

J. BATTEK (Wrocław)

O WSKAŹNIKACH ROZWOJU DRZEWOSTANÓW

Wstęp

W pracach [1] i [2] przedstawiono metodę szacowania dwóch cech (faktorów) drzewostanu, mówiących o jego rozwoju, na podstawie trzech cech drzewostanu, mianowicie: średniej pierśnicy \bar{d} ⁽¹⁾, średniej wysokości h i jego średniego wieku. Metoda ta, zwana *metodą korelacji obszarowych*, pozwala tak przetransformować cechy \bar{d} i h drzewostanów równowiekowych, żeby nowe cechy (faktory) były już cechami nieskorelowanymi, w przeciwieństwie do cech wyjściowych. Transformacja ta jest jedną z wielu możliwych, ma jednak, jak już wspomniano, tę własność, że uzyskane za jej pomocą faktory nie są skorelowane, każdy z nich daje więc o drzewostanie informację niezależną od drugiej.

W niniejszej pracy przedstawię inne metody szacowania wskaźników pozwalających na ocenę rozwoju drzewostanów w oparciu na metariale doświadczalnym użytym w pracy [2], co pozwoli na porównanie poszczególnych wyników.

Paragraf 1 zawiera opis materiału doświadczalnego użytego do ilustracji przedstawionych metod. Wyniki liczbowe dotyczą drzewostanów sosnowych. Oczywiście można by opracować identycznymi metodami inne gatunki drzewostanów. W § 2 omówiono wskaźniki rozwoju drzewostanów oparte na zmodyfikowanej metodzie wskaźników antropologicznych Perkała, opisanych w pracy [3]. W § 3 wskaźnik uzyskano za pomocą optymalnych kombinacji liniowych w postaci $v = ad + bh + c$, gdzie v oznacza objętość średniego drzewa drzewostanu, tzn. drzewa o średniej pierśnicy \bar{d} i średniej wysokości h w drzewostanie, a , b i c zaś są stałymi. Wreszcie w § 4 znajdzie Czytelnik opis wskaźnika uzyskanego za pomocą optymalnego wyrażenia postaci $v = ad^b h^c$ i jego związek z poprzednimi.

Przy sposobności niniejszej publikacji pozwolę sobie serdecznie podziękować profesorowi Julianowi Perkałowi za cenną pomoc i wskazówki

⁽¹⁾ Przez pierśnicę rozumie się średnicę drzewa na pniu zmierzoną na wysokości 1,3 m od ziemi.

przy jej opracowywaniu, a Instytutowi Badawczemu Leśnictwa w Warszawie za udostępnienie materiału doświadczalnego.

§ 1. Opis materiału

Materiałem wyjściowym, na którym oparte są wyniki liczbowe pracy, były dane dotyczące 149 drzewostanów sosnowych z 22 nadleśnictw rozrzuconych po całej Polsce. Materiał zawierał dla każdego drzewostanu liczbę słoików około 10 drzew, skąd obliczono średni wiek drzewostanu, pomiary pierśnic i wysokości kilkudziesięciu drzew drzewostanu, jego bonitację oszacowaną przez leśników oraz łączną miąższość drzewostanu. Te dane zostały wykorzystane do niniejszych badań. Prócz tego notowaną jeszcze inne dane jak np. kilka tysięcy pierśnic (bez wysokości) w każdym drzewostanie. Te dane nie zostały wykorzystane. Tablica 1 przedstawia wykorzystane dane dotyczące jednego drzewostanu. Pełny materiał zawiera 149 takich tablic.

TABLICA 1

Nadleśnictwo Niepołomice, 215 d, drzewostan:
sosna 10, bonitacja I, miąższość 244,38 m³/ha

pierś- nica	wyso- kość	wiek	pierś- nica	wyso- kość	pierś- nica	wyso- kość	pierś- nica	wyso- kość	pierś- nica	wyso- kość
45,2	26,0	82	23	21,5	29	22,5	33	23,5	39	26,0
37,7	25,6	82	23	22,0	29	24,0	33	25,0	41	23,5
34,5	24,8	79	23	22,5	29	24,0	33	27,5	41	24,5
32,5	21,4	73	25	20,5	29	25,0	35	25,5	41	25,5
31,5	26,2	77	25	21,5	29	27,0	35	25,5	41	25,5
30,0	24,1	77	25	22,0	31	22,0	35	26,0	41	26,5
29,2	24,5	74	25	22,5	31	22,5	37	23,5	45	26,0
28,0	26,0	77	25	22,5	31	22,5	37	24,0	53	28,0
25,4	24,0	76	25	23,5	31	22,5	39	22,5		
21	19,5		25	26,0	33	22,0	39	24,0		
21	20,5		27	22,0	33	22,5	39	24,5		
21	22,0		27	23,5	33	23,0	39	25,5		

Cały materiał podzielony został ze względu na wiek na 7 klas, mianowicie na 6 klas 10-letnich od 41 do 100 lat i siódmą, do której zaliczono drzewostany w wieku powyżej 100 lat. Tablica 2 pokazuje rozkład tych drzewostanów według wieku i bonitacji oszacowanej przez leśników.

Podział drzewostanów na dziesięcioletnie klasy wiekowe przyjęto dlatego, ponieważ okazuje się, że na skutek różnych przyczyn drzewa jednego drzewostanu różnią się często dość znacznie w liczbie słoików, co zostało omówione obszerniej w pracy [2].

