > \psi(t)\};$$

$$R_5(t) = \{(x, p) \in \mathbf{R}^2\colon x < \phi(t)\}.$$

Définissons pour $i = 1, \ldots, 5$, F_i: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ les applications multivoques suivantes:

$$F_1(t, x, p, \lambda) = \begin{cases} \lambda F(t, x, p) & \text{si } (x, p) \in \overline{R_1(t)}, \\ \emptyset & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$F_2(t, x, p, \lambda) = \begin{cases} \lambda F(t, x, p) \vee 0 & \text{si } (x, p) \in \overline{R_2(t)}, \\ \emptyset & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$F_3(t, x, p, \lambda) = \begin{cases} \lambda F(t, x, p) \wedge 0 & \text{si } (x, p) \in \overline{R_3(t)}, \\ \emptyset & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$F_4(t, x, p, \lambda) = \begin{cases} \lambda F(t, x, p) \vee \psi''(t) & \text{si } (x, p) \in \overline{R_4(t)}, \\ \emptyset & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$F_5(t, x, p, \lambda) = \begin{cases} \lambda F(t, x, p) \wedge \phi''(t) & \text{si } (x, p) \in \overline{R_5(t)}, \\ \emptyset & \text{sinon}. \end{cases}$$

Chacune de ces applications multivoques est de L^1-Carathéodory, vu les définitions 0.5 et 0.6 et la remarque 0.7.

Nous pouvons maintenant définir les fonctions multivoques que nous allons considérer. Soient F et G: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ données par

$$F(t, x, p, \lambda) = \overline{\text{co}}\Big(\bigcup_{i=1}^{5} F_i(t, x, p, \lambda)\Big),$$

$$G(t, x, p, \lambda) = \begin{cases} F(t, x, p, \lambda) - \psi(t) & \text{si } x > \psi(t), \\ F(t, x, p, \lambda) - x & \text{si } \psi(t) \geqslant x \geqslant \phi(t), \\ F(t, x, p, \lambda) - \phi(t) & \text{si } x < \phi(t). \end{cases}$$

Proposition 2.4. *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *l'application* F *est une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory.*

Preuve. Puisque $\bigcup_{i=1}^{5} \overline{R_i(t)} = \mathbf{R}^2$, l'application F est à valeurs convexes, fermées, non vides. D'autre part, vu les propriétés des applications mesurables (voir [9]), la mesurabilité des applications multivoques $t \mapsto F_i(t, x, p, \lambda)$ pour $i = 1, \dots, 5$, nous permet de déduire la mesurabilité de la fonction $t \mapsto F(t, x, p, \lambda)$.

De même, en utilisant les propriétés des applications multivoques semi-continues supérieurement (voir [2]) et le fait que les applications $(x, p, \lambda) \mapsto F_i(t, x, p, \lambda)$ sont s.c.s., nous déduisons la semi-continuité supérieure de la fonction $t \mapsto F(t, x, p, \lambda)$.

Enfin il est clair que la condition (iii) de la définition 0.3 est satisfaite. ∎

Corollaire 2.5. *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *l'application* G *est une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory.*

2.3. *Majoration a priori des solutions.* Considérons maintenant les familles de problèmes suivants:

$$(\mathrm{P})_\lambda \quad \begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t), x'(t), \lambda) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x \in \mathscr{B} \end{cases}$$

et

$$(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda \quad \begin{cases} x''(t) - x(t) \in G(t, x(t), x'(t), \lambda) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x \in \mathscr{B} \end{cases}$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Remarque 2.6. Si x est une solution du problème $(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda$ telle que $\phi \leqslant x \leqslant \psi$, alors x est une solution du problème $(\mathrm{P})_\lambda$.

Nous allons maintenant majorer a priori les solutions de $(\mathrm{P})_\lambda$ (resp. $(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda$) pour $\lambda \in [0, 1]$ lorsque Λ est inversible (resp. non inversible).

