ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

L'existence et l'unicité des solutions du problème d'interpolation pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre n

par A. Lasota et Z. Opial (Kraków)

Pour un système d'équations différentielles ordinaires ou ce qui revient au même pour une équation différentielle vectorielle

$$X' = f(t, X) \tag{0.1}$$

dans l'espace euclidien à un nombre fini de dimensions le problème d'existence et d'unicité d'une solution $X(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$ admettant une valeur donnée $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ en un point donné t_0 (problème de Cauchy) a trouvé au cours de quelques dernières dizaines d'années une résolution à peu près complète. Cependant la généralisation la plus immédiate du problème de Cauchy connue sous le nom du problème linéaire général, et qui consiste à chercher une solution $X(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$ de l'équation (0.1) satisfaisant à un système d'équations linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i(t_j) = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{0.2}$$

et pour laquelle les questions d'existence et d'unicité diffèrent qualitativement des mêmes questions posées pour le problème initial, reste toujours bien loin d'être résolue de façon satisfaisante (voir par exemple le travail récent de R. Conti [6]). La situation est bien plus grave par ce que du point de vue d'applications c'est le problème linéaire et surtout quelques-uns de ses cas particuliers qui s'avèrent beaucoup plus importants que le problème de Cauchy. Il suffit de mentionner les problèmes aux limites pour les équations différentielles du second ordre posés par le calcul des variations, la physique mathématique et la technique.

Pour l'équation différentielle d'ordre n

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{0.3}$$

un cas particulier du problème linéaire général a été traité déjà vers la fin du siècle passé par O. Nicoletti [17]. Dans le problème de Nicoletti qu'on appelle aussi problème d'interpolation (M. Biernacki [3] et J. Mikusiński [16]) on cherche une solution $x(t)$ de l'équation (0.3) admettant en n points donnés $t_1, \ldots, t_n$ des valeurs données $r_1, \ldots, r_n$ ce qui réduit le système d'équations linéaires (0.2) au système suivant

$$x(t_1) = r_1, \quad \ldots, \quad x(t_n) = r_n, \quad a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b. \tag{0.4}$$

Par la méthode des approximations successives Nicoletti a démontré l'existence d'une solution au moins de ce problème pour les seconds membres de l'équation (0.3) lipschitziens et pour des intervalles (a, b) suffisamment petits. Ce problème d'existence a été repris vers 1930 de façon plus moderne par R. Caccioppoli [4] qui dans ses considérations utilisait des méthodes (le principe du point invariant des transformations continues) plus fines que la vieille bonne méthode de Picard. Plus tard, en suivant la voie indiquée par Caccioppoli, S. Cinquini [5], G. Zwirner [23], [24] et d'autres ont considérablement complété ses résultats. D'autres résultats complémentaires ont été récemment obtenus par O. Arama [1], [2], C. Foiaş, G. Gussi, V. Poenaru [7] et A. Levine [15]. M. Biernacki et J. Mikusiński dans les travaux cités ci-dessus s'occupaient d'un autre point de vue du même problème pour les équations linéaires.

La question de l'unicité des solutions du problème de Nicoletti pour les équations linéaires a été posée en 1929 par Ch. de la Vallée Poussin [21] (voir aussi G. Sansone [19], p. 183) de la façon suivante: étant donnée une suite arbitraire de n nombres positifs $L_0, \ldots, L_{n-1}$, on considère la classe L d'équations linéaires

$$x^{(n)} = p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)x + p(t) \tag{0.5}$$

à coefficients $p_0(t), \ldots, p_{n-1}(t), p(t)$ continus dans l'intervalle $\langle 0, +\infty)$ et bornés

$$|p_0(t)| \leqslant L_0, \quad \ldots, \quad |p_{n-1}(t)| \leqslant L_{n-1} \tag{0.6}$$

et on démande de déterminer la longueur maximale de l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ tel que pour toute équation de classe L le problème d'interpolation posé pour un système arbitraire de n points $(t_1, r_1), \ldots, (t_n, r_n)$ satisfaisant à l'unique condition $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant h$ admette au plus une solution. Le problème d'unicité ainsi posé a été résolu de façon définitive pour les équations linéaires du second ordre et de manière partielle pour les équations d'ordre supérieur. Dans le même travail de la Vallée Poussin a étendu ces résultats aux équations non-linéaires en démontrant que les évaluations de la longueur h qu'il a trouvées pour le problème (0.5) et (0.6) restent valables pour les équations (0.3) à second membre $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$ lipschitzien en $x_0, \ldots, x_{n-1}$ avec les constantes $L_0, \ldots, L_{n-1}$.

Le travail de Ch. de la Vallée Poussin a depuis servi de modèle et du point de départ de toutes les considérations ultérieures concernant l'unicité du problème de Nicoletti. Ses évaluations ont été améliorées de diverses manières par A. Levine [13], [14] (pour les équations d'ordre arbitraire), S. Zaidman [22] (pour les équations linéaires d'une forme particulière d'ordre arbitraire), A. Lasota [10] (pour les équations du troisième ordre) et d'autres. Pour les équations du second ordre, pour lesquelles les évaluations de de la Vallée Poussin sont les meilleures possibles mais assez compliquées, on en a trouvé des plus simples bien que moins précises (Ph. Hartman, A. Wintner [8], Z. Opial [18]).

Dans la présente note nous nous proposons de montrer comment, pour le problème de Nicoletti, les questions de l'existence et de l'unicité, envisagées jusqu'à présent séparément, se relient l'une à l'autre. Nos premiers résultats sur ce sujet ont été déjà exposés d'une façon un peu différente dans [12]. La présente note se compose de trois parties. Dans la première on énonce et on démontre le théorème général d'existence de solutions du problème d'interpolation (théorème 1), ainsi qu'un théorème concernant l'unicité (théorème 2). Dans la seconde on en tire quelques conséquences immédiates (théorèmes 3-7) et dans la troisième on y ajoute quelques remarques complémentaires (théorème 8).