TABLICA 2

Rozkład 149 drzewostanów według wieku i bonitacji oszacowanej przez leśników

Klasa wieku \ Bonitacja	Klasa wieku							Razem
	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	ponad 100	
Ia	2	1	—	—	—	—	1	4
I	4	7	6	3	3	1	1	25
II	9	10	11	7	7	3	5	52
II/III	2	1	1	1	3	—	1	9
III	5	7	10	4	6	5	5	42
III/IV	1	—	—	—	—	1	—	2
IV	—	4	2	3	3	1	—	13
V	—	—	—	1	1	—	—	2
Razem	23	30	30	19	23	11	13	149

TABLICA 3

klasa wieku 41-50 lat

Lp.	bonitacja	średnia pierśnica \bar{d} (w cm)	średnia wysokość \bar{h} (w m)	objętość średniego drzewa \bar{v} (w dm^3)
1	I	20,56	17,98	272
2	II	19,46	16,33	224
3	II	20,60	15,74	236
4	III	16,88	13,63	162
5	III	16,45	12,89	137
6	II	19,77	14,57	236
7	I	23,42	20,53	438
8	II	16,76	15,32	152
9	II/III	16,63	15,11	152
10	III/IV	15,27	13,04	137
11	I	24,98	20,36	422
12	II	24,35	18,73	407
13	Ia	22,49	18,98	344
14	I	22,47	18,91	344
15	III	16,71	13,46	137
16	II	20,55	16,45	248
17	II	19,12	18,48	272
18	II	21,74	18,70	344
19	III	15,88	15,31	152
20	Ia	17,65	17,12	210
21	II	15,26	15,24	152
22	II/III	17,53	17,42	210
23	III	18,02	14,68	190

$$\bar{d} = 19,21, \sigma_d = 2,90, \bar{h} = 16,49, \sigma_h = 2,23.$$

TABLICA 3 (cd.)

klasa wieku 51-60 lat

Lp.	bonitacja	średnia pierśnica \bar{d} (w cm)	średnia wysokość \bar{h} (w m)	objętość średniego drzewa \bar{v} (w dm ³)
1	II	21,63	16,23	302
2	II	19,27	17,27	235
3	III	18,57	14,20	202
4	II	22,45	18,87	344
5	II	21,25	17,82	331
6	II	20,05	18,34	272
7	II/III	20,28	16,51	260
8	I	25,07	22,14	453
9	I	25,45	20,10	422
10	IV	17,15	11,30	151
11	I	20,62	19,08	282
12	I	25,43	20,65	438
13	Ia	29,16	23,84	664
14	I	24,64	20,17	422
15	II	20,53	17,59	272
16	I	21,87	19,39	344
17	II	21,88	19,80	358
18	II	19,16	18,01	272
19	IV	19,93	12,45	202
20	III	23,82	14,35	323
21	II	20,54	16,32	248
22	I	28,57	20,99	602
23	III	19,04	13,85	225
24	III	19,45	17,76	272
25	III	25,07	15,95	424
26	III	16,63	12,88	137
27	II	24,85	20,38	422
28	IV	14,82	11,40	90
29	III	15,82	13,61	144
30	IV	14,48	11,57	96

$$\bar{d} = 20,96, \sigma_d = 3,64, \bar{h} = 16,93, \sigma_h = 3,33.$$

klasa wieku 61-70 lat

1	III	22,15	15,48	287
2	IV	19,60	14,48	225
3	III	17,94	16,73	210
4	III	19,74	16,63	260
5	III	22,42	18,39	331
6	II	19,92	18,19	272
7	II	22,91	21,05	372

TABLICA 3 (cd.)

klasa wieku 61-70 lat

Lp.	bonitacja	średnia pierśnica d (w cm)	średnia wysokość h (w m)	objętość średniego drzewa v (w dm^3)
8	III	20,03	16,35	248
9	II/III	23,97	18,80	407
10	II	20,86	18,18	272
11	II	26,27	21,58	538
12	I	26,39	21,36	520
13	II	26,74	19,54	501
14	I	24,01	21,10	438
15	II	25,95	19,23	482
16	II	26,78	20,96	520
17	II	23,49	19,52	422
18	I	28,89	21,34	602
19	IV	19,79	13,28	214
20	III	19,08	14,45	225
21	II	25,49	21,91	538
22	II	21,10	17,48	317
23	II	23,97	22,90	470
24	I	26,81	21,93	538
25	III	23,40	17,37	374
26	III	20,54	17,30	260
27	I	25,98	21,82	538
28	III	23,72	18,36	391
29	I	27,20	21,79	624
30	III	24,82	18,53	407

$$\bar{d} = 23,33, \sigma_d = 2,92, \quad \bar{h} = 18,87, \sigma_h = 2,52.$$

klasa wieku 71-80 lat

1	II/III	23,41	20,37	422
2	II	27,46	21,77	624
3	III	29,07	21,69	722
4	II	26,64	20,08	501
5	I	32,13	23,87	869
6	IV	25,68	15,20	404
7	III	24,52	16,67	374
8	V	26,30	12,58	366
9	II	30,37	23,69	776
10	I	31,12	25,37	893
11	III	28,30	18,61	558
12	II	27,56	23,11	644
13	III	20,95	15,63	248
14	IV	20,76	14,73	236

TABLICA 3 (cd.)