Lemme 2.7. *Supposons que les hypothèses du théorème* 2.1 *sont satisfaites. Alors, si l'opérateur linéaire* Λ *est inversible* (*resp. non inversible*), *les solutions* x *des problèmes* $(\mathrm{P})_\lambda$ (*resp.* $(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda$) *pour* $\lambda \in [0, 1]$ *sont telles que* $\phi \leqslant x \leqslant \psi$.

Preuve. Supposons que Λ est inversible et soit $x \in W^{2,1}(0, 1)$ une solution de $(\mathrm{P})_\lambda$. Montrons que $x \leqslant \psi$; l'autre inégalité se démontrant analoguement. Presque partout sur $\{t \in [0, 1]\colon x(t) > \psi(t)\}$, on a $x''(t) \geqslant \psi''(t)$ car pour tout t dans cet ensemble on a $(x(t), x'(t)) \notin \overline{R_i(t)}$ pour $i = 1, 2, 3, 5$. En utilisant le lemme 0.9(i) et les conditions aux limites sur x et ψ, on obtient $x(t) \leqslant \psi(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Si Λ n'est pas inversible, en utilisant le lemme 0.9(ii) et en procédant comme précédemment, on obtient la conclusion. ∎

LEMME 2.8. *Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées. Alors toutes les solutions x des problèmes $(\mathrm{P})_\lambda$ pour $\lambda \in [0, 1]$ satisfaisant $\phi \leqslant x \leqslant \psi$ sont telles que $s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$ p.p. $t \in \operatorname{supp}(\psi - \phi)$.*

Preuve. Soit x une solution de $(\mathrm{P})_\lambda$ telle que $\psi \geqslant x \geqslant \phi$. Montrons que $x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$ pour tout $t \in \operatorname{supp}(\psi - \phi)$; l'autre inégalité se démontrant analoguement.

Supposons qu'il existe $t_0 \in \operatorname{supp}(\psi - \phi)$ tel que $x'(t_0) > s_0(t_0, x(t_0))$. Alors vu la définition 0.5, un des deux énoncés suivants est vérifié:

(a) $(x(t_0), x'(t_0)) \in \overline{R_2(t_0)}$ et il existe $\delta > 0$ tel que $(x(t), x'(t)) \in \overline{R_2(t)}$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \delta]$;

(b) $(x(t_0), x'(t_0)) \in \overline{R_3(t_0)}$ et il existe $\delta > 0$ tel que $(x(t), x'(t)) \in \overline{R_3(t)}$ pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0]$;

Sinon, $x(t_0) = c_0(t_0)$ et $x'(t_0) \leqslant c_0'(t_0)$. Or $c_0'(t_0) \leqslant s_0(t_0, c_0(t_0))$. Contradiction.

Si (a) a lieu, vu la définition 0.5, il existe $t_1 > t_0$ tel que p.p. $t \in [t_0, t_1)$, $(x(t), x'(t)) \notin \overline{R_i(t)}$ pour $i = 1, 3, 4, 5$, et $x'(t_1) \leqslant s_0(t_1, x(t_1))$. Or $s_0(t_1, x(t_1)) \leqslant s_0(t_0, x(t_0))$. D'où

$$0 > x'(t_1) - x'(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x''(t)\, dt.$$

D'autre part, $F(t, x, p, \lambda) \subset [0, \infty)$ si $(x, p) \notin \overline{R_i(t)}$ pour $i = 1, 3, 4, 5$. Puisque $x''(t) \in F(t, x(t), x'(t), \lambda)$ p.p., on aboutit à une contradiction.

De même, si (b) a lieu, on aboutit à une contradiction. ∎

2.4. *Preuve du résultat principal.* Nous déduirons l'existence d'une solution du problème (P) à partir de solutions des problèmes $(\mathrm{P})_1$ ou $(\tilde{\mathrm{P}})_1$.

Preuve du théorème 2.1. Nous allons montrer que $(\mathrm{P})_1$ possède une solution, ensuite nous montrerons qu'elle est une solution du problème original (P).