Dans ce qui suit nous nous bornons à envisager les équations (0.3) aux seconds membres continus et les équations linéaires à coefficients continus, mais cette restriction n'a rien d'essentiel. Une extension de nos résultats aux équations plus générales et aux problèmes plus généraux que celui de Nicoletti est bien possible — voir à ce sujet A. Lasota [11].

1. Théorèmes généraux

1. Nous admettons une fois pour toutes que la fonction $f(t, x_0, \ldots, \ldots, x_{n-1})$, le second membre de l'équation différentielle (0.3), est définie et continue dans l'ensemble

$$D\colon\ a \leqslant t \leqslant b,\ -\infty < x_0 < +\infty,\ \ldots,\ -\infty < x_{n-1} < +\infty .$$

Dans le problème d'interpolation (0.3), (0.4) que nous allons considérer les points $t_1, \ldots, t_n$ de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ sont supposés distincts et fixes. Les nombres $r_1, \ldots, r_n$ sont arbitraires.

A côté de l'équation (0.3) nous allons envisager les équations linéaires homogènes

$$x^{(n)} = p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)x \tag{1.1}$$

à coefficients continus dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Il est évident que pour toute équation linéaire homogène (1.1) le problème d'interpolation homogène

$$x(t_1) = \ldots = x(t_n) = 0 \tag{1.2}$$

admet la solution $x(t) \equiv 0$.

Théorème 1. *Supposons que la fonction* $f(t, x_0, \dots, x_{n-1})$ *satisfasse dans l'ensemble* D *à l'inégalité*

$$|f(t, x_0, \dots, x_{n-1})| \leqslant M + \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)|x_i| \tag{1.3}$$

où M *est une constante non-négative et* $P_0(t), \dots, P_{n-1}(t)$ *sont des fonctions continues, non-négatives dans l'intervalle* $\langle a, b\rangle$. *S'il existe un* ε *positif tel que pour toute équation* (1.1) *à coefficients continus satisfaisant aux inégalités*

$$|p_i(t)| \leqslant P_i(t) + \varepsilon, \quad a \leqslant t \leqslant b;\ i = 0, \dots, n-1, \tag{1.4}$$

le problème homogène (1.2) *n'a que la solution* $x(t) \equiv 0$, *le problème d'interpolation* (0.3), (0.4) *admet au moins une solution définie dans tout l'intervalle* $\langle a, b\rangle$.

2. Avant de passer à la démonstration du théorème 1 nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme 1. *Soit* R *un nombre positif arbitraire. Dans les hypothèses du théorème* 1 *pour toute équation linéaire non homogène* (0.5) *à coefficients continus dans l'intervalle* $\langle a, b\rangle$ *et y satisfaisant aux inégalités*

$$|p_i(t)| \leqslant P_i(t), \quad |p(t)| \leqslant R, \quad a \leqslant t \leqslant b;\ i = 0, \dots, n-1, \tag{1.5}$$

le problème d'interpolation (0.4) *admet une et seulement une solution. Toutes ces solutions sont bornées en leur ensemble au sens de la norme*

$$\|x(t)\|_n = \sum_{i=0}^{n} \max_{\langle a,b\rangle} |x^{(i)}(t)|. \tag{1.6}$$

Démonstration. Soit

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) + \psi(t)$$

la solution générale de l'équation (0.5); les fonctions $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée. Les fonctions $p_0(t), \dots, p_{n-1}(t)$ qui satisfont, d'après l'hypothèse, aux inégalités (1.5), satisfont à plus forte raison aux inégalités (1.4). Donc, pour l'équation homogène (1.1) associée à (0.5) le problème homogène (1.2) n'admet que la solution identiquement nulle. Cela veut dire que le système d'équations linéaires

$$C_1\varphi_1(t_i) + \dots + C_n\varphi_n(t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

n'admet que la solution $C_1 = \dots = C_n = 0$. Le déterminant de ce système est donc différent de zéro et, par conséquent, le système d'équations

$$C_1\varphi_1(t_i) + \dots + C_n\varphi_n(t_i) + \psi(t_i) = r_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

a une et seulement une solution quels que soient les nombres $r_1, \dots, r_n$. La première partie du lemme se trouve ainsi démontrée.

Soit $w(t)$ le polynôme d'interpolation du degré au plus égal à $n-1$ tel que l'on ait $w(t_i) = r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Le changement de variables

$$y = x - w(t)$$

à chaque solution $x(t)$ du problème (0.5), (0.4) fait correspondre une solution $y(t)$ de l'équation

$$y^{(n)} = p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)y + q(t) \tag{1.7}$$

telle que

$$y(t_1) = \ldots = y(t_n) = 0\,. \tag{1.8}$$

On a la formule

$$q(t) = p_{n-1}(t)w^{(n-1)}(t) + \ldots + p_0(t)w(t) + p(t)$$

et, par conséquent, l'évaluation suivante

$$|q(t)| \leqslant R + \sum_{i=0}^{n-1} \max_{\langle a,b\rangle} \big(P_i(t)|w^{(i)}(t)|\big) \stackrel{\mathrm{df}}{=} Q\,.$$

Le polynôme $w(t)$ et, par suite, la constante Q, ne dépend pas des coefficients $p_0(t), \ldots, p_{n-1}(t), p(t)$. Il nous suffit donc de démontrer que pour toute équation (1.7) à coefficients continus satisfaisant aux inégalités

$$|p_i(t)| \leqslant P_i(t), \qquad |q(t)| \leqslant Q, \qquad a \leqslant t \leqslant b;\ i = 0, \ldots, n-1\,, \tag{1.9}$$

les solutions du problème homogène (1.8) sont toutes bornées au sens de la norme admise. A priori deux cas sont possibles.