klasa wieku 71-80 lat

Lp.	bonitacja	średnia pierśnica \bar{d} (w cm)	średnia wysokość \bar{h} (w m)	objętość średniego drzewa v (w dm^3)
15	II'	26,18	19,38	482
16	II	26,23	21,49	520
17	III	21,96	16,89	317
18	II	24,63	20,62	438
19	IV	19,15	13,94	225

$$\bar{d} = 25,67, \sigma_d = 3,45, \bar{h} = 19,16, \sigma_h = 3,61.$$

klasa wieku 81-90 lat

1	II/III	23,67	20,20	422
2	II	28,32	23,85	664
3	III	22,48	15,32	287
4	IV	21,16	14,84	287
5	II/III	28,04	22,26	624
6	II/III	25,87	21,70	538
7	III	24,76	18,60	407
8	I	33,97	26,36	1037
9	IV	21,07	15,25	287
10	I	33,54	23,75	979
11	III	25,24	16,93	444
12	V	22,50	11,08	233
13	I	36,77	26,05	1157
14	II	26,27	20,43	501
15	II	31,20	21,69	821
16	III	25,38	16,89	444
17	II	27,05	20,32	580
18	III	29,28	20,17	674
19	II	32,46	26,38	917
20	II	29,21	22,19	722
21	IV	21,98	16,62	317
22	II	22,53	19,78	358
23	III	24,97	20,02	422

$$\bar{d} = 26,68, \sigma_d = 4,31, \bar{h} = 20,03, \sigma_h = 3,88.$$

klasa wieku 91-100 lat

1	III/IV	25,94	18,17	463
2	III	22,81	18,59	344
3	III	28,89	20,29	580
4	II	27,33	23,37	644

TABLICA 3 (cd.)

klasa wieku 91-100 lat

Lp.	bonitacja	średnia pierśnica \bar{d} (w cm)	średnia wysokość \bar{h} (w m)	objętość średniego drzewa \bar{v} (w dcm^3)
5	II	29,26	21,98	728
6	I	31,87	26,41	917
7	II	33,91	24,08	979
8	III	23,30	17,79	391
9	III	25,53	17,77	463
10	IV	27,38	15,27	470
11	III	26,29	19,40	482

$$\bar{d} = 28,09, \sigma_d = 3,21, \quad \bar{h} = 20,91, \sigma_h = 3,19.$$

klasa wieku ponad 100 lat

1	III	29,46	22,79	744
2	III	32,57	22,19	821
3	II	34,26	24,72	1005
4	II	31,77	21,34	795
5	III	28,57	20,66	602
6	II	32,33	23,46	845
7	II	31,54	21,83	821
8	III	34,28	20,34	870
9	I	41,00	27,75	1510
10	II	35,48	25,38	1117
11	III	25,87	20,96	520
12	II/III	34,89	23,07	955

$$\bar{d} = 32,42, \sigma_d = 3,67, \quad \bar{h} = 22,87, \sigma_h = 2,07.$$

Tablica 3 zawiera bonitację drzewostanów ocenioną przez leśników, średnią pierśnicę i wysokość drzewostanów oraz objętość (miaższność) średniego drzewa drzewostanu, odczytaną z tablic Tjurina objętości drzew sosnowych na pniu [5]. Tablica 3 jest podzielona na 7 klas wiekowych. Na końcu każdej klasy wiekowej podano średnie i dyspersje pierśnicy i wysokości w tej klasie.

Należy zwrócić uwagę, że obiektem naszych badań są drzewostany, nie zaś drzewa. Z tego powodu traktować będziemy liczby zawarte w kolumnach \bar{d} i \bar{h} tablicy 3 jako równorzędne, choć są one obliczone (jako średnie) z prób o różnej liczebności. (Liczba pomierzonych drzew w poszczególnych drzewostanach wahała się w granicach od 40 do 80.) Liczebność prób może bowiem wpłynąć tylko na dokładność średniej, lecz nie na jej oczekiwaną wartość.

TABLICA 4
Wskaźniki rozwoju drzewostanów w wieku 61-70 lat

Lp.	D	H	$D+H$	$H-D$	B	W
1	-0,405	-1,346	-1,751	-0,941	-64	-64
2	-1,279	-1,743	-3,022	-0,464	-89	-56
3	-1,849	-0,850	-2,699	0,999	-84	90
4	-1,231	-0,889	-2,120	0,342	-73	43
5	-0,312	-0,191	-0,503	0,121	-21	16
6	-1,170	-0,270	-1,440	0,900	-55	87
7	-0,144	0,865	0,721	1,009	30	91
8	-1,132	-1,000	-2,132	0,132	-73	17
9	0,220	-0,028	0,192	-0,248	8	-32
10	-0,813	-0,274	-1,087	0,539	-43	63
11	1,008	1,076	2,084	0,068	72	9
12	1,050	0,989	2,039	-0,061	72	-8
13	1,170	0,266	1,436	-0,904	55	-87
14	0,233	0,885	1,118	0,652	44	72
15	0,899	0,143	1,042	-0,756	42	-79
16	1,183	0,830	2,013	-0,353	71	-44
17	0,055	0,258	0,313	0,203	13	27
18	1,887	0,981	2,868	-0,906	87	-87
19	-1,214	-2,191	-3,405	-0,997	-92	-89
20	-1,458	-1,755	-3,213	-0,297	-91	-38
21	0,741	1,207	1,948	0,466	69	56
22	-0,765	-0,552	-1,317	0,213	-51	28
23	0,220	1,600	1,820	1,380	66	98
24	1,176	1,215	2,391	0,039	78	6
25	0,024	-0,596	-0,572	-0,620	-24	-70
26	-0,957	-0,623	-1,580	0,344	-59	42
27	0,910	1,171	2,081	0,261	72	34
28	0,134	-0,202	-0,068	-0,336	-3	-42
29	1,310	1,159	2,469	-0,151	80	-20
30	0,511	-0,135	0,376	-0,646	16	-72

dużą wysokość w stosunku do swojej pierśnicy. Drzewostan rozwijający się normalnie będzie miał $H_i - D_i = 0$, czyli $H_i = D_i$.