1$^{\text{er}}$ cas: A est inversible. Introduisons une nouvelle famille de problèmes:

$$(\mathrm{P})_{0,\theta} \quad \begin{cases} x''(t) \in \theta F(t, x(t), x'(t), 0) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x \in \mathscr{B}, \end{cases}$$

où $\theta \in [0, 1]$.

On vérifie aisément que les solutions de $(\mathrm{P})_{0,\theta}$ pour $\theta \in [0, 1]$ peuvent être majorées a priori. D'où, vu les lemmes 2.7 et 2.8, il existe une constante $k > 0$ telle que toutes les solutions de $(\mathrm{P})_\lambda$ ou $(\mathrm{P})_{0,\theta}$ pour λ et $\theta \in [0, 1]$ satisfont $\|x\|_1 < k$.

Considérons la fonction multivoque $\tilde{F}$: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$\tilde{F}(t, x, p, \gamma) = \begin{cases} F(t, x, p, 2\gamma - 1) & \text{si } \gamma \in [1/2, 1], \\ (2\gamma) F(t, x, p, 0) & \text{si } \gamma \in [0, 1/2). \end{cases}$$

Vu la proposition 2.4 et la majoration a priori des solutions déjà obtenue, cette fonction multivoque satisfait les hypothèses du théorème 1.1. D'où le problème $(\mathrm{P})_1$ possède une solution.

$2^{\text{ème}}$ cas: A n'est pas inversible. On procède comme dans le premier cas avec $(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda$ et $(\tilde{\mathrm{P}})_{0,\varrho}$. Pour obtenir l'existence d'une solution du problème $(\tilde{\mathrm{P}})_1$, on utilise le théorème 1.2.

Vu la remarque 2.6 et les lemmes 2.7 et 2.8, la solution obtenue est une solution du problème $(\mathrm{P})_1$ (que A soit inversible ou non) et satisfait

$$\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1], \tag{2.1}$$

$$s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in \operatorname{supp}(\psi - \phi). \tag{2.2}$$

Montrons que cette solution est une solution du problème original.

Supposons que $\{t \in [0, 1]: (x(t), x'(t)) \in \overline{R_2(t)}\} \neq \emptyset$. Soient N_0 et N_1 les ensembles négligeables donnés respectivement aux définitions 0.5(iii) et 0.6(iii), notons $N = N_0 \cup N_1$. Vu (2.2) et les définitions 0.5 et 0.6, on a que presque partout sur $\{t: x(t) \notin N\} \cap \{t \in [0, 1]: (x(t), x'(t)) \in \overline{R_2(t)}\}$, $x'(t) = s_i(t, x(t))$ et $c_i(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$, $i = 0$ ou 1. Or $(x - c_i(t))F(t, x, s_i(t, x)) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$. D'où

$$F_2(t, x(t), x'(t), 1) = F(t, x(t), x'(t)) \vee 0 \subset F(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p.} \tag{2.3}$$

D'autre part, par le lemme 0.8, $x'(t) = 0$ p.p. sur $\{t: x(t) \in N\}$. D'où, vu les définitions 0.5 et 0.6, on déduit que $(x - c_i(t))F(t, x(t), x'(t)) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$ p.p. sur $\{t: x(t) \in N\} \cap \{t \in [0, 1]: (x(t), x'(t)) \in \overline{R_2(t)}\}$. Par conséquent (2.3) a lieu.

Analoguement si $\{t \in [0, 1]: (x(t), x'(t)) \in \overline{R_3(t)}\} \neq \emptyset$, on montre que

$$F_3(t, x(t), x'(t), 1) \subset F(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p.} \tag{2.4}$$

Si $\{t \in [0, 1]: (x(t), x'(t)) \in \overline{R_4(t)}\} \neq \emptyset$, vu (2.1), sur cet ensemble on a que $x(t) = \psi(t)$ et $x'(t) = \psi'(t)$ p.p. Or, $F(t, \psi(t), \psi'(t)) \cap [\psi''(t), \infty) \neq \emptyset$ p.p., d'où

$$F_4(t, x(t), x'(t), 1) = F(t, x(t), x'(t)) \vee \psi''(t) \subset F(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p.} \tag{2.5}$$