1° Il existe un entier positif k tel que pour toute solution $y(t)$ de l'équation (1.7) satisfaisant aux conditions (1.8) on ait en un point t_0 de l'intervalle $\langle a, b\rangle$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |y^{(i)}(t_0)| \leqslant k\,. \tag{1.10}$$

2° Quel que soit l'entier k, il existe une équation (1.7) aux coefficients continus satisfaisant aux inégalités (1.9) pour laquelle le problème (1.8) admet une solution $y_k(t)$ telle que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |y_k^{(i)}(t)| \geqslant k \tag{1.11}$$

dans tout l'intervalle $\langle a, b\rangle$.

Si c'est le cas 1° qui a lieu, de l'équation (1.7) il résulte d'abord l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{n-1} |y^{(i+1)}(t)| \leqslant Q + K\sum_{i=0}^{n-1} |y^{(i)}(t)| \tag{1.12}$$

où

$$K = \max_i \max_{\langle a,b\rangle} \big(P_i(t)+1\big) .$$

Puis, en vertu des évaluations bien connues de E. Kamke ([9], p. 151) de (1.10) et (1.12) il vient

$$\sum_{i=0}^{n-1} |y^{(i)}(t)| \leqslant (k+Q)\exp K(b-a)$$

et enfin, en revenant à (1.12), on en tire une borne supérieure pour la somme

$$\sum_{i=0}^{n} |y^{(i)}(t)|$$

et la démonstration de la seconde partie du lemme est ainsi achevée.

Le cas 2° est impossible. En effet, posons

$$a(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{pour} \quad |x| \geqslant 1 , \\ x & \text{pour} \quad |x| \leqslant 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

et choisissons k suffisamment grand pour que l'on ait $Q < \varepsilon(k-n)$. Pour k ainsi choisi la fonction $y_k(t)$ satisfait à une équation de la forme (1.7) qui peut s'écrire comme suit

$$y_k^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(p_i(t)+\varepsilon_i(t)\big) y_k^{(i)}(t) \tag{1.14}$$

où on a posé

$$\varepsilon_i(t) = \frac{q(t)\,a\big(y_k^{(i)}(t)\big)}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} a\big(y^{(j)}(t)\big)\, y^{(j)}(t)} , \qquad i = 0, \ldots, n-1 .$$

Les fonctions $\varepsilon_i(t)$ sont continues (en vertu de l'inégalité (1.11) les fonctions $y_k(t), \ldots, y_k^{(n-1)}(t)$ ne peuvent pas s'annuler toutes en un point) et on a de façon évidente

$$|\varepsilon_i(t)| \leqslant Q\Big/\Big(\sum_{j=0}^{n-1} |y_k^{(j)}(t)| - n\Big) \leqslant Q/(k-n) < \varepsilon, \qquad a \leqslant t \leqslant b;\ i = 0, \ldots, n-1 .$$

Il en vient en raison de (1.9)

$$|p_i(t)+\varepsilon_i(t)| \leqslant P_i(t)+\varepsilon, \qquad a \leqslant t \leqslant b;\ i = 0, \ldots, n-1 .$$

La fonction $y_k(t)$ est donc une solution d'une équation homogène (1.14) à coefficients satisfaisant aux inégalités (1.4). Par hypothèse, $y_k(t)$ ne peut satisfaire aux égalités (1.8) sans s'annuler identiquement dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. On obtient ainsi une contradiction avec l'inégalité (1.11).

Le cas 2° est donc impossible et le lemme 1 se trouve complètement démontré.

3. Démonstration du théorème 1. La fonction $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$ peut s'écrire dans la forme suivante

$$(1.15)\qquad f(t, x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t, x_0, \ldots, x_{n-1})x_i + q(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$$

où on a posé

$$p_i(t, x_0, \ldots) = f(t, x_0, \ldots)\Big(M + \sum_{j=0}^{n-1} P_j(t)|x_j|\Big)^{-1} P_i(t)\,\alpha(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

$$q(t, x_0, \ldots) = f(t, x_0, \ldots)\Big(M + \sum_{j=0}^{n-1} P_j(t)|x_j|\Big)^{-1} \times$$

$$\times \Big(M + \sum_{j=0}^{n-1} \big(\beta(x_j) - \alpha(x_j)\big) P_j(t) x_j\Big).$$

La fonction $\alpha(x)$ est définie par les formules (1.13) et $\beta(x)$ est égal à $+1$ pour $x \geqslant 0$ et à -1 pour $x < 0$. L'égalité (1.15) est bien facile à vérifier par un calcul. Il est aussi aisé de démontrer que les fonctions $p_i(t, x_0, \ldots)$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ et $q(t, x_0, \ldots)$ sont continues dans l'ensemble D et qu'elles y satisfont aux inégalités

$$(1.16)\qquad |p_i(t, x_0, \ldots)| \leqslant P_i(t), \qquad |q(t, x_0, \ldots)| \leqslant M + \sum_{i=0}^{n-1} \max_{\langle a,b\rangle} P_i(t),$$
$$i = 0, \ldots, n-1.$$

Dans l'espace $C^{n-1}(a, b)$ de fonctions $x(t)$ $n-1$ fois continûment différentiables dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$, muni de la norme $\|x(t)\|_{n-1}$ (cf. la formule (1.6)), nous envisageons l'application

$$T\colon\ C^{n-1}(a, b) \to C^n(a, b)$$

qui à chaque fonction $x(t) \in C^{n-1}(a, b)$ fait correspondre la solution $z(t)$ de l'équation linéaire

$$z^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) z^{(i)} + q\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$$

satisfaisant aux conditions

$$z(t_1) = r_1, \qquad \ldots, \qquad z(t_n) = r_n.$$

Des inégalités (1.16) et du lemme 1 il résulte immédiatement que l'application T est définie dans tout l'espace $C^{n-1}(a, b)$ et qu'elle applique cet espace en un ensemble borné de l'espace $C^n(a, b)$, c'est-à-dire en un ensemble relativement compact dans l'espace $C^{n-1}(a,b)$. En plus, de l'identité (1.15) il vient que tout point invariant de cette application est une solution du problème d'interpolation (0.3), (0.4). Donc, pour achever la démonstration du théorème il suffit de faire recours au théorème bien connu de J. Schauder [20] et vérifier que l'application T est continue dans l'espace $C^{n-1}(a,b)$.