Założmy, że pierśnice d i wysokości h mają rozkład normalny (Gaussa). Tym samym cechy unormowane D i H mają rozkład normalny $N(0, 1)$. Wynika stąd, że wielkości $D+H$ i $H-D$ mają też rozkłady normalne o średnich 0 i odchyleniach średnich równych odpowiednio

$$\sigma_{D+H} = \sqrt{2(1+r_{DH})} \quad \text{i} \quad \sigma_{H-D} = \sqrt{2(1-r_{DH})},$$

gdzie r_{DH} jest kowariancją cech D i H , w tym przypadku równą współczynnikowi korelacji między cechami D i H , a zarazem współczynnikowi

korelacji między cechami d i h . Dla klasy wieku 61-70 lat liczby te wynoszą odpowiednio: $r_{DH} = 0,82$, $\sigma_{D+H} = 1,91$, $\sigma_{H-D} = 0,6$.

Używając tablic rozkładu normalnego możemy dla i -tego drzewostanu o wskaźnikach $D_i + H_i$ i $H_i - D_i$ odczytać prawdopodobieństwa tego, że wskaźniki $D + H$ i $H - D$ losowo wybranego drzewostanu tej klasy wiekowej odchylają się od 0 o mniej niż $D_i + H_i$ i $H_i - D_i$. Otrzymane w ten sposób prawdopodobieństwa pomnożone przez 2, wyrażone w procentach i opatrzone znakami zgodnymi ze znakami wielkości $D + H$ i $H - D$, oznaczmy odpowiednio przez B i W . Wskaźniki B i W mogą więc przybierać wartości od -100 do 100 .

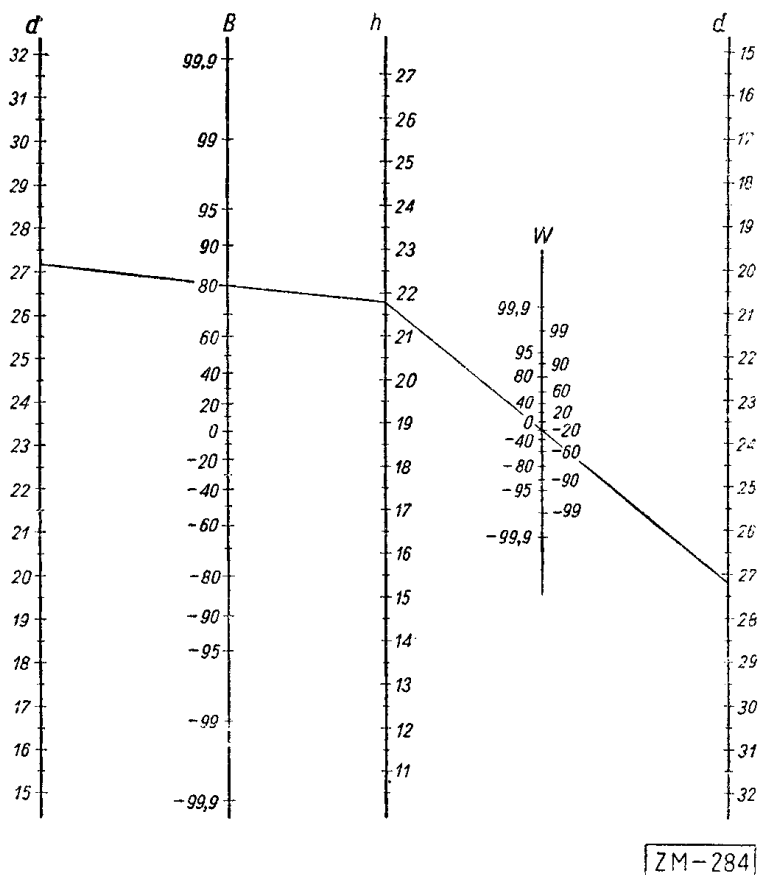
Tablica 4 podaje wielkości D , H , $D + H$, $H - D$ oraz wskaźniki B i W dla drzewostanów klasy wiekowej 61-70 lat.

Przejdziemy obecnie do interpretacji wskaźników B i W . Dodatni wskaźnik B wskazuje, że drzewostan ze względu na cechy: pierśnicę i wysokość, jest lepiej rozwinięty od przeciętnego drzewostanu tej samej klasy wiekowej, ponadto wskazuje jaki procent drzewostanów jest słabiej rozwinięty od niego. Tym samym określa on niejako bonitację drzewostanu. Dodatni W wskazuje, że drzewostan ma zbyt dużą wysokość w stosunku do swej pierśnicy. Mówi on o tym, jaki procent drzewostanów o tej samej bonitacji ma stosunek wysokości do pierśnicy mniejszy niż w drzewostanie badanym. Drzewostan rozwinięty normalnie będzie miał wskaźniki B i W równe zeru.

A oto kilka przykładów. Drzewostan numer 29 ma $B = 80$ i $W = -20$. Znaczy to, że drzewostan ten jest ze względu na zespół cech pierśnica i wysokość dobrze rozwinięty, że wszystkie drzewostany o wskaźniku B ujemnym i 80% drzewostanów o wskaźniku B dodatnim są rozwinięte słabiej niż rozpatrywany. Wskaźnik W mówi nam, że drzewostan ma zbyt małą wysokość w stosunku do swej pierśnicy, że jest „krępy”, ponieważ wszystkie drzewostany o wskaźniku W dodatnim i 20% drzewostanów o wskaźniku W ujemnym mają przy tej samej pierśnicy większą wysokość. Drzewostan numer 10 ma $B = -43$ i $W = 63$. Znaczy to, że jest on słabo rozwinięty, że wszystkie drzewostany o wskaźniku B dodatnim i 43% drzewostanów o wskaźniku B ujemnym są lepiej rozwinięte niż rozpatrywany. Wskaźnik W mówi, że drzewostan ma zbyt dużą wysokość w stosunku do swej pierśnicy, że wszystkie drzewostany o wskaźniku W ujemnym i 63% drzewostanów o wskaźniku W dodatnim ma przy tej samej pierśnicy mniejszą wysokość.

