ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVII (1980)

О монотонных решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений

Т. А. Чантурия (Тбилиси)

Резюме. Устанавливаются достаточные условия существования монотонного решения, удовлетворяющего некоторому начальному условию, системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей статье исследуется задача о существовании решения $\xi = (x_1, \ldots, x_n)\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}^n$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi), \tag{1}$$

удовлетворяющего условиям

$$\sum_{i=1}^{m}{}' x_i(0) = x_0, \quad x_i(t) \geqslant 0, \quad x_i'(t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{R}_+ = [0, +\infty)$, $m \in \{1, \ldots, n\}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$.

Частные случаи этой задачи изучались многими авторами. По этому поводу см. [2], [3], а также [4].

Доказанные в работе теоремы обобщают результаты из [4].

Ниже везде предполагается, что

$$f_i(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 1, \ldots, n)$$

и что функция f удовлетворяет локальным условиям Каратеодори, т.е. $f(\cdot, \xi)$ измерима на каждом конечном отрезке промежутка $\boldsymbol{R}_+$ при любом $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, $f(t, \cdot)$ непрерывна в $\boldsymbol{R}^n$ при почти всех $t \in \boldsymbol{R}_+$ и для любого $\varrho \in (0, +\infty)$

$$\sup\{\|f(\cdot, \xi)\|\colon \|\xi\| \leqslant \varrho\} \in L(0, \varrho).$$

Теорема 1. *Пусть для некоторых a, $r \in (0, +\infty)$ и $l \in \{m+1, \ldots, n\}$ в области*

$$t \in \boldsymbol{R}_+, \quad x_k \in [0, r] \quad (k = 1, \ldots, m), \quad x_k \in \boldsymbol{R}_+ \quad (k = m+1, \ldots, n) \tag{3}$$

выполняются условия

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

а в области

$$t \in [0, a], \quad x_k \in [0, r] \quad (k = 1, \ldots, m), \quad x_k \in \boldsymbol{R}_+ \quad (k = m+1, \ldots, n) \tag{5}$$

— *условия*

$$-\sum_{i=1}^{m} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \varphi_m(t, x_{m+1}), \tag{6}$$

$$-f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \varphi_i(t, x_{i+1}) \quad (i = m+1, \ldots, n-1), \tag{7}$$

$$-f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \psi_i(t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad (i = m+1, \ldots, l-1), \tag{8}$$

$$-\sum_{i=l}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \psi(t)\omega\Big(\sum_{i=l}^{n} x_i\Big), \tag{9}$$

где функции $\varphi_i\colon [0, a]\times\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{R}_+$ $(i = m, \ldots, n-1)$ *удовлетворяют локальным условиям Каратеодори, не убывают по второму аргументу,*

$$\liminf_{x\to+\infty} \int_0^a \varphi_m(t, x)\,dt > r, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_i(t, x)\,dt = +\infty \quad (i = m+1, \ldots, n-1) \tag{11}$$

при любых $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant a$, *функции* $\psi_i\colon [0, a]\times\boldsymbol{R}_+^{n-i}\to\boldsymbol{R}_+$ $(i = m+1, \ldots$ $\ldots, l-1)$ *также удовлетворяют локальным условиям Каратеодори, не убывают по последним* $n-i$ *аргументам,* $\psi\colon [0, a]\to\boldsymbol{R}_+$ *суммируемая функция,* $\omega\colon R_+\to(0, +\infty)$ *непрерывна, не убывает и*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\omega(x)} = +\infty. \tag{12}$$

Тогда для любого $x_0 \in [0, r]$ *задача* (1), (2) *разрешима.*

Замечание. Если $m = n$, то условия (6)-(12) отпадают, а если $m+1 = l$, то отпадают условия (7), (8).

Сперва докажем следующую лемму.