Soit $\{x_k(t)\}$ $(k=0,1,\ldots)$ une suite arbitraire d'éléments de l'espace $C^{n-1}(a,b)$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(i)}(t) = x_0^{(i)}(t), \qquad i=0,\ldots,n-1,$$

uniformément dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$. Soit $z_k(t) = Tx_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$. On a

$$z_k^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\big(t, x_k(t),\ldots\big) z_k^{(i)}(t) + q\big(t, x_k(t),\ldots\big), \qquad k=0,1,\ldots,$$

d'où il vient

$$z_k^{(n)}(t) - z_0^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\big(t, x_k(t),\ldots\big)\big(z_k^{(i)}(t) - z_0^{(i)}(t)\big) + \varepsilon_k(t), \qquad k=1,2,\ldots,$$

où

$$\varepsilon_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(p_i\big(t, x_k(t),\ldots\big) - p_i\big(t, x_0(t),\ldots\big)\Big) z_0^{(i)}(t) + $$
$$+ q\big(t, x_k(t),\ldots\big) - q\big(t, x_0(t),\ldots\big)$$

et de façon évidente

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k(t) = 0 \tag{1.17}$$

uniformément dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$.

Si pour un indice k la fonction $\varepsilon_k(t)$ s'annule identiquement dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$, il en est de même de la fonction $z_k(t)-z_0(t)$ car dans ce cas c'est la solution d'une équation homogène à coefficients satisfaisant aux inégalités (1.4) et s'annulant aux points $t_1,\ldots,t_n$. Si $\varepsilon_k(t)\not\equiv 0$, la fonction auxiliaire

$$u_k(t) = \big(z_k(t) - z_0(t)\big)/\max_{\langle a,b\rangle} |\varepsilon_k(t)|, \qquad k=1,2,\ldots,$$

est une solution de l'équation linéaire

$$u^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\big(t, x_k(t),\ldots\big) u^{(i)} + \varepsilon_k(t)/\max_{\langle a,b\rangle} |\varepsilon_k(t)|$$

à coefficients satisfaisant aux inégalités

$$\big|p_i\big(t, x_k(t),\ldots\big)\big| \leqslant P_i(t), \qquad \Big|\varepsilon_k(t)/\max_{\langle a,b\rangle}|\varepsilon_k(t)|\Big| \leqslant 1, \qquad i=0,\ldots,n-1.$$

En vertu du lemme 1 les normes $\|u_k(t)\|_n$ sont bornées dans leur ensemble. Donc, en raison de (1.17) on a

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k(t)-z_0(t)\|_n = \lim_{k\to\infty}\max_{\langle a,b\rangle}|\varepsilon_k(t)|\,\|u_k(t)\|_n = 0\,.$$

L'application T est donc continue et le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

4. Supposons que le second membre de l'équation (0.3), la fonction $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$, satisfasse dans l'ensemble D à la condition de Lipschitz

$$|f(t, x_0', \ldots, x_{n-1}')-f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)|x_i'-x_i| \tag{1.18}$$

à coefficients $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ continus et non-négatifs dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Il en résulte que la fonction $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$ remplit l'inégalité (1.3) car on a de façon évidente

$$\begin{aligned}|f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})| &\leqslant |f(t, 0, \ldots, 0)|+|f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})-f(t, 0, \ldots, 0)|\\ &\leqslant \max_{\langle a,b\rangle}|f(t, 0, \ldots, 0)|+\sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)|x_i|\,.\end{aligned}$$

Donc, à une équation dont le second membre est lipschitzien au sens de l'inégalité (1.18) on peut appliquer le théorème 1. Mais nous allons montrer que pour de telles équations on peut démontrer bien d'avantage: non seulement l'existence, mais aussi l'unicité de solutions du problème d'interpolation envisagé. On a notamment le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si la fonction* $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$ *satisfait dans l'ensemble D à la condition de Lipschitz* (1.18) *et s'il existe un* ε *positif tel que pour toute équation* (1.1) *à coefficients continus remplissant les inégalités* (1.4) *le problème homogène* (1.2) *n'a que la solution identiquement nulle, le problème d'interpolation* (0.3), (0.4) *admet une et seulement une solution définie dans l'intervalle* $\langle a, b\rangle$.

Démonstration. Comme nous avons déjà remarqué dans les hypothèses du théorème 2 l'existence d'une solution au moins du problème d'interpolation (0.3), (0.4) résulte immédiatement du théorème 1. C'est seulement l'unicité de cette solution qui reste à démontrer.