Odczytywanie wskaźników B i W bardzo ułatwia prosty nomogram o drabinkach równoległych. Rysunek 1 przedstawia taki nomogram dla drzewostanów klasy wiekowej 61-70 lat. Nomogram składa się z pięciu skal równoległych: dwóch skal d dla pierśnic (skale te są przeciwnie skierowane), skali h dla wysokości oraz skal B i W do odczytywania oma-

wianych wskaźników. Aby odczytać z nomogramu wartości wskaźników B i W dla drzewostanu numer 29, dla którego $d = 27, 20$ cm, $h = 21, 79$ m, znajdujemy na skalach d punkty odpowiadające liczbom 27, 20, a na skali h punkt odpowiadający liczbie 21, 79. Odcinki łączące te punkty przecinają odpowiednio jedną skalę B , drugą skalę W . Liczby odpowiadające punktom przecięcia się są wartościami wskaźników tego drzewostanu. Wynoszą one, jak widać na rys. 1, $B = 80$, $W = -20$. Aby móc odczy-



Rys. 1. Nomogram do odczytywania wskaźników B i W dla drzewostanów sosnowych w wieku 61-70 lat

tywać wskaźniki B i W dla drzewostanów dowolnego wieku, należy takich nomogramów zbudować tyle, na ile klas wiekowych podzielimy wszystkie drzewostany. Siedem nomogramów wykonanych na podstawie naszego materiału doświadczalnego, objęłoby drzewostany polskie w wieku powyżej 40 lat.

Przedstawiłem przykładowo nomogram dla klasy wieku 61-70 lat pomijając 6 nomogramów dla pozostałych klas wiekowych, gdyż ze względu na szczupłość materiału doświadczalnego użytego do ich budowy, trudno

by je było uznać za nadające się do praktycznego wykorzystywania w leśnictwie. Nomogramy te należałoby wykonać opierając się na znacznie bogatszym materiale doświadczalnym, tym bardziej, że liczba drzewostanów nie komplikuje niezmiernie prostych rachunków.

Jedną z zasadniczych własności bonitacji używanej w leśnictwie jest jej korelacja z miąższością drzewostanu. Ponieważ wskaźnik B jest odpowiednikiem bonitacji, obliczyłem współczynniki korelacji dla poszczególnych klas wiekowych między cechą B a objętością średniego drzewa drzewostanu i miąższością przypadającą na 1 ha tego drzewostanu. Dla porównania obliczyłem także odpowiednie współczynniki korelacji dla bonitacji oszacowanej przez leśników. Dane te zawiera tablica 5, przy czym oznaczyłem przez: r_{Bv} — korelację między wskaźnikiem B a objętością średniego drzewa; r_{bv} — korelację między bonitacją a objętością średniego drzewa; r_{BV} — korelację między wskaźnikiem B a miąższością drzewostanu na 1 ha; r_{bV} — korelację między bonitacją a miąższością drzewostanu na 1 ha; r_{Wv} — korelację między wskaźnikiem W a objętością średniego drzewa.

TABLICA 5

wiek \ korelacja	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	ponad 100
r_{Bv}	0,96	0,94	0,98	0,97	0,96	0,96	0,95
r_{bv}	0,66	0,85	0,74	0,78	0,84	0,81	0,80
r_{BV}	0,58	0,65	0,69	0,78	0,55	0,60	0,71
r_{bV}	0,47	0,73	0,60	0,74	0,51	0,63	0,28
r_{Wv}	-0,02	-0,19	-0,14	-0,20	-0,24	-0,17	-0,10

Jak widać, wskaźnik B jest silniej skorelowany z objętością średniego drzewa niż bonitacja. Również korelacja między wskaźnikiem B a miąższością przypadającą na 1 ha jest w pięciu klasach wiekowych wyższa niż z bonitacją. Należy zaznaczyć, że wiersze r_{BV} i r_{bV} tablicy 5 są zniekształcone przez niedokładne dane dotyczące pól powierzchni próbnych i liczby drzew niektórych drzewostanów. Wyniki te świadczą o bonitacyjnym charakterze wskaźnika B i o jego przydatności przy ocenie rozwoju drzewostanów. Ostatni wiersz tablicy 5 podaje korelację między objętością średniego drzewa drzewostanu a wskaźnikiem W . Jak widać, korelacje te są bardzo małe i jak łatwo odczytać z tablic rozkładu współczynnika korelacji są nieistotne. Świadczy to o tym, że wskaźnik W charakteryzuje cechę drzewostanu niezależną od objętości. Wskaźnik ten jest niejako odpowiednikiem cech drzewostanów znanych w leśnictwie, takich jak smukłość czy zalesienie.

Wskaźniki B i W mają tę zaletę, że są obiektywne i że dają na podstawie znajomości średniej pierśnicy, średniej wysokości i wieku drzewostanu dwie nowe i zupełnie nieskorelowane informacje, charakteryzujące rozwój drzewostanu i sugerujące potrzebę pewnych zabiegów uprawowych, co więcej: wskazują przydatność pewnych drzewostanów do ustalonych celów.