Лемма. *Если соблюдается условие*

$$0 \leqslant -f_i(t, \xi) \leqslant f_0(t) \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ \xi \in \boldsymbol{R}^n \ (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

где $f_0 \in L(0, \varrho)$ *при любом* $\varrho \in (0, +\infty)$, *то для любого* $x_0 \in \boldsymbol{R}_+$ *задача* (1), (2) *разрешима.*

Доказательство. Будем считать, что $x_0 > 0$, ибо при $x_0 = 0$ задача (1), (2) имеет тривиальное решение. Пусть $\gamma \in [0, x_0]$ и j произвольное натуральное число. Для системы (1) рассмотрим следущую задачу Коши

$$x_i(j) = \gamma \quad (i = 1, \dots, n). \tag{14}$$

Из (13) следует, что каждое решение этой задачи может быть продолжено на промежуток $[0, j]$ и

$$x_i(t) \geqslant \gamma, \quad x_i'(t) \leqslant 0 \quad \text{при } t \in [0, j] \ (i = 1, \dots, n).$$

При этом, если $\gamma = 0$, то задача (1), (14) имеет тривиальное решение, а если $\gamma = x_0$, то она имеет решение удовлетворяющее неравенству $\sum_{i=1}^{m} x_i(0) > x_0$. Поэтому, согласно теореме Кнезера–Хукухара (см. [1]) существует такое $\gamma \in [0, x_0]$, что решение задачи (1), (14) $\xi_j = (x_{1j}, \dots$ $\dots, x_{nj})$ будет удовлетворять условиям

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(0) = x_0, \quad x_{ij}(t) \geqslant 0, \quad x_{ij}'(t) \leqslant 0 \quad \text{при } t \in [0, j] \ (i = 1, \dots, n).$$

Отсюда и из (13) следует, что последовательность $\{\xi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на каждом конечном отрезке промежутка $\boldsymbol{R}_+$. Следовательно, учитывая лемму Арцела–Асколи, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{\xi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на каждом сегменте содержащемся в $\boldsymbol{R}_+$. Обозначим

$$\lim_{j \to +\infty} \xi_j = \xi.$$

Тогда очевидно, что ξ будет решением задачи (1), (2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Если $m \in \{1, \dots, n-1\}$, то из условий (10), (11) следует существование чисел ϱ_i и a_i $(i = m, \dots, n)$ таких, что

$$r = \varrho_m \leqslant \varrho_{m+1} \leqslant \dots \leqslant \varrho_n, \quad 0 = a_m < a_{m+1} < \dots < a_n = a \tag{15}$$

и

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi_i(t, \varrho_{i+1}) dt > \varrho_i \quad (i = m, \dots, n-1). \tag{16}$$

Тогда положим

$$\varrho_n^* = \Omega_0^{-1}\Big(\Omega_0(n\varrho_n) + \int_0^a \psi(\tau) d\tau\Big), \quad \varrho_i^* = \varrho_n^* \quad (i = n, \dots, l),$$

$$\varrho_i^* = \varrho_i + \int_0^a \varphi_i(t, \varrho_{i+1}^*, \dots, \varrho_n^*) dt \quad \text{если } l \neq m+1 \quad (i = l-1, \dots, m+1),$$

где Ω_0: $\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ определяется равенством

$$\Omega_0(x) = \int_0^x \frac{dy}{\omega(y)},$$

а Ω_0^{-1} функция обратная к Ω_0.

Пусть теперь $m \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\varrho_m^* = r$$

и

$$\varrho = \max\{\varrho_m^*, \ldots, \varrho_n^*\}.$$

Введём функции χ: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_+$ и f^*: $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ следующим образом

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \in [0, \varrho], \\ \varrho & \text{при } x > \varrho, \end{cases} \tag{17}$$

$$f^*(t, x_1, \ldots, x_n) = f\big(t, \chi(x_1), \ldots, \chi(x_n)\big). \tag{18}$$

Очевидно, что

$$f_i^*(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 1, \ldots, n),$$

$$0 \leqslant -f_i^*(t, \xi) \leqslant f_0(t) \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ \xi \in \boldsymbol{R}^n \ (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$f_0(t) = \sup\{\|f(t, \xi)\|:\ x_k \in [0, \varrho] \ (k = 1, \ldots, n)\}.$$

Поэтому, согласно лемме, система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = f^*(t, \xi) \tag{19}$$

имеет решение ξ, удовлетворяющее условию (2).