Soient $x_1(t), x_2(t)$ deux solutions de l'équation (0.3) satisfaisant aux conditions (0.4). Pour $u(t) = x_2(t)-x_1(t)$ de l'inégalité de Lipschitz (1.18) on tire l'inégalité

$$|u^{(n)}(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)|u^{(i)}(t)|\,. \tag{1.19}$$

En plus, on a

$$u(t_1) = \ldots = u(t_n) = 0\,.$$

Posons $u_k(t) = ku(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. En multipliant par k les deux membres de l'inégalité (1.19) on en tire la suite d'inégalités

$$(1.20)\qquad |u_k^{(n)}(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)|u_k^{(i)}(t)|\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Il est facile de vérifier que la dérivée $u_k^{(n)}(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$(1.21)\qquad u_k^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t)u_k^{(i)}(t) + q(t)$$

avec

$$p_i(t) = \frac{P_i(t)\,a\big(u_k^{(i)}(t)\big)}{1+\sum\limits_{j=0}^{n-1} P_j(t)|u_k^{(j)}(t)|}\, u_k^{(n)}(t)\,, \qquad i = 0, \ldots, n-1\,,$$

et

$$q(t) = \frac{u_k^{(n)}(t)}{1+\sum\limits_{j=0}^{n-1} P_j(t)|u_k^{(j)}(t)|}\Big(1+\sum_{j=0}^{n-1} P_j(t)\big(\beta\big(u_k^{(j)}(t)\big) - a\big(u_k^{(j)}(t)\big)\big)u_k^{(j)}(t)\Big)\,.$$

Dans ces formules la fonction $a(x)$ est définie par (1.13) et $\beta(x) = \operatorname{sgn} x$. Il est aisé de vérifier qu'en vertu de (1.20) on a les inégalités

$$|p_i(t)| \leqslant P_i(t)\,, \qquad |q(t)| \leqslant 1 + \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)\,, \qquad i = 0, \ldots, n-1\,.$$

Du lemme 1, de (1.21) et des conditions $u_k(t_1) = \ldots = u_k(t_n) = 0$ il résulte qu'il existe une constante N telle que

$$\sum_{i=0}^{n} |u_k^{(i)}(t)| \leqslant N\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{n} |u^{(i)}(t)| \leqslant N/k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,,$$

d'où il vient immédiatement que la fonction $u(t)$ est identiquement nulle dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$.

5. Il est à remarquer que la démonstration de l'unicité de solutions du problème d'interpolation que nous venons d'exposer dans le n° précédent se ramène à la démonstration du lemme suivant qui n'est pas sans intérêt pour lui-même:

LEMME 2. *Soit $x(t)$ une fonction de classe C^n dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ satisfaisant aux conditions $x(t_1) = \ldots = x(t_n) = 0$ $(a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b)$ et à l'inégalité différentielle linéaire d'ordre n*

$$|x^{(n)}(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)|x^{(i)}(t)|$$

à coefficients $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ continus et non-négatifs. S'il existe un ε positif tel que pour toute équation linéaire (1.1) *dont les coefficients satisfont aux inégalités* (1.4) *le problème homogène* (1.2) *n'ait que la solution identiquement nulle, la fonction $x(t)$ s'annule identiquement dans tout l'intervalle $\langle a, b\rangle$.*

2. Applications

1. Dans l'énoncé du théorème 1 le système de points $t_1, \ldots, t_n$ de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ est supposé fixé à l'avance. Il en est de même du système de fonctions $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$. Par contre, le système de valeurs $r_1, \ldots, r_n$ que la solution cherchée de l'équation (0.3) doit prendre aux points $t_1, \ldots, t_n$ a dû être fixé dans la démonstration du théorème (la borne supérieure des normes des solutions envisagées dans le lemme 1 dépend de façon essentielle des nombres $r_1, \ldots, r_n$), mais non pas dans son énoncé. Autrement dit, les points $t_1, \ldots, t_n$ étant fixés de manière à satisfaire aux hypothèses du théorème, les valeurs $r_1, \ldots, r_n$ peuvent varier de façon tout à fait arbitraire et, par conséquent, le théorème 1 assure l'existence d'une solution au moins non pas pour un problème d'interpolation fixé, mais pour toute une variété à n paramètres $r_1, \ldots, r_n$ de tels problèmes.

Par contre, les fonctions $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ étant données, la condition imposée aux points $t_1, \ldots, t_n$ de remplir les hypothèses du théorème 1 restreint considérablement le choix de ces points dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. On sait qu'un tel choix est toujours possible et même de l'infini de manières: tout système de points $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ remplit cette condition pourvu que la longueur de l'intervalle (t_1, t_n) soit suffisamment petite (ceci résulte immédiatement des évaluations de de la Vallée Poussin [21]; cf. aussi ci-dessous, théorème 3). Mais en dehors de cette situation simple la question du choix admissible des points $t_1, \ldots, t_n$ devient extrêmement délicate. Il suffit de dire que toutes les solutions connues de cette question sont d'une même forme, à savoir donnent des évaluations de la longueur des intervalles dans lesquels les points $t_1, \ldots, t_n$ peuvent varier de façon arbitraire et ne concernent, à de rares exceptions près, que le cas le plus simple où toutes les fonctions $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ sont supposées constantes. Depuis le premier travail de de la Vallée

Poussin sur ce sujet, mentionné dans l'introduction, la question de l'unicité du problème d'interpolation est toujours traitée de façon qui laisse de côté l'importante question du rôle que jouent dans ce problème les distances mutuelles des points $t_1, \ldots, t_n$, leur répartition etc.

C'est pour cette raison que toutes les applications du théorème 1 qu'on va exposer ici auront la même forme: on va prendre l'une après l'autre les conditions d'unicité connues qui déterminent, en fonction des $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ (supposées constantes pour la plupart de cas), la longueur h de l'intervalle dans lequel les points $t_1, \ldots, t_n$ peuvent varier arbitrairement et on va reformuler le théorème 1 en y remplaçant l'hypothèse de l'unicité de la solution identiquement nulle du problème homogène par l'hypothèse que la longueur de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ ne surpasse pas h.