Wskaźnik W ma jeszcze tę własność, że klasyfikuje drzewostany według podobieństwa przyrodniczego. Oto określenie tego pojęcia. Powiemy, że dwa drzewostany są *przyrodniczo podobne*, jeżeli różnice wartości ich cech d i h są proporcjonalne do dyspersji tych cech w populacji. Dla wskaźnika W zachodzi następujące

TWIERDZENIE. *Dwa drzewostany mające wskaźnik W równy (i tylko takie) są przyrodniczo podobne.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że i -ty i j -ty drzewostan mają równy wskaźnik $H-D$, czyli że

$$(3) \quad H_i - D_i = H_j - D_j.$$

Na mocy definicji wielkości H i D (wzory (1)), równość tę możemy napisać w postaci

$$(4) \quad \frac{h_i - \bar{h}}{\sigma_h} - \frac{d_i - \bar{d}}{\sigma_d} = \frac{h_j - \bar{h}}{\sigma_h} - \frac{d_j - \bar{d}}{\sigma_d}.$$

Przenosząc na lewą stronę równości ułamek zawierający h_j , na prawą zaś ułamek zawierający d_i i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy

$$(5) \quad \frac{h_i - h_j}{\sigma_h} = \frac{d_i - d_j}{\sigma_d}.$$

Oznaczając współczynnik proporcjonalności proporcji (5) przez k , otrzymujemy dwie równości:

$$(6) \quad h_i - h_j = k\sigma_h \quad \text{i} \quad d_i - d_j = k\sigma_d, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Wykazaliśmy więc, że dla dwóch drzewostanów, mających równy wskaźnik $H-D$, różnice ich cech są proporcjonalne do dyspersji tych cech w populacji. Dowód twierdzenia odwrotnego polega na odczytaniu od końca podanego wyżej dowodu. Prawdziwość twierdzenia dla wskaźnika W wynika stąd, że jest on transformacją wielkości $H-D$ za pomocą funkcji monotonicznej (dystrybuanty rozkładu normalnego).

Obszerniejsze omówienie wskaźników przyrodniczego podobieństwa znajdzie czytelnik w pracy [3].

Porównując (tablica 6) wskaźniki B i W drzewostanów naszego materiału, uzyskanych w tej pracy, z odpowiednimi wskaźnikami uzyska-

nymi metodą korelacji obszarowych w pracy [2], zauważymy dużą zgodność obu metod. Można wytłumaczyć to następująco: metoda korelacji obszarowych polega na zastąpieniu układu współrzędnych (d, h) takim układem współrzędnych, którego jedną osią jest oś korelacji zbioru punktów, odpowiadających drzewostanom danej klasy wiekowej, a początek tego układu leży w punkcie (\bar{d}, \bar{h}) . Metoda opisana wyżej polega na obrocie układu współrzędnych (d, h) o kąt 45° , po uprzednim unormowaniu na 0 i 1 cech d i h . Otóż okazuje się, że oś korelacji zbioru punktów, odpo-

TABLICA 6

Wskaźniki B i W dla drzewostanów w wieku 61-70 lat uzyskane:
 P – metodą wskaźników Perkala, K – metodą korelacji obszarowych

Lp.	P		K		Lp.	P		K	
	B	W	B	W		B	W	B	W
1	-64	-64	-30	-50	16	71	-44	76	-31
2	-89	-56	-65	-28	17	13	27	30	30
3	-84	90	-58	85	18	87	-87	84	-75
4	-73	43	-58	50	19	-92	-89	-86	-40
5	-21	16	-16	30	20	-91	-38	-84	3
6	-55	87	-46	84	21	69	56	66	52
7	30	91	40	83	22	-51	28	-24	32
8	-73	17	-58	37	23	66	98	50	95
9	8	-32	0	0	24	78	60	70	20
10	-43	63	-28	65	25	-24	-70	-1	-43
11	72	9	61	26	26	-59	42	-38	47
12	72	-8	75	-15	27	72	34	67	38
13	55	-87	40	-63	28	-3	-42	-4	-10
14	44	72	53	60	29	80	-20	59	10
15	42	-79	30	-30	30	16	-72	11	-36

wiadających drzewostanom równowiekowym, na płaszczyźnie (d, h) ma dla drzewostanów sosnowych współczynnik kierunkowy bliski 1. Tym samym obie transformacje, aczkolwiek uzyskane różnymi drogami, są bardzo zbliżone, co powoduje tak znaczną zgodność wskaźników uzyskanych tymi metodami.

§ 3. Wskaźniki maksymalnie skorelowane z miąższością średniego drzewa drzewostanu

Jak już wspomniano, jednym z zasadniczych wymagań stawianych wskaźnikom o charakterze bonitacyjnym jest ich możliwie silne skorelowanie z miąższością drzewostanu (patrz [4], str. 551). Dlatego podjąłem próbę wyznaczenia takich wskaźników, maksymalnie skorelowanych

z miąższością drzewostanu, dla dwóch klas funkcji dwóch zmiennych d i h , a mianowicie dla kombinacji liniowej $v = ad + bh + c$ oraz dla jednomianu $v = ad^b h^c$.

Jak wiadomo, w celu uzyskania wskaźnika maksymalnie skorelowanego z miąższością dla danej klasy funkcji, np. kombinacji liniowej, należy wyznaczyć jej parametry metodą najmniejszych kwadratów. Dla kombinacji liniowej wyznaczenie w ten sposób wielkości a , b i c nie przedstawia większych trudności. Uzyskany więc w części A tego paragrafu wskaźnik v' jest maksymalnie skorelowany z miąższością v . Natomiast współczynniki a , b i c jednomianu $v = ad^b h^c$ zostały wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów po uprzednim zlogarytmowaniu tego wyrażenia. Zminimalizowano zatem nie sumę kwadratów różnic liczb, lecz sumę kwadratów różnic logarytmów tych liczb. Z tego powodu uzyskane w części B paragrafu 3 za pomocą tego wyrażenia wartości v'' różnić się będą od wartości jakie otrzymalibyśmy, gdyby nasz jednomian nie został zlogarytmowany. Maksymalnie skorelowane będą więc w tym przypadku nie wielkości v i v'' , lecz ich logarytmy. Jednak wyznaczenie współczynników a , b i c naszego jednomianu bez logarytmowania jest praktycznie niemożliwe.