В силу (17) и (18) для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$x_i(t) \leqslant \varrho \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 1, \ldots, n). \tag{20}$$

Если $m = n$, то это очевидно. Поэтому дальше будем считать, что $m \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Допустим, что $x_{m+1}(a_{m+1}) \geqslant \varrho_{m+1}$; тогда

$$\chi\big(x_{m+1}(t)\big) \geqslant \varrho_{m+1} \quad \text{при } t \in [0, a_{m+1}]$$

и согласно (6), (15), (17) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{m} x_i(0) = \sum_{i=1}^{m} x_i(a_{m+1}) - \int_0^{a_{m+1}} \sum_{i=1}^{m} f_i\big(t, \xi(t)\big)\,dt \geqslant \int_0^{a_{m+1}} \varphi_m(t, \varrho_{m+1})\,dt > r.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$x_{m+1}(a_{m+1}) < \varrho_{m+1}.$$

Аналогично получим, что

(21) $$x_i(a_i) < \varrho_i \quad (i = m+1, \ldots, n).$$

Теперь докажем, что в промежутке $[0, a]$ соблюдается неравенство

(22) $$\sum_{i=l}^{n} x_i(t) < \Omega_0^{-1}\Big(\Omega_0(n\varrho_n) + \int_t^a \psi(\tau)\,d\tau\Big).$$

Действительно, в противном случае, ввиду (21), существует число $t_0 \in [0, a)$ такое, что в промежутке $(t_0, a]$ соблюдается неравенство (22) и

(23) $$\sum_{i=l}^{n} x_i(t_0) = \Omega_0^{-1}\Big(\Omega_0(n\varrho_n) + \int_{t_0}^a \psi(\tau)\,d\tau\Big).$$

Кроме того, так как

$$\Omega_0^{-1}\Big(\Omega_0(n\varrho_n) + \int_0^a \psi(\tau)\,d\tau\Big) \leqslant \varrho,$$

то, в силу (17),

$$\chi\Big(\sum_{i=l}^{n} x_i(t)\Big) = \sum_{i=l}^{n} x_i(t) \quad \text{при } t \in [t_0, a]$$

и поэтому из (9) и (18) получим

$$-\sum_{i=l}^{n} x_i'(t) \leqslant \psi(t)\,\omega\Big(\sum_{i=l}^{n} x_i(t)\Big) \quad \text{при } t \in [t_0, a].$$

Отсюда легко следует, что

$$\Omega_0\Big(\sum_{i=l}^{n} x_i(t_0)\Big) - \Omega_0\Big(\sum_{i=l}^{n} x_i(a)\Big) \leqslant \int_{t_0}^a \psi(\tau)\,d\tau.$$

Но тогда учитывая (22), будем иметь

$$\Omega_0(n\varrho_n) \leqslant \Omega_0\Big(\sum_{i=l}^{n} x_i(a)\Big).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=l}^{n} x_i(a) \geqslant n\varrho_n,$$

что противоречит неравенствам (21). Таким образом, неравенство (22) соблюдается в промежутке $[0, a]$. Из (22) в частности следует, что

$$\sum_{i=l}^{n} x_i(0) < \varrho_n^*. \tag{24}$$

Поэтому, если $l = m+1$, то ясно, что соблюдается (20).

Если же $l \neq m+1$, то в силу (8), (18), (21) и (24) будем иметь

$$x_{l-1}(0) \leqslant x_{l-1}(a) + \int_0^a \varphi_{l-1}\big(t, \chi(x_l(t)), \ldots, \chi(x_n(t))\big)dt$$

$$\leqslant \varrho_{l-1} + \int_0^a \varphi_{l-1}(t, \varrho_l^*, \ldots, \varrho_n^*)dt = \varrho_{l-1}^*.$$

Аналогично покажем, что

$$x_i(0) \leqslant \varrho_i^* \quad (i = m+1, \ldots, l-1).$$

Следовательно и в этом случае соблюдаются неравенства (20). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть при $l = n$ соблюдаются все условия теоремы* 1, *кроме* (10) *и* (12), *и*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\omega(x)} < +\infty,$$

$$\int_0^a \psi(t)\,dt < \Omega_\infty(0), \qquad \int_0^a \varphi_m^*(t, 0)\,dt > r, \tag{25}$$

где Ω_∞: $\boldsymbol{R}_+ \to (0, +\infty)$ определяется равенством

$$\Omega_\infty(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dy}{\omega(y)},$$

Ω_∞^{-1} функция обратная к Ω_∞, а φ_m^*: $(0, a] \times [0, \Omega_\infty(0) - \int_0^a \psi(\tau)d\tau] \to \boldsymbol{R}_+$ определяется соотношениями

$$\varphi_{n-1}^*(t, x) = \varphi_{n-1}\Big(t, \Omega_\infty^{-1}\Big(x + \int_0^t \psi(\tau)d\tau\Big)\Big),$$

$$\varphi_i^*(t, x) = \varphi_i\Big(t, \int_t^a \varphi_{i+1}^*(\tau, x)d\tau\Big) \quad (i = m, \ldots, n-2).$$

