ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1970)

Über Differentialkomitanten erster Ordnung von kovarianten Vektorfelder

von I. MAKAI (Debrecen)

Herr S. Topa hat sich in seiner Arbeit [2] mit Bestimmung solcher Differentialkomitanten erster Ordnung von zwei linear unabhängigen kovarianten Vektorfelder u_i und v_i in X_2 beschäftigt, die differentialgeometrische Objekte (höchstens) zweiter Klasse sind. Herr Prof. Gołąb hat in [1], falls die gesuchten Komitanten Vektoren, bzw. Skalaren sind, einen neuen Beweis der Ergebnisse von S. Topa gegeben. Seine Methode ist analytisch, er hat die Differenzierbarkeit der gesuchten Funktionen vorausgesetzt.

Wir werden uns in dieser Arbeit ebenfalls mit diesem Problem beschäftigen. Bezüglich unserer Bezeichnungsweise weisen wir auf die Arbeit [1] hin.

Unsere Resultate sind die folgenden.

SATZ 1. *Ist das differentialgeometrische Objektenfeld erster Klasse k_λ $(\lambda = 1, \ldots, N)$ eine Differentialkomitante erster Ordnung von zwei linear unabhängigen kovarianten Vektorfelder u_i und v_i in X_n $(n \geqslant 2)$, so ist k_λ eine algebraische Komitante der Grössen u_i, v_i, U_{ik}, V_{ik}, wo die Tensoren U_{ik}, V_{ik} wie folgt definiert sind*:

$$U_{ik} \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_{[k}u_{i]}\,, \qquad V_{ik} \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_{[k}v_{i]}\,.$$

SATZ 2. *Ist das kovariante Vektorfeld k_j eine Differentialkomitante erster Ordnung der Vektorfelder u_i und v_i in X_2, so hat k_j die Gestalt*

$$k_j = a_1(\varrho_1, \varrho_2)u_j + a_2(\varrho_1, \varrho_2)v_j \qquad (j = 1, 2)\,,$$

wo

$$\varrho_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}\,, \qquad \varrho_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

sind und für $a_1(\varrho_1, \varrho_2)$, $a_2(\varrho_1, \varrho_2)$ kann man beliebige Funktionen nehmen.

Beweis des Satzes 1.

Aus unseren Voraussetzungen ergibt sich folgendes.

1. Die Grösse k_λ ist ein differentialgeometrisches Objekt erster Klasse, ihr Transformationsgesetz hat also die Form

$$F_\lambda[k_\mu(\xi^i), A_k^j] = \bar{k}_\lambda(\bar{\xi}^i) \tag{1}$$

($A_k^j \overset{\text{df}}{=} \dfrac{\partial \xi^j}{\partial \bar{\xi}^k}$, s. [1], S. 82), wo das Funktionensystem F_λ die Relationen

$$\begin{aligned} F_\lambda(k_\mu, Y_m^j X_k^m) &= F_\lambda[F_\mu(k_\nu, X_k^j), Y_k^j], \\ F_\lambda(k_\mu, \delta_k^j) &= k_\lambda \end{aligned} \tag{2}$$

für beliebige Werte X_k^j, Y_k^j, die der Bedingung

$$\det(X_k^j)\cdot\det(Y_k^j) \neq 0$$

genügen, erfüllen.

2. k_λ ist eine Funktion der Gestalt

$$k_\lambda = \varphi_\lambda(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i)\,. \tag{3}$$

3. Das folgende Funktionalgleichungssystem muss nach (1) und (3) bestehen:

$$F_\lambda[\varphi_\mu(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i), A_k^j] = \varphi_\lambda(\bar{u}_i, \bar{v}_i, \overline{\partial_k u_i}, \overline{\partial_k v_i})\,, \tag{4}$$

wo

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= A_i^j u_j\,, \quad & \overline{\partial_k u_i} &= A_i^j A_k^m \partial_m u_j + A_{ki}^j u_j\,, \\ \bar{v}_i &= A_i^j u_j\,, \quad & \overline{\partial_k v_i} &= A_i^j A_k^m \partial_m v_j + A_{ki}^j v_j\,, \end{aligned}$$

($A_{ki}^j \overset{\text{df}}{=} \dfrac{\partial^2 \xi^j}{\partial \bar{\xi}^k \partial \bar{\xi}^i}$, s. [1], S. 82).