2. En améliorant les résultats antérieurs de de la Vallée Poussin [21], A. Levine [13], [14] a démontré que pour l'équation différentielle linéaire homogène (1.1) à coefficients continus dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ toute solution du problème d'interpolation homogène (1.2) s'annule identiquement pourvu que l'on ait ou bien l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} \max_{\langle a,b\rangle} |p_{n-k}(t)| + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n n!} (b-a)^n \max_{\langle a,b\rangle} |p_0(t)| < 1 ,$$

ou bien l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{2^k k\left[\frac{k-1}{2}\right]!\left[\frac{k}{2}\right]!} \max_{\langle a,b\rangle} |p_{n-k}(t)| < 1 .$$

En rapprochant ce résultat de Levine aux théorèmes 1 et 2 on en tire immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si la fonction $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$ satisfait dans l'ensemble D à l'inégalité*

$$|f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})| \leqslant M + \sum_{i=0}^{n-1} P_i |x_i|$$

où les constantes non-négatives $h = b-a$, $P_0, \ldots, P_{n-1}$ satisfont à l'une des inégalités

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} P_{n-k} + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n n!} h^n P_0 < 1 , \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{2^k k\left[\frac{k-1}{2}\right]!\left[\frac{k}{2}\right]!} P_{n-k} < 1 , \tag{2.2}$$

pour toute suite de points $(t_1, r_1), \ldots, (t_n, r_n)$ $(a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b)$ *le problème d'interpolation* (0.3), (0.4) *admet au moins une solution définie dans tout l'intervalle* $\langle a, b\rangle$.

Si la fonction $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$ *satisfait à la condition de Lipschitz*

$$|f(t, x_0', \ldots, x_{n-1}') - f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} P_i |x_i' - x_i|,$$

cette solution est unique.

En effet, pour la démonstration on n'a qu'à poser dans le théorème 1 $P_i(t) = P_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ et constater que les inégalités (2.1), (2.2) subsistent lorsqu'on y remplace les constantes $P_0, \ldots, P_{n-1}$ par $P_0 + \varepsilon, \ldots$, $\ldots, P_{n-1} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ pourvu que ε soit suffisamment petit. La seconde partie du théorème résulte immédiatement du théorème 2.

3. Dans certains cas une évaluation plus précise de la longueur de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ dans lequel tout problème d'interpolation admet au moins une solution peut être tirée du théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Si la fonction* $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$ *satisfait dans l'ensemble* D *à l'inégalité*

$$|f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})| \leqslant M + \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t)|x_i|$$

avec les fonctions continues $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ *remplissant l'inégalité*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (k\beta_k + 1)^{-1/\beta_k} (b-a)^{k+1/\beta_k} \|P_{n-k-1}(t)\|_{a_k} < 1 \tag{2.3}$$

où $a_1, \ldots, a_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *sont des nombres positifs et*

$$1/a_k + 1/\beta_k = 1, \quad \|P(t)\|_a = \Big(\int_a^b |P(t)|^a dt\Big)^{1/a}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

pour toute suite de points $(t_1, r_1), \ldots, (t_n, r_n)$ $(a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b)$ *le problème d'interpolation* (0.3), (0.4) *admet au moins une solution définie dans tout l'intervalle* $\langle a, b\rangle$.

De même que dans la démonstration du théorème précédent on constate facilement qu'il est possible d'ajouter à chaque coefficient $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ une constante positive ε sans changer l'inégalité (2.3). Cela étant, le théorème 4 résulte du théorème 1 et d'un théorème de A. Levine [13], qui assure l'unicité de solutions du problème homogène (1.2) pour toute équation homogène (1.1) dont les coefficients satisfont à l'inégalité (2.3).

Notons qu'une application immédiate du théorème 2 donnerait, de même que dans le cas précédent, une condition suffisante de l'unicité de solutions du problème d'interpolation (0.3), (0.4).

4. A une équation du troisième ordre

$$x''' = f(t, x, x', x'') \tag{2.4}$$

s'appliquent de façon évidente les théorèmes 3 et 4, mais outre cela on a dans ce cas le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Si la fonction $f(t, x_0, x_1, x_2)$ définie et continue dans l'ensemble D: $a \leqslant t \leqslant b$, $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 0, 1, 2)$ satisfait dans cet ensemble à l'inégalité*

$$|f(t, x_0, x_1, x_2)| \leqslant M + P_0|x_0| + P_1|x_1| + P_2|x_2|$$

où les constantes $h = b - a$ et P_0, P_1, P_2 sont telles que

$$P_2 h/4 + P_1 h^2/\pi^2 + P_0 h^3/2\pi^2 < 1 , \tag{2.5}$$

pour tout système de trois points $(t_1, r_1), (t_2, r_2), (t_3, r_3)$ $(a \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant b)$ l'équation (2.4) admet dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ au moins une solution $x(t)$ telle que $x(t_1) = r_1, x(t_2) = r_2, x(t_3) = r_3$.

Si la fonction $f(t, x_0, x_1, x_2)$ satisfait dans D à la condition de Lipschitz par rapport aux variables x_0, x_1, x_2 avec les constantes P_0, P_1 et P_2, cette solution est unique.

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement du théorème 1 et du fait, démontré par A. Lasota [11], que pour toute équation linéaire homogène du troisième ordre

$$x''' = p_2(t)x'' + p_1(t)x' + p_0(t)x$$

dont les coefficients $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ sont continus dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ et bornés par les constantes P_0, P_1, P_2 satisfaisant à l'inégalité (2.5), toute solution qui s'annule trois fois dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ est identiquement nulle. La seconde partie du théorème est une conséquence du théorème 2.