Тогда для любого $x_0 \in [0, r]$ задача (1), (2) *разрешима.*

Доказательство. Если $m = n$, то теоремы 1 и 2 совпадают. Поэтому будем считать, что $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Согласно (25) найдётся такое число ε, что

$$\varepsilon \in \Big(0,\, \Omega_\infty(0) - \int\limits_0^a \psi(t)\,dt\Big) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^a \varphi_m^*(t,\varepsilon)\,dt > r. \tag{26}$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^a \varphi_m(t, x)\,dt \geqslant \int\limits_0^a \varphi_m^*(t,\varepsilon)\,dt > r,$$

т.е. соблюдается условие (10).

Определим функцию χ равенством (17), где $\varrho = \Omega_\infty^{-1}(\varepsilon)$, а функцию f^* — следующим образом

$$\begin{aligned} f_i^*(t, x_1, \ldots, x_n) &= f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n-1),\\ f_n^*(t, x_1, \ldots, x_n) &= f_n\big(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, \chi(x_n)\big). \end{aligned} \tag{27}$$

Тогда, очевидно, что в области (5) соблюдается неравенство

$$-f_n^*(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \psi(t)\,\omega(\varrho) = \psi^*(t).$$

Следовательно, для уравнения (19) соблюдаются все условия теоремы 1 и поэтому для любого $x_0 \in [0, r]$ задача (19), (2) разрешима. Пусть ξ является решением этой задачи.

Если допустим, что

$$x_n(t) \geqslant \Omega_\infty^{-1}\Big(\varepsilon + \int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau\Big) \quad \text{при } t \in [0, a],$$

тогда согласно (7) будем иметь

$$x_{n-1}(t) \geqslant x_{n-1}(a) + \int\limits_t^a \varphi_{n-1}\big(\tau, x_n(\tau)\big)\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_t^a \varphi_{n-1}\Big(\tau,\, \Omega_\infty^{-1}\Big(\varepsilon + \int\limits_0^\tau \psi(s)\,ds\Big)\Big)\,d\tau = \int\limits_t^a \varphi_{n-1}^*(\tau, \varepsilon)\,d\tau \quad \text{при } t \in [0, a].$$

Аналогично покажем, что

$$x_i(t) \geqslant \int\limits_t^a \varphi_i^*(\tau, \varepsilon)\,d\tau \quad \text{при } t \in [0, a] \ (i = m+1, \ldots, n-1).$$

Поэтому, в силу (6) и (26), получим

$$\sum_{i=1}^m x_i(0) \geqslant \int\limits_0^a \varphi_m\big(t, x_{m+1}(t)\big)\,dt \geqslant \int\limits_0^a \varphi_m^*(t, \varepsilon)\,dt > r,$$

что невозможно. Таким образом, существует число $t_0 \in [0, a]$ такое, что

$$x_n(t_0) < \Omega_\infty^{-1}\Big(\varepsilon + \int\limits_0^{t_0} \psi(\tau)\,d\tau\Big). \tag{28}$$

Покажем, что если $t_0 > 0$, то в промежутке $[0, t_0]$ соблюдается неравенство

$$(29) \qquad x_n(t) < \Omega_\infty^{-1}\Big(\varepsilon + \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\Big).$$

Действительно, в противном случае будет существовать число $t_1 \in [0, t_0)$ такое, что

$$(30) \qquad x_n(t_1) = \Omega_\infty^{-1}\Big(\varepsilon + \int_0^{t_1} \psi(\tau)\,d\tau\Big),$$

а в промежутке $(t_1, t_0]$ будет соблюдатся неравенство (29). Так как

$$\Omega_\infty^{-1}\Big(\varepsilon + \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\Big) \leqslant \varrho \quad \text{при } t \in [0, a],$$

то

$$\chi(x_n(t)) = x_n(t) \quad \text{при } t \in (t_1, t_0].$$

Поэтому, согласно (9), (27) и того, что $l = n$, будем иметь

$$-x_n'(t) \leqslant \psi(t)\,\omega(x_n(t)) \quad \text{при } t \in [t_1, t_0].$$

Отсюда легко получаем

$$\Omega_\infty(x_n(t_0)) - \Omega_\infty(x_n(t_1)) \leqslant \int_{t_1}^{t_0} \psi(t)\,dt.$$