An dieser Stelle sei bemerkt, dass das Funktionalgleichungssystem (4) in einem Punkt P_0 des Raumes X_n, $n^2 + n\binom{n+1}{2}$ unabhängige Parameter A_k^j, A_{ki}^j hat, die den Relationen

$$\mathfrak{J} \overset{\text{df}}{=} \det(A_k^j) \neq 0\,, \qquad A_{ki}^j = A_{ik}^j \tag{5}$$

genügen.

4. Die Vektorfelder u_i und v_i sind voraussetzungsgemäss linear unabhängig, folglich ist im Punkt P_0 der Rang der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} u_1 \dots u_n \\ v_1 \dots v_n \end{pmatrix}$$

gleich 2, d.h. es existiert eine von Null verschiedene zweireihige Determinante

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix} \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$$

der Matrix M. $\Delta_{i,j} \neq 0$ folgt $v_i^2+v_j^2 > 0$, z.B. sei $v_j \neq 0$. Wenn $j > 2$ ist, so werden sich die Komponenten der Vektoren $u_i = u_i(P_0)$, $v_i = v_i(P_0)$ im Falle einer zulässigen Koordinatentransformation vom Typus

$$\xi^k = \xi^k(\bar{\xi}^m)\,, \qquad \text{Matrix } \left(A_m^k(P_0)\right) = E_{1j}$$

(mit E_{ik} bezeichnen wir die Matrix, die durch Vertauschung der i-ten und der k-ten Zeile in der Einheitsmatrix entsteht) nach

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{j-1}, \bar{u}_j, \bar{u}_{j+1}, \ldots, \bar{u}_n) = (u_j, u_2, \ldots, u_{j-1}, u_1, u_{j+1}, \ldots, u_n)\,,$$
$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_j, \bar{v}_{j+i}, \ldots, \bar{v}_n) = (v_j, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_1, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

transformieren. Wenn k nach

$$\bar{u}_k = u_i\,, \qquad \bar{v}_k = v_i \qquad (2 \leqslant k \leqslant n)$$

definiert ist, so können wir durch eine zulässige Koordinatentransformation vom Typus

$$\bar{\bar{\xi}}^m = \bar{\xi}^m(\bar{\bar{\xi}}^p)\,, \qquad \text{Matrix } \left(\frac{\partial \bar{\xi}^m}{\partial \bar{\bar{\xi}}^p}(P_0)\right) = E_{2k}$$

im Punkt P_0 die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\bar{\bar{v}}_1 \neq 0\,, \qquad \bar{\bar{\Delta}} \overset{\mathrm{df}}{=} \bar{\bar{u}}_1\bar{\bar{v}}_2 - \bar{\bar{u}}_2\bar{\bar{v}}_1 \neq 0$$

erreichen. Folglich kann man in einer Umgebung des Punktes P_0 ein solches Koordinatensystem wählen, in welchem die Relationen

$$v_1 = v_1(P_0) \neq 0\,, \qquad \Delta = u_1(P_0)v_2(P_0) - u_2(P_0)v_1(P_0) \neq 0 \tag{6}$$

gelten.

In Übereinstimmung mit den Relationen (5) und Voraussetzungen (6) setzen wir in (4) die Werte

$$A_k^j = \delta_k^j\,, \qquad \begin{array}{ll} A_{ki}^1 = -\dfrac{1}{v_1}\partial_{(k}v_{i)} & (i, k = 1, \ldots, n)\,, \\ A_{ki}^j = 0 & (j = 2, \ldots, n) \end{array}$$

ein; so erhalten wir aus (4) mit Berücksichtigung von (2) wegen

$$F_\lambda[\varphi_\mu(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i), \delta_k^j] = \varphi_\lambda(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i)$$

die Relationen

$$\varphi_\lambda(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i) = \varphi_\lambda\left[u_i, v_i, \frac{1}{v_1}(v_1\partial_{(k}u_{i)} - u_1\partial_{(k}v_{i)}) + U_{ki}, V_{ki}\right].$$

Diese Gestalt von φ_λ sei in (4) eigensetzt; dann wählen wir für A_k^j wieder die Werte $A_k^j = \delta_k^j$, so geht (4) in die Gleichungen

$$(7) \qquad \varphi_\lambda(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i)$$
$$= \varphi_\lambda\left[u_i, v_i, \frac{1}{v_1}\left(v_1\partial_{(k}u_{i)} - u_1\partial_{(k}v_{i)} + A_{ki}^m(u_m v_1 - u_1 v_m)\right) + U_{ki}, V_{ki}\right]$$

über.