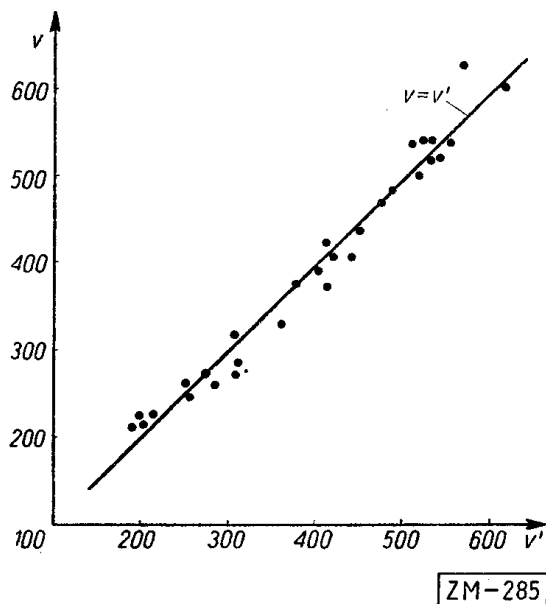
Do badań tych użyłem objętości średniego drzewa drzewostanu, a nie jego miąższości, przypadającej na 1 ha, co uzasadniam następująco: miąższość drzewostanu przypadająca na 1 ha jest iloczynem objętości średniego drzewa drzewostanu i liczby drzew na hektarze. Wyobraźmy sobie, że w drzewostanie, na przykład pierwszej bonitacji, zrobiono przecinki, wycinając w sposób losowy dużą liczbę drzew. Wskutek tego miąższość drzewostanu przypadająca na 1 ha zmieni się znacznie. Natomiast przecinka taka nie wpłynie na objętość średniego drzewa drzewostanu, a zatem i na zmianę bonitacji.

A. Objętość jako funkcja liniowa pierśnicy i wysokości. Wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów współczynniki a , b i c formy liniowej $v = ad + bh + c$ dla poszczególnych klas wieku przedstawia tablica 7.

TABLICA 7

Klasa wieku	Optymalna kombinacja liniowa
41- 50	$v' = 17,11d + 22,38h - 455,43$
51- 60	$v' = 28,82d + 9,05h - 460,14$
61- 70	$v' = 32,16d + 13,99h - 620,88$
71- 80	$v' = 36,85d + 21,92h - 870,66$
81- 90	$v' = 51,40d + 9,98h - 1009,84$
91-100	$v' = 42,60d + 23,51h - 1061,04$
ponad 100	$v' = 46,18d + 40,79h - 1557,91$

Otrzymaną w ten sposób wielkość v' silnie skorelowaną z objętością średniego drzewa drzewostanu v , można by traktować jako wskaźnik bonitacyjny drzewostanów. Optymalne kombinacje liniowe wykazują



Rys. 2

jednak dużą nieregularność współczynników a , b i c dla poszczególnych klas wiekowych, co jest dla samej metody zjawiskiem negatywnym. Również badanie zbioru punktów przestrzeni (d, h, v) , odpowiadających drzewostanom tej samej klasy wiekowej, wskazuje, że zbiór tych punktów znacznie odbiega od płaszczyzny. Zbiór ten jest raczej zbliżony kształtem do powierzchni stopnia drugiego, o czym świadczy również rozmieszczenie punktów odpowiadających drzewostanom na płaszczyźnie (v, v') , mające dla wszystkich klas wiekowych kształt paraboli stopnia drugiego. Rysunek 2 po-

kazuje rozmieszczenie tych punktów dla drzewostanów w wieku 61-70 lat na tle prostej $v = v'$.

B. Optymalne wyrażenie postaci $v = ad^b h^c$. Wydaje się, że funkcja postaci $v = ad^b h^c$ w sposób bardziej naturalny aproksymuje objętość v niż funkcja liniowa, chociażby ze względu na swój kształt przypominający wzory na objętość brył geometrycznych. Powierzchnie o tym równaniu, wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów, dla poszczególnych klas wiekowych oraz dla wszystkich 149 drzewostanów łącznie przedstawia tablica 8.

TABLICA 8

Klasa wieku	Optymalne wyrażenie
41- 50	$v'' = 0,087d^{1,72}h^{1,00}$
51- 60	$v'' = 0,090d^{2,04}h^{0,65}$
61- 70	$v'' = 0,096d^{1,92}h^{0,76}$
71- 80	$v'' = 0,062d^{2,07}h^{0,75}$
81- 90	$v'' = 0,082d^{2,05}h^{0,68}$
91-100	$v'' = 0,083d^{2,04}h^{0,69}$
ponad 100	$v'' = 0,120d^{1,82}h^{0,81}$
łącznie dla 149 drzewostanów	$v'' = 0,077d^{2,03}h^{0,72}$

Dla 149 drzewostanów łącznie, a więc bez uwzględnienia wieku, średnie kwadratowe odchylenie różnicy $v - v''$ wynosi 24,2, współczynnik korelacji zaś $r_{vv''} = 0,997$. Dla poszczególnych klas wiekowych średnie kwadratowe odchylenie jest znacznie mniejsze.

