ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Sur la distance entre les zéros de l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

par A. Lasota (Kraków)

1. Considérons l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 . \tag{1}$$

Supposons que les coefficients $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ soient continus dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et posons

$$A = \max_{\langle 0,h\rangle} |a(t)| , \quad B = \max_{\langle 0,h\rangle} |b(t)| , \quad C = \max_{\langle 0,h\rangle} |c(t)| . \tag{2}$$

Soit $x(t)$ une intégrale non banale de l'équation (1), satisfaisant aux conditions

$$x(0) = 0 , \quad x(r) = 0 , \quad x(h) = 0 , \quad 0 < r < h . \tag{3}$$

Cela posé, en vertu d'un théorème général de C. de la Vallée Poussin [4], appliqué à l'équation particulière (1), on doit avoir

$$1 < Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} .$$

Dans la présente note nous nous proposons d'établir l'inégalité plus précise du même type:

$$1 < A\frac{h}{4} + B\frac{h^2}{\pi^2} + C\frac{h^3}{2\pi^2} . \tag{4}$$

Cependant le problème de trouver l'évaluation la meilleure possible reste encore ouvert.

Il est à noter que pour l'équation du second ordre le problème analogue a été envisagé par Ph. Hartman, A. Wintner [1] et Z. Opial [2].

2. *Si les fonctions* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ *sont continues pour* $0 \leqslant x \leqslant h$ *et si* $x(t)$ *est une intégrale non identiquement nulle de l'équation* (1) *satisfaisant aux conditions* (3), *on a l'inégalité* (4).

Démonstration. Désignons par $z(t)$ la dérivée $x'(t)$. On a donc

$$x(t) = \int_r^t z(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

et il existe deux nombres α, β tels que

$$z(\alpha) = 0\,, \quad z(\beta) = 0\,, \quad 0 < \alpha < r < \beta < h\,.$$

Comme $x(t)$ est l'intégrale de l'équation (1), en vertu de (5) on a

$$z''(t) + a(t)z'(t) + b(t)z(t) + c(t)\int_r^t z(\tau)\,d\tau = 0\,.$$

Multiplions cette identité par $z(t)$ et intégrons ensuite dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta\rangle$. On obtient

$$-\int_\alpha^\beta z(t)z''(t)\,dt = \int_\alpha^\beta a(t)z(t)z'(t)\,dt + \int_\alpha^\beta b(t)z^2(t)\,dt + \int_\alpha^\beta c(t)z(t)\,dt \int_r^t z(\tau)\,d\tau\,.$$

Mais

$$-\int_\alpha^\beta z(t)z''(t)\,dt = -z(t)z'(t)\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta z'^2(t)\,dt = \int_\alpha^\beta z'^2(t)\,dt\,.$$

Il en résulte, d'après (2), que

$$\int_\alpha^\beta z'^2(t)\,dt \leqslant A\int_\alpha^\beta |z(t)z'(t)|\,dt + B\int_\alpha^\beta z^2(t)\,dt + C\int_\alpha^\beta dt\left|\int_r^t |z(t)z(\tau)|\,d\tau\right|. \tag{6}$$

Nous allons évaluer le second membre de (6). Z. Opial [3] a démontre que

$$\int_\alpha^\beta |z(t)z'(t)|\,dt \leqslant \frac{\beta-\alpha}{4}\int_\alpha^\beta z'^2(t)\,dt \tag{7}$$

pour toute fonction de classe C^1 qui s'annule aux points α et β. L'inégalité

$$\int_\alpha^\beta z^2(t)\,dt \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{\pi^2}\int_\alpha^\beta z'^2(t)\,dt \tag{8}$$

est bien connue ([5], p. 309).

Enfin, la fonction $z(t)z(\tau)$ étant symétrique en t et τ on a

$$\int_a^\beta dt\left|\int_r^t |z(t)z(\tau)|d\tau\right| = \int_a^r dt\left|\int_r^t |z(t)z(\tau)|d\tau\right| + \int_r^\beta dt\left|\int_r^t |z(t)z(\tau)|d\tau\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_a^r dt\int_a^r |z(t)z(\tau)|d\tau + \tfrac{1}{2}\int_r^\beta dt\int_r^\beta |z(t)z(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\int_a^r dt\int_a^\beta |z(t)z(\tau)|d\tau + \tfrac{1}{2}\int_r^\beta dt\int_a^\beta |z(t)z(\tau)|d\tau$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_a^\beta dt\int_a^\beta |z(t)z(\tau)|d\tau = \tfrac{1}{2}\Big(\int_a^\beta z(t)dt\Big)^2.$$

En appliquant l'inégalité (8) on obtient

$$\text{(9)}\qquad \int_a^\beta dt\left|\int_r^t |z(t)z(\tau)|d\tau\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\Big(\int_a^\beta z(t)dt\Big)^2 \leqslant \frac{\beta-a}{2}\int_a^\beta z^2(t)dt$$

$$\leqslant \frac{(\beta-a)^3}{2\pi^2}\int_a^\beta z'^2(t)dt\,.$$

Des inégalités (6), (7), (8) et (9) on tire immédiatement

$$\text{(10)}\qquad \int_a^\beta z'^2(t)dt$$

$$\leqslant A\,\frac{\beta-a}{4}\int_a^\beta z'^2(t)dt + B\,\frac{(\beta-a)^2}{\pi^2}\int_a^\beta z'^2(t)dt + C\,\frac{(\beta-a)^3}{2\pi^2}\int_a^\beta z'^2(t)dt\,.$$

Il est facile de voir que

$$M = \int_a^\beta z'^2(t)dt \neq 0\,.$$

En effet la condition $M = 0$ implique $z'(t) \equiv 0$ et, d'après (5) et (8), $x(t) \equiv 0$ pour $a \leqslant t \leqslant \beta$. D'autre part, il y a évidemment unicité des solutions de l'équation (1) et, par conséquent, on aurait $x(t) \equiv 0$ dans tout l'intervalle $\langle 0, h\rangle$, en contradiction avec notre hypothèse. Cela étant, on peut diviser par M et moyennant l'inegalité $0 < \beta - a < h$, on déduit de (10) l'inégalité (4).

3. L'inégalité (4) est valable indépendamment de la position du point r à l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Elle subsiste aussi dans le cas limite qu'on obtient pour $r \to 0$.

Si les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sont continues pour $0 \leqslant x \leqslant h$ et si $x(t)$ est une intégrale non identiquement nulle de l'équation (1) *satisfaisant aux conditions*

$$x(0) = x'(0) = x(h) = 0 , \tag{11}$$

on a l'inégalité (4).

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du précédent. Il n'y a qu'à poser $a = r = 0$.

Travaux cités

[1] Ph. Hartman and A. Wintner, *On a oscillation criterion of de la Vallée Poussin*, Quarterly of Applied Mathematics 13 (1955), p. 330-332.

[2] Z. Opial, *Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), p. 87-91.

[3] — *Sur une inégalité*, Ann. Polon. Math. 8 (1960), p. 29-32.

[4] C. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre*, Journal Math. Pures Appl. 9 (1929), p. 125-144.

[5] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima, Bologna 1948.

Reçu par la Rédaction le 28. 1. 1961