Hier werden der Reihe nach die unabhängigen Parameter A_{ki}^j wie folgt eingesetzt:

$$A_{ki}^1 \quad \text{beliebig,} \qquad A_{ki}^2 = \frac{1}{\Delta}\left(v_1\partial_{(k}u_{i)} - u_1\partial_{(k}v_{i)}\right),$$
$$A_{ki}^m = 0 \qquad (m = 3, \ldots, n);$$

dann gelangen wir auf Grund von (7) zu den Relationen

$$\varphi_\lambda(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i) = \varphi_\lambda(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}),$$

die nach (3) zeigen, dass das Objekt k_λ tatsächlich eine algebraische Komitante der Grössen u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki} ist, w.z.b.w.

Beweis des Satzes 2.

Wegen des Satzes 1 ist das Vektorfeld k_j eine algebraische Komitante der Vektoren u_i, v_i und der Tensoren U_{ki}, V_{ki}

$$k_j = \varphi_j(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}) \qquad (j = 1, 2).$$

Die Tensoren U_{ki}, V_{ki} sind schiefsymmetrisch und wegen $n = 2$ haben sie die Form

$$(U_{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{pmatrix}, \qquad (V_{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & V \\ -V & 0 \end{pmatrix} \qquad (U \overset{\mathrm{df}}{=} U_{12}, V \overset{\mathrm{df}}{=} V_{12}).$$

Es seien die Parameter A_k^j kurz wie folgt bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \qquad (\mathfrak{J} = AD - BC).$$

Wegen des Transformationsgesetzes der kovarianten Vektoren

$$(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = (t_1, t_2)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

bzw. der kovarianten Tensoren zweiter Stufe

$$(\bar{T}_{jk}) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}(T_{jk})\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

folgen die Transformationsformeln

$$(8) \qquad \bar{\Delta} = \mathfrak{J}\Delta, \qquad \bar{U} = \mathfrak{J}U, \qquad \bar{V} = \mathfrak{J}V;$$

die Grössen Δ, U, V erweisen sich daher als gewöhnliche Dichten vom Gewichte -1. Folglich sind

$$\varrho_1 = 2\frac{U}{\Delta}, \qquad \varrho_2 = 2\frac{V}{\Delta}$$

Skalarfelder.

Das Funktionalgleichungssystem (4) lautet in unserem Fall folgendermassen:

$$(9) \qquad A_j^m \varphi_m(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}) \\ = \varphi_j(A_i^m u_m, A_i^m v_m, A_k^j A_i^m U_{jm}, A_k^j A_i^m V_{jm}) \qquad (j = 1, 2).$$

Setzen wir in (9) jetzt

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} v_1 & -u_2 \\ -v_1 & u_1 \end{pmatrix}$$

ein, so folgen nach

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta},$$

bzw. nach den Transformationsformeln (8) die Gleichungen

$$\frac{1}{\Delta} v_2 \varphi_1(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}) - \frac{1}{\Delta} v_1 \varphi_2(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}) = a_1(\varrho_1, \varrho_2),$$

$$-\frac{1}{\Delta} u_2 \varphi_1(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}) + \frac{1}{\Delta} u_1 \varphi_2(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}) = a_2(\varrho_1, \varrho_2),$$

mit

$$a_j(\varrho_1, \varrho_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi_j\left(1, 0, 0, 1, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varrho_1 \\ -\frac{1}{2}\varrho_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\varrho_2 \\ -\frac{1}{2}\varrho_2 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

woraus

$$\varphi_j(u_i, v_i, U_{ki}, V_{ki}) = a_1(\varrho_1, \varrho_2) u_j + a_2(\varrho_1, \varrho_2) v_j$$

folgt, w.z.b.w.

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb, *Über Differentialkomitanten erster Ordnung II*, Ann. Polon. Math. 20 (1968), S. 81-89.

[2] S. Topa, *Determination of differential concomitants of the first class of a pair of covariant vectors in a two-dimensional space*, ibidem 19 (1967), S. 337-341.

Reçu par la Rédaction le 18. 8. 1968