De même, si $\{t \in [0, 1]: (x(t), x'(t)) \in \overline{R_5(t)}\} \neq \emptyset$, on montre que

$$F_5(t, x(t), x'(t), 1) \subset F(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p.} \tag{2.6}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} x''(t) &\in \boldsymbol{F}(t, x(t), x'(t), 1) \\ &= \overline{\mathrm{co}}\Big(\bigcup_{i=1}^{5} F_i(t, x(t), x'(t), 1)\Big) \subset \overline{\mathrm{co}}\big(F(t, x(t), x'(t))\big) = F(t, x(t), x'(t)), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

3. Sans hypothèse d'existence de sous et sur solutions. Dans cette section, nous allons considérer le problème (P) dans le cas particulier où $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites de Dirichlet:

$$(\mathrm{P_D}) \quad \begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t), x'(t)) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x(0) = \alpha_0, \quad x(1) = \alpha_1. \end{cases}$$

Nous ne ferons pas l'hypothèse d'existence de sur et sous solutions de $(\mathrm{P_D})$ mais les surfaces supérieure et inférieure devront satisfaire certaines conditions additionnelles. Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 3.1. *Soit* F: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory et supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite*:

(H3.1) *il existe* $\psi \geq \phi$ *dans* $C[0, 1]$, *et* S_0 *et* S_1 *respectivement surfaces supérieure et inférieure à* $D(\phi, \psi)$ *pour le problème* $(\mathrm{P_D})$ *telles que*:

(i) $\psi(0) \geq \alpha_0 \geq \phi(0), \quad \psi(1) \geq \alpha_1 \geq \phi(1)$;

(ii) *il existe* t_ψ *et* $t_\phi \in [0, 1]$ *tels que* ψ *et* ϕ *sont respectivement croissantes sur* $[0, t_\psi]$ *et* $[t_\phi, 1]$, *et décroissantes sur* $[t_\psi, 1]$ *et* $[0, t_\phi]$ *respectivement*;

(iii) $s_0(t, \psi(t)) \leq D^+\psi(t) = \limsup_{h \to 0^+} \dfrac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}, \qquad t \in [0, t_\psi)$;

$s_1(t, \psi(t)) \geq D_-\psi(t) = \liminf_{h \to 0^+} \dfrac{\psi(t)-\psi(t-h)}{h}, \qquad t \in (t_\psi, 1]$;

$s_0(t, \phi(t)) \leq D^+\phi(t),\ t \in (t_\phi, 1]$; $s_1(t, \phi(t)) \geq D_-\phi(t), t \in [0, t_\phi)$;

(iv) $\psi(t) > c_i(t) > \phi(t)$ *p.p.* $t \in [0, 1]$, $i = 0, 1$.

Alors le problème $(\mathrm{P_D})$ *possède une solution* x *telle que* $\phi(t) \leq x(t) \leq \psi(t)$ *et* $s_1(t, x(t)) \leq x'(t) \leq s_0(t, x(t))$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Lorsqu'il existe un domaine admissible $\tilde{D}$ suffisamment grand pour lequel il existe S_0 et S_1 respectivement surfaces supérieure et inférieure à $\tilde{D}$ pour $(\mathrm{P_D})$, on peut parfois trouver des fonctions $\psi \geq \phi$ telles que $D(\phi, \psi) \subset \tilde{D}$ et satisfaisant l'hypothèse (H3.1). Le prochain corollaire en est un cas particulier.

COROLLAIRE 3.2. *Soit* F *une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory. Supposons qu'il existe des constantes* $s_1 < 0 < s_0$ *telles que* $xF(t, x, s_i) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$ *si* $|x| \leq s_0 s_1 (s_1 - s_0)^{-1}$, $i = 0, 1$. *Alors le problème* $x''(t) \in F(t, x(t), x'(t))$ *p.p.* $t \in [0, 1]$, $x(0) = x(1) = 0$, *possède une solution* x *telle que* $s_1 \leq x'(t) \leq s_0$.