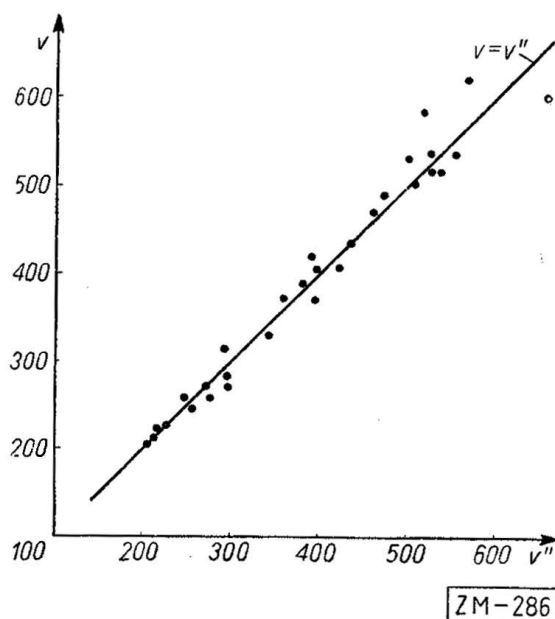
Funkcję v'' można traktować jako wskaźnik bonitacyjny drzewostanów. Dla uzyskania lepszej przejrzystości można za taki wskaźnik przyjąć różnicę $v'' - \bar{v}$, gdzie \bar{v} oznacza średnią objętość w danej klasie wieku. Wyznaczając empirycznie rozkład wielkości v , można wprowadzić wskaźnik probabilistyczny, mający identyczną interpretację procentową jak wskaźnik B omówiony w § 2 i ten sam przedział zmienności. Każdy z tych wskaźników daje się odczytać za pomocą prostego nomogramu, co jest niewątpliwą zaletą przy wprowadzeniu go do praktyki.

Rysunek 3 pokazuje rozmieszczenie na płaszczyźnie (v, v'') punktów odpowiadających drzewostanom w wieku 61-70 lat na tle prostej $v = v''$.

Przy okazji warto zwrócić uwagę na pewną prawidłowość występującą we wzorach na v'' . Otóż suma wykładników b i c wykazuje dla wszystkich klas wiekowych dużą stabilność i zawiera się w przedziale od 2,63 do 2,82 ze średnią 2,71. W tym też przedziale leży suma wykładników wyrażenia dla

149 drzewostanów łącznie. Wynika stąd, że wymiarem współczynnika a jest $[\text{dcm}]^{0,29}$. Jest to zjawisko dość ciekawe i wiąże się niewątpliwie z wielkością zwaną w leśnictwie *liczbą kształtu*. Dokładniejsze zbadanie tego związku wymagałoby jednak oparcia się na obszerniejszym materiale doświadczalnym.

Po opracowaniu omówionych wskaźników rozwoju drzewostanów, na podstawie dostatecznie bogatego materiału doświadczalnego, należałoby poddać ich przydatność ocenie leśników.



Rys. 3

Prace cytowane

[1] J. Perkal i J. Battek, *Próba oceny rozwoju drzewostanów*, Sylwan, rok XCIX, zeszyt 1, Warszawa 1955, str. 12-31.

[2] J. Battek i J. Perkal, *Bonitacja i wysmukłość drzewostanów*, Zastosowania Matematyki 3 (1958), str. 285-306.

[3] J. Perkał, *O wskaźnikach antropologicznych*, Przegląd Antropologiczny t. XIX, Poznań 1953, str. 208-221.

[4] T. Gieruszyński, *Dendrometria*, Warszawa 1949.

[5] А. В. Тюрин, И. М. Науменко и П. В. Воропанов, *Лесная вспомогательная книжка*, Москва 1946.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 18. 3. 1958

Я. БАТТЭК (Вроцлав)

О ПОКАЗАТЕЛЯХ РАЗВИТИЯ ДРЕВОСТОЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе представлено несколько методов определения показателей развития древостоев основанных на трех их качествах: среднем диаметре на уровне груди d , средней высоте h и возрасте. Первый метод (§ 2) основан на нормировании показателей d и h равновековых древостоев на среднюю 0 и дисперсию 1 (нормированные показатели обозначены через D и H) и преобразовании величин $D+H$ и $H-D$ при помощи функции нормального распределения. Полученные таким образом показатели обозначены соответственно через B и W . Показатель B сильно скореллирован с объемом среднего дерева древостоя и свидетельствует о его бонитете. Показатель W характеризует аномалию между диаметром на уровне груди и высотой древостоя.

В § 3 оговорена наилучшая линейная комбинация вида $v = ad + bh + c$, где v означает объем среднего дерева древостоя, a , b и c — постоянные; в § 4 показатель основывается на наилучшем выражении вида $v = ad^b h^c$. Показатели, основанные на наилучшей линейной комбинации и выражении вида $v = ad^b h^c$ являются, в связи с сильным скореллированием с объемом, показателями полезными при определении бонитета.

Численные результаты работы касаются древостоев сосновых. Очевидно, что другие сорта древостоев можно исследовать аналогичными методами.

Я. БАТТЕК (Wrocław)

ON THE INDICES OF THE AGE OF FOREST STANDS

SUMMARY

The author presents several methods of constructing the indices of the age of forest stands on the basis of three of their characteristics: the mean value of breast-high diameters d , the mean height h and the age. The first method (§ 2) consists in standardizing the characteristics d and h of forest stands of the same ages with respect to the mean 0 and the dispersion 1 (the standardized characteristics being

denoted by D and H) and transforming the quantities $D+H$ and $H-D$ by the distributing function of the normal distribution. The indices obtained in this way are denoted by B and W respectively. The index B is strongly correlated with the volume of the mean tree of the forest stand and speaks of its quality. The index W characterizes the anomaly between the breast high diameter and the height of the forest stand.

In § 3 the author discusses the optimal linear combination of the form $v = ad + bh + c$ where v denotes the volume of the mean tree of a forest stand and a , b and c are constants; in § 4 he discusses the index based on the optimal expression of the form $v = ad^b h^c$. The indices based on the optimal linear combination and the expression of the form $v = ad^b h^c$, on account of their strong correlation with the volume of the mean tree of a forest stand, are indices of qualitative nature.

Numerical results given in the paper concern pinewood forest stands. Other kinds of forest stands can of course be treated by identical methods.