5. Passons enfin aux équations du second ordre. Pour une équation linéaire homogène

$$x'' = p_1(t)x' + p_0(t)x \tag{2.6}$$

à coefficients continus dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ posons

$$2m = \max_{\langle a,b\rangle} |p_1(t)|, \qquad k = \max_{\langle a,b\rangle} |p_0(t)| .$$

De la Vallée Poussin [21] a démontré que toute solution de l'équation (2.6) qui s'annule en deux points de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ est identiquement nulle pourvu que l'on ait

$$b-a<2\int_{0}^{\infty}\frac{du}{u^2+2mu+k}\,. \tag{2.7}$$

Dans le cas où $m>0$ on peut remplacer dans cette inégalité le signe de l'inégalité forte par celui de l'inégalité faible et l'évaluation de la longueur de l'intervalle $\langle a,b\rangle$ est la meilleure possible. Il en résulte immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Si la fonction $f(t,x_0,x_1)$ continue dans l'ensemble $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<x_0<+\infty$, $-\infty<x_1<+\infty$, satisfait dans cet ensemble à l'inégalité*

$$|f(t,x_0,x_1)|\leqslant M+k|x_0|+2m|x_1|$$

où les constantes m et k sont choisies de façon à satisfaire à l'inégalité (2.7), *pour tout couple de points $(t_1,r_1),(t_2,r_2)$ $(a\leqslant t_1<t_2\leqslant b)$ l'équation*

$$x''=f(t,x,x') \tag{2.8}$$

admet au moins une solution $x(t)$ telle que

$$x(t_1)=r_1,\qquad x(t_2)=r_2\,. \tag{2.9}$$

Si la fonction $f(t,x_0,x_1)$ est lipschitzienne par rapport aux variables x_0 et x_1 avec les constantes k et $2m$, cette solution est unique.

Il est à remarquer que l'intégrale qui figure au second membre de l'inégalité (2.7) se calcule explicitement, mais la formule qu'on en obtient est assez compliquée. C'est pour cela qu'il est souvent plus commode de remplacer (2.7) par une inégalité moins précise mais beaucoup plus simple (voir Z. Opial [18])

$$4m(b-a)+k(b-a)^2<\pi^2\,.$$

6. Z. Opial [18] a démontré que si l'on a l'inégalité

$$\sqrt{2}\max_{\langle a,b\rangle}\sqrt{(t-a)(b-t)}|p_1(t)|+\max_{\langle a,b\rangle}(t-a)(b-t)|p_0(t)|<2\,,$$

toute solution de l'équation (2.6) qui s'annule en deux points de l'intervalle $\langle a,b\rangle$ est identiquement nulle. De la même façon que dans les cas précédents on en tire immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Si la fonction $f(t,x_0,x_1)$ continue dans l'ensemble $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<x_0<+\infty$, $-\infty<x_1<+\infty$, satisfait dans cet ensemble à l'inégalité*

$$|f(t,x_0,x_1)|\leqslant M+P_0(t)|x_0|+P_1(t)|x_1|$$

où les fonctions continues $P_0(t),P_1(t)$ remplissent la condition

$$\sqrt{2}\max_{\langle a,b\rangle}\sqrt{(t-a)(b-t)}P_1(t)+\max(t-a)(b-t)P_0(t)<2\,,$$

pour tout couple de points $(t_1, r_1), (t_2, r_2)$ $(a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b)$ *l'équation* (2.8) *admet au moins une solution satisfaisant aux conditions* (2.9).

Si la fonction $f(t, x_0, x_1)$ *satisfait à la condition de Lipschitz*

$$|f(t, x_0', x_1') - f(t, x_0, x_1)| \leqslant P_0(t)|x_0' - x_0| + P_1(t)|x_1' - x_1|,$$

cette solution est unique.

3. Remarques complémentaires

1. Dans l'énoncé du théorème 1 encore un point obscur reste à élucider. On y suppose que le second membre de l'équation (0.3), la fonction $f(t, x_0, \ldots, x_{n-1})$, satisfait à l'inégalité (1.3) et on y ajoute l'hypothèse que pour l'équation homogène (1.1) le problème d'interpolation homogène (1.2) n'a que la solution identiquement nulle toutes les fois que les coefficients de cette équation satisfont aux inégalités (1.4). Or, pour obtenir les seconds membres de ces inégalités on augmente d'un ε positif les coefficients correspondants du second membre de l'inégalité (1.3) ce qui peut paraître bizarre et nullement nécessaire. Nous allons montrer que, au contraire, la constante ε joue un rôle décisif et sans elle le théorème 1 serait faux.

En effet, envisageons l'équation du second ordre

$$x'' + 2|x'| + |x| = 0. \tag{3.1}$$

La fonction $f(t, x_0, x_1) = -|x_0| - 2|x_1|$ satisfait de façon évidente à l'inégalité

$$|f(t, x_0, x_1)| \leqslant 1|x_0| + 2|x_1|.$$

Aux équations linéaires homogènes

$$x'' = p_1(t)x' + p_0(t)x \tag{3.2}$$

à coefficients continus et tels que

$$|p_0(t)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |p_1(t)| \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$$

appliquons le théorème de de la Vallée Poussin cité dans le n° 5 du paragraphe précédent. Pour $m = k = 1$ il en résulte que toute solution $x(t)$ d'une équation (3.2) satisfaisant aux conditions aux limites

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(2) = 0 \tag{3.3}$$

s'annule identiquement dans l'intervalle $\langle 0, 2\rangle$. D'autre part, il est aisé de vérifier que la fonction

$$x(t) = \begin{cases} Cte^{-t} & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ C(2-t)e^{t-2} & \text{pour} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases} \tag{3.4}$$

est une solution de l'équation (3.1) satisfaisant aux conditions

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = C \quad \text{et} \quad x(2) = 0 .$$

Le second membre de l'équation (3.1) est lipschitzien en x_0, x_1, on a donc l'unicité des solutions, et, par conséquent, toute solution $x(t)$ qui s'annulle pour $t = 0$ est forcément de la forme (3.4) et s'annule aussi pour $t = 2$. Donc, aucune solution $x(t)$ de l'équation (3.1) ne peut satisfaire aux conditions aux limites suivantes

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(2) = 1 . \tag{3.5}$$

En résumé, le problème (3.1), (3.5) n'admet pas de solution bien que toutes les solutions du problème linéaire homogène (3.2), (3.3) soient identiquement nulles.