Preuve. Posons $s_0(t, x) \equiv s_0$, $s_1(t, x) \equiv s_1$, $c_0(t) \equiv c_1(t) \equiv 0$,

$$\psi(t) = \begin{cases} s_0 t, & t \in [0, s_1(s_1 - s_0)^{-1}], \\ s_1 t - s_1, & t \in (s_1(s_1 - s_0)^{-1}, 1]; \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} s_1 t, & t \in [0, s_0(s_0 - s_1)^{-1}], \\ s_0 t - s_0, & t \in (s_0(s_0 - s_1)^{-1}, 1]. \end{cases}$$

On vérifie aisément que les hypothèses du théorème (3.1) sont satisfaites, d'où l'existence d'une solution. ■

La preuve du théorème 3.1 sera donnée plus loin. Tout d'abord, nous allons considérer une nouvelle famille de problèmes qui nous permettra de déduire l'existence d'une solution de notre problème. La même notation qu'à la section précédente sera utilisée.

Définissons la fonction multivoque $\hat{F}$: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ par

$$\hat{F}(t, x, p, \lambda) = \overline{\mathrm{co}}\Big(\bigcup_{i=1}^{3} F_i\big(t, \pi(t, x), p, \lambda\big)\Big).$$

PROPOSITION 3.3. *Sous les hypothèses du théorème* 3.1, $\hat{F}$ *est une fonction multivoque de L^1-Carathéodory.*

Nous ne donnons pas la preuve puisqu'elle s'obtient par le même type d'arguments utilisés dans la preuve de la proposition 2.4.

Considérons la famille de problèmes suivants:

$$(\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{D}})_\lambda \quad \begin{cases} x''(t) \in \hat{F}(t, x(t), x'(t), \lambda) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x(0) = \alpha_0, \quad x(1) = \alpha_1, \end{cases}$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

L'existence d'une solution du problème $(\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{D}})_1$ nous permettra de déduire l'existence d'une solution de notre problème $(\mathrm{P}_{\mathrm{D}})$. Mais d'abord, nous allons majorer a priori les solutions de $(\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{D}})_\lambda$.

LEMME 3.4 (majoration a priori). *Sous les hypothèses du théorème* 3.1, *les solutions x de $(\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{D}})_\lambda$ sont telles que:*

(i) $\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ *pour tout* $t \in [0, 1]$;
(ii) $s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Preuve. (i) Soit x une solution de $(\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{D}})_\lambda$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $x \leqslant \psi$; l'autre inégalité se démontrant analoguement. Supposons que $\{t \in [0, 1]: x(t) > \psi(t)\} \neq \emptyset$. Alors, en utilisant les définitions de π et de S_0 et S_1, on vérifie qu'une des deux affirmations suivantes est vraie:

(a) il existe $t_0 < t_\psi$ tel que $x(t_0) \geqslant \psi(t_0)$ et $x'(t_0) > D^+\psi(t_0)$ $(\geqslant s_0(t_0, \psi(t_0)) = s_0(t_0, \pi(t_0, x(t_0))))$; et il existe $t_1 > t_0$ tel que $x(t) \geqslant c_0(t)$, $x'(t) > s_0(t, \pi(t, x(t)))$ pour tout $t \in [t_0, t_1)$ et $x'(t_1) \leqslant s_0(t_1, \pi(t_1, x(t_1))) \leqslant s_0(t_0, \pi(t_0, x(t_0)))$;
(b) il existe $t_0 > t_\psi$ tel que $x(t_0) \geqslant \psi(t_0)$ et $x'(t_0) < D_-\psi(t_0)$ $(\leqslant s_1(t_0, \psi(t_0)) = s_1(t_0, \pi(t_0, x(t_0))))$; et il existe $t_1 < t_0$ tel que $x(t) \geqslant c_1(t)$, $x'(t) < s_1(t, \pi(t, x(t)))$ pour tout $t \in (t_1, t_0]$ et $x'(t_1) \geqslant s_1(t_1, \pi(t_1, x(t_1))) \geqslant s_1(t_0, \pi(t_0, x(t_0)))$;

Si (a) a lieu, $(\pi(t, x(t)), x'(t)) \notin \overline{R_1(t)} \cup \overline{R_3(t)}$ p.p. $t \in [t_0, t_1]$ et

$$0 > x'(t_1) - x'(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x''(t)\,dt.$$

Or, $x''(t) \geq 0$ p.p. $t \in (t_0, t_1)$ par définition de $\hat{F}$. Contradiction.