Но, тогда, в силу (30), имеем

$$\Omega_\infty(x_n(t_0)) \leqslant \varepsilon + \int_0^{t_0} \psi(t)\,dt,$$

что противоречит неравенству (28). Полученное противоречие доказывает, что если $t_0 > 0$, то неравенство (29) соблюдается в промежутке $[0, t_0]$. Ввиду (28) и (29), независимо от того $t_0 = 0$ или $t_0 > 0$, имеем $x_n(0) < \varrho$, т.е.

$$x_n(t) < \varrho \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+.$$

Следовательно, в силу (17) и (27) ξ будет решением задачи (1), (2). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ и для некоторых положительных чисел a и r соблюдаются условия*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0 \quad \textit{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ x_1, \ldots, x_n \in [0, r] \ (i = 1, \ldots, n),$$

$$(31) \qquad -\sum_{i=1}^m f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \varphi_m(t, x_{m+1}),$$

$$-f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \varphi_i(t_i, x_{i+1}) \quad (i = m+1, \ldots, n-1)$$

$$\textit{при } t \in [0, a],\ x_1, \ldots, x_n \in [0, r],$$

где функции φ_i: $[0, a]\times[0, r]\to\boldsymbol{R}_+$ $(i = m, \dots, n-1)$ *удовлетворяют условиям Каратеодори, не убывают по второму аргументу и для любых* $0\leqslant \alpha<\beta\leqslant a$ *и* $x\in(0, r]$

$$\text{(32)}\qquad \int_0^\beta \varphi_m(t, x)\,dt>0,\qquad \int_\alpha^\beta \varphi_i(t, x)\,dt>0\qquad (i = m+1, \dots, n-1).$$

Тогда существует число $r_0\in(0, r]$ *такое, что для любого* $x_0\in[0, r_0]$ *задача* (1), (2) *разрешима.*

Доказательство. Пусть

$$\text{(33)}\qquad f_0(t) = \sup\{\|f(t, \xi)\|:\ x_i\in[0, r]\ (i = 1, \dots, n)\}$$

и $a_n\in(0, a]$ такое, что

$$\varepsilon_n = r-\int_0^{a_n} f_0(t)\,dt>0.$$

Из условия (32) следует существование чисел ε_i и a_i $(i = m, \dots, n)$ таких, что

$$0<\varepsilon_m\leqslant\varepsilon_{m+1}\leqslant\dots\leqslant\varepsilon_n,\qquad 0 = a_m<a_{m+1}<\dots<a_n$$

и

$$\text{(34)}\qquad \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi_i(t, \varepsilon_{i+1})\,dt\geqslant\varepsilon_i\qquad (i = m, \dots, n-1).$$

Положим

$$\text{(35)}\qquad r_0\in(0, \varepsilon_m)\cap(0, r].$$

Докажем, что для любого $x_0\in(0, r_0]$ задача (1), (2) разрешима. Рассмотрим функции

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0,\\ x & \text{при } x\in[0, r],\\ r & \text{при } x>r,\end{cases}$$

$$\text{(36)}\qquad f^*(t, x_1, \dots, x_n) = f\big(t, \chi(x_1), \dots, \chi(x_n)\big).$$

Ясно, что

$$f_i^*(t, 0, \dots, 0) = 0\quad \text{при } t\in\boldsymbol{R}_+\ (i = 1, \dots, n),$$

$$\text{(37)}\qquad 0\leqslant -f_i^*(t, \xi)\leqslant f_0(t)\quad \text{при } t\in\boldsymbol{R}_+,\ \xi\in\boldsymbol{R}^n\ (i = 1, \dots, n),$$

где f_0 определяется равенством (33). Поэтому, согласно лемме, для любого $x_0\in(0, r_0]$ задача (19), (2) разрешима. Пусть ξ решение этой задачи.

Если допустим, что

$$x_{m+1}(t)\geqslant\varepsilon_{m+1}\quad \text{при } t\in[0, a_{m+1}],$$

то ввиду того, что $\varepsilon_{m+1} \leqslant \varepsilon_n < r$ будем иметь

$$\chi\big(x_{m+1}(t)\big) \geqslant \varepsilon_{m+1} \quad \text{при } t \in [0, a_{m+1}].$$

Но тогда из (31), (34)–(36) получим

$$\sum_{i=1}^{m} x_i(0) \geqslant \sum_{i=1}^{m} x_i(a_{m+1}) + \int_0^{a_{m+1}} \varphi_m(t, \varepsilon_{m+1})\,dt > r_0,$$