2. Il est souvent commode de parer à cet inconvénient en énonçant le théorème 1 sous une forme un peu différente.

THÉORÈME 8. *Supposons que la fonction $f(t, x_0, \dots, x_{n-1})$ satisfasse dans l'ensemble D à l'inégalité*

$$|f(t, x_0, \dots, x^{n-1})| \leqslant M + \sum_{i=0}^{n-1} P_i|x_i| \tag{3.6}$$

où M est une constante non-négative et les constantes $P_0, \dots, P_{n-1}$ sont supposées positives. Admettons en plus que, quelles que soient les fonctions continues $p_0(t), \dots, p_{n-1}(t)$ remplissant les conditions

$$|p_0(t)| \leqslant P_0, \quad \dots, \quad |p_{n-1}(t)| \leqslant P_{n-1}$$

et la suite de points $t_1, \dots, t_n$ $(a < t_1 < \dots < t_n < b)$, le problème linéaire homogène (1.1), (1.2) *n'admette que la solution identiquement nulle.*

Dans ces hypothèses pour tout système de points $(t_1, r_1), \dots, (t_n, r_n)$ $(a < t_1 < \dots < t_n < b)$ il existe au moins une solution de l'équation (0.3) *satisfaisant aux conditions* (0.4).

Le théorème 8 diffère du théorème 1 en ce qu'on y suppose l'unicité de solutions du problème linéaire homogène (1.1), (1.2) non pas pour un système particulier de points $t_1, \dots, t_n$, mais pour tout système de n points de l'intervalle (a, b) et en ce qu'on envisage l'intervalle ouvert. En revanche, les constantes de majoration $P_0, \dots, P_{n-1}$ sont les mêmes pour la fonction $f(t, x_0, \dots, x_{n-1})$ et le problème linéaire (1.1), (1.2).

Démonstration du théorème 8. Soit $t_1, \dots, t_n$ une suite donnée de points $(a < t_1 < \dots < t_n < b)$. Nous allons montrer qu'il existe une solution $x(t)$ de l'équation (0.3) définie dans tout l'intervalle $\langle t_1, t_n \rangle$ et satisfaisant aux conditions (0.4). En vertu de l'inégalité (3.6) il est facile d'en déduire que cette solution est prolongeable sur tout l'intervalle (a, b).

Prenons deux nombres c et d tels que l'on ait $a < c < t_1$ et $t_n < d < b$, et désignons par $s(t)$ la fonction linéaire qui applique l'intervalle $\langle t_1, t_n \rangle$ sur l'intervalle $\langle c, d \rangle$. Posons

$$u = s(t) \quad \text{et} \quad y(u) = x\big(s^{-1}(u)\big)\,.$$

Par ce changement de variables de l'équation (0.3) avec les conditions aux limites (0.4), envisagée dans l'intervalle $\langle t_1, t_n \rangle$ on obtient l'équation

$$y^{(n)} = \frac{1}{q^n} f\big(s^{-1}(u), y, \ldots, y^{(n-1)}\big) \qquad (q = s'(t) > 1) \tag{3.7}$$

envisagée dans l'intervalle $\langle c, d \rangle$ avec les conditions

$$y\big(s(t_1)\big) = \ldots = y\big(s(t_n)\big) = 0 \qquad (c = s(t_1) < \ldots < s(t_n) = d)\,. \tag{3.8}$$

Il est évident que pour achever la démonstration du théorème il suffit d'établir l'existence d'une solution du problème (3.7), (3.8). Le second membre de l'équation (3.7) satisfait, en vertu de (3.6), à l'inégalité

$$\left| \frac{1}{q^n} f\big(s^{-1}(u), y_0, q y_1, \ldots, q^{n-1} y_{n-1}\big) \right| \leqslant M + \sum_{i=0}^{n-1} P_i\, q^{i-n} |y_i|\,.$$

Les constantes $P_0 q^{-n}, \ldots, P_{n-1} q^{-1}$ sont plus petites que $P_0, \ldots, P_{n-1}$. Par l'hypothèse toute solution $y(u)$, définie dans l'intervalle (a, b), de l'équation linéaire

$$y^{(n)} = p_{n-1}(u) y^{(n-1)} + \ldots + p_0(u) y$$

à coefficients $p_0(u), \ldots, p_{n-1}(u)$ satisfaisant aux inégalités $|p_i(u)| \leqslant P_i$ $(i = 0, \ldots, n-1;\ a \leqslant u \leqslant b)$ et telle que l'on ait (3.8) est identiquement nulle. Il en est de même de toute solution de ce type de l'équation (3.9) envisagée seulement dans l'intervalle $\langle c, d \rangle$, vu la possibilité de prolonger les coefficients et les solutions de (3.9) sur tout l'intervalle $\langle a, b \rangle$. Donc, en vertu du théorème 1 appliqué au problème (3.7), (3.8), il en résulte l'existence d'une solution $y(u)$ de ce problème, définie dans l'intervalle $\langle c, d \rangle$. De là, par la formule $x(t) = y\big(s(t)\big)$ on obtient une solution du problème (0.3), (0.4), définie dans l'intervalle $\langle t_1, t_n \rangle$, solution qui, comme nous avons déjà remarqué, est prolongeable sur tout l'intervalle (a, b).

Travaux cités

[1] O. Arama, *Problema bilocală şi teorema inegalităţilor diferenţiale cu noduri confundate a lui S. S. Ciaplîghin, pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi*, Studii şi Cercetări de Mat., Cluj, 9 (1958), pp. 7-38.

[2] — *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare*, ibidem