De même, si (b) a lieu, on aboutit à une contradiction.

L'affirmation (ii) se démontre comme au lemme 2.8. ■

Preuve du théorème 3.1. Pour montrer l'existence d'une solution du problème (P_D), il suffit de montrer que le problème $(\hat{P}_D)_1$ a une solution. En effet, si x est une solution de $(\hat{P}_D)_1$, par le lemme 3.4, $\phi(t) \leq x(t) \leq \psi(t)$ et $s_1(t, x(t)) \leq x'(t) \leq s_0(t, x(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$. En procédant comme dans la preuve du théorème 2.1, on montre que $\hat{F}(t, x(t), x'(t), 1) \subset F(t, x(t), x'(t))$ p.p. D'où x est une solution de (P_D).

L'existence d'une solution du problème $(\hat{P}_D)_1$ découle directement de la proposition 3.3, du lemme 3.4, et du théorème 1.1. ■

4. Avec hypothèses mixtes. Dans cette section, nous allons combiner les hypothèses des sections 2 et 3. De nouveau, nous allons considérer le problème (P_D), i.e. lorsque $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites de Dirichlet. Nous énonçons le théorème principal de cette section.

THÉORÈME 4.1. *Soit* $F\colon [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction multivoque de L^1-Carathéodory et supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*:

(H4.1) *il existe ϕ dans $W^{2,1}(0, 1)$ une sous solution du problème (P_D);*

(H4.2) *il existe $\psi \geq \phi$ dans $C[0, 1]$, et S_0 et S_1 respectivement surfaces supérieure et inférieure à $D(\phi, \psi)$ pour (P_D) telles que:*

(i) $\psi(0) \geq \alpha_0$, $\psi(1) \geq \alpha_1$;

(ii) *il existe $t_\psi \in [0, 1]$ tel que ψ est croissante sur $[0, t_\psi]$ et décroissante sur $[t_\psi, 1]$;*

(iii) $s_0(t, \psi(t)) \leq D^+\psi(t)$, $t \in [0, t_\psi)$; $s_1(t, \psi(t)) \geq D_-\psi(t)$, $t \in (t_\psi, 1]$;

(iv) $\psi(t) > c_i(t)$ *p.p.* $t \in [0, 1]$, $i = 0, 1$.

Alors le problème (P_D) possède une solution telle que $\phi(t) \leq x(t) \leq \psi(t)$ et $s_1(t, x(t)) \leq x'(t) \leq s_0(t, x(t))$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Analoguement, lorsqu'on connaît une sur solution du problème (P_D), on a le théorème suivant:

THÉORÈME 4.2. *Soit* $F\colon [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction multivoque de L^1-Carathéodory et supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*:

(H4.1)' *il existe ψ dans $W^{2,1}(0, 1)$ une sur solution du problème (P_D);*

(H4.2)' *il existe $\phi \leq \psi$ dans $C[0, 1]$, et S_0 et S_1 respectivement surfaces supérieure et inférieure à $D(\phi, \psi)$ pour (P_D) telles que:*

(i) $\phi(0) \leqslant \alpha_0$, $\phi(1) \leqslant \alpha_1$;
(ii) *il existe* $t_\phi \in [0, 1]$ *tel que* ϕ *est décroissante sur* $[0, t_\phi]$ *et croissante sur* $[t_\phi, 1]$;
(iii) $s_0(t, \phi(t)) \leqslant D^+\phi(t)$, $t \in (t_\phi, 1]$; $s_1(t, \phi(t)) \geqslant D_-\phi(t)$, $t \in [0, t_\phi)$;
(iv) $\phi(t) < c_i(t)$ *p.p.* $t \in [0, 1]$.