что невозможно. Следовательно,

$$x_{m+1}(a_{m+1}) < \varepsilon_{m+1}.$$

Аналогично докажем, что

$$x_i(a_i) < \varepsilon_i \quad (i = m+1, \ldots, n).$$

Отсюда, в силу (37), следует

$$x_i(0) \leqslant x_i(a_i) + \int_0^{a_i} f_0(t)\,dt < \varepsilon_n + \int_0^{a_n} f_0(t)\,dt = r \quad (i = m+1, \ldots, n).$$

Таким образом

$$0 \leqslant x_i(t) \leqslant r \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 1, \ldots, n)$$

и поэтому ясно, что $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ является решением задачи (1), (2). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим следующую задачу

$$u^{(n)} = f(t, u, \ldots, u^{(n-1)}), \tag{38}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} |u^{(i)}(0)| = u_0, \quad (-1)^i u^{(i)}(t) \geqslant 0 \quad \text{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \ (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{39}$$

где $m \in \{1, \ldots, n\}$, а $f\colon \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори.

Преобразованием

$$x_i = (-1)^{i-1} u^{(i-1)} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

задача (38), (39) сводится к задаче (1), (2), где

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) = -x_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$f_n(t, x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{n-1} f\big(t, x_1, \ldots, (-1)^{n-1} x_n\big).$$

Поэтому из теорем 1–3 легко вытекают следующие предложения. При $m = 1$ аналогичные теоремы доказаны в [2] (теоремы 13.1–13.3).

Теорема 4. *Пусть*

$$f(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad \textit{при } t \in \boldsymbol{R}_+ \tag{40}$$

и для некоторых $a, r \in (0, +\infty)$ *соблюдаются неравенства*

$$(41)\qquad (-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$$
$$\text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ (-1)^{k-1}x_k \in [0, r]\ (k = 1, \ldots, m),$$
$$(-1)^{k-1}x_k \in \boldsymbol{R}_+\ (k = m+1, \ldots, n),$$

$$(42)\qquad (-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \psi(t)\omega(|x_n|)\ (^1)$$
$$\text{при } t \in [0, a],\ (-1)^{k-1}x_k \in [0, r]\ (k = 1, \ldots, m),$$
$$(-1)^{k-1}x_k \in \boldsymbol{R}_+\ (k = m+1, \ldots, n),$$

где $\psi\colon [0, a] \to \boldsymbol{R}_+$ *суммируемая функция, а* $\omega\colon \boldsymbol{R}_+ \to (0, +\infty)$ *непрерывна, не убывает и удовлетворяет условию* (12). *Тогда для любого* $u_0 \in [0, r]$ *задача* (38), (39) *разрешима.*

Теорема 5. *Пусть* $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, *соблюдаются условия* (40)–(42), *где* $\psi\colon [0, a] \to \boldsymbol{R}_+$ *суммируемая функция, а* $\omega\colon \boldsymbol{R}_+ \to (0, +\infty)$ *непрерывна, не убывает и*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\omega(x)} < +\infty, \qquad \Omega(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dy}{\omega(y)},$$

$$\int_0^a \psi(t)\,dt < \Omega(0), \qquad \int_0^a t^{n-1-m}\Omega^{-1}\Big(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\Big)dt > (n-1-m)!\,r.$$

Тогда для любого $u_0 \in [0, r]$ *задача* (38), (39) *разрешима.*

Теорема 6. *Пусть имеет место* (40) *и для некоторого* $r \in (0, +\infty)$ *соблюдается неравенство*

$$(-1)^n f(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$$
$$\text{при } t \in \boldsymbol{R}_+,\ (-1)^{k-1}x_k \in [0, r]\ (k = 1, \ldots, n).$$

Тогда существует число $r_0 \in (0, r]$ *такое, что для любого* $u_0 \in [0, r_0]$ *задача* (38), (39) *разрешима.*

Литература

[1] M. Hukuhara, *Sur une généralisation d'un théorème de Kneser*, Proc. Japan Acad. 29 (1953), стр. 154–155.

[2] И. Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Издательство Тбилисского Университета, Тбилиси 1975.

(¹) Если $m = n$, то условие (42) отпадает.

[3] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ИЛ, Москва 1970.
[4] Т. А. Чантурия, *О задаче типа Кнезера для системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, Матем. заметки 15 (1974), стр. 897–906.

Reçu par la Rédaction le 30. 10. 1975