Alors le problème (P_D) *possède une solution telle que* $\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ *et* $s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$, *pour tout* $t \in [0, 1]$.

COROLLAIRE 4.3. *Supposons que* F: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est une fonction multivoque de* L^1*-Carathéodory telle que* $F(t, 0, 0) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset$ *et qu'il existe des constantes* $s_1 < 0 < s_0$ *telles que pour* $i = 0, 1$, $F(t, x, s_i) \cap [0, \infty) \neq \emptyset$ *si* $0 \leqslant x \leqslant s_0 s_1 (s_1 - s_0)^{-1}$. *Alors le problème* $x''(t) \in F(t, x(t), x'(t))$ *p.p.* $t \in [0, 1]$, $x(0) = x(1) = 0$, *a une solution telle que* $s_1 \leqslant x'(t) \leqslant s_0$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Analoguement à ce que nous avons fait précédemment, pour démontrer le théorème 4.1, nous considérons de nouvelles familles de problèmes. Nous utilisons les notations des sections précédentes.

Définissons $\overline{F_0}$ et $\bar{F}$: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ par

$$\overline{F_0}(t, x, p, \lambda) = \begin{cases} \hat{F}(t, x, p, \lambda) & \text{si } x \geqslant \phi(t), \\ \emptyset & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\bar{F}(t, x, p, \lambda) = \overline{\mathrm{co}}\big(\overline{F_0}(t, x, p, \lambda) \cup F_5(t, x, p, \lambda)\big).$$

Considérons la famille de problèmes suivants:

$$(\bar{P}_D)_\lambda \quad \begin{cases} x''(t) \in \bar{F}(t, x(t), x'(t), \lambda) & \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x(0) = \alpha_0, \quad x(1) = \alpha_1, \end{cases}$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Nous n'écrivons pas la preuve du théorème 4.1 ainsi que des résultats suivants puisqu'elles sont similaires à celles des sections 2 et 3.

PROPOSITION 4.4. *Sous les hypothèses du théorème* 4.1, *la fonction multivoque* $\bar{F}$ *est de* L^1*-Carathéodory.*

LEMME 4.5 (majoration a priori). *Sous les mêmes hypothèses, les solutions de* $(\bar{P}_D)_\lambda$ *pour* $\lambda \in [0, 1]$, *sont telles que* $\phi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$, $s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Références

[1] J. J. Benedetto, *Real Variable and Integration*, Teubner, Stuttgart 1976.
[2] C. Berge, *Espaces topologiques, Fonctions multivoques*, Dunod, Paris 1959.
[3] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Vol. 1, Monografie Matematyczne 61, PWN, Warszawa 1982.
[4] L. H. Erbe and W. Krawcewicz, *Nonlinear boundary value problems for differential inclusions* $y'' \in F(x, y, y')$, Ann. Polon. Math. (to appear).

[5] M. Frigon, *Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires*, Dissertationes Math. 296 (1990), 79 pp.

[6] —, *Théorie de la transversalité topologique appliquée à des problèmes aux limites sans condition de croissance*, Rapport CRM-1632, Université de Montréal, septembre 1989.

[7] A. Granas, R. B. Guenther and J. W. Lee, *Some existence results for the differential inclusions* $y^{(k)} \in F(x, y, \ldots, y^{(k-1)})$, $y \in \mathscr{B}$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 307 (1988), 391–396.

[8] —, —, —, *Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems*, J. Math. Pures Appl. (to appear).

[9] C. J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87 (1975), 53–72.

[10] T. Pruszko, *Topological degree methods in multi-valued boundary value problems*, Nonlinear Anal. 5 (1981), 959–973.

[11] —, *Some applications of the topological degree theory to multi-valued boundary value problems*, Dissertationes Math. 229 (1984), 52 pp.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE, UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
C. P. 6128, succ. A, Montréal, Canada, H3C 3J7

Reçu par la Rédaction le 05.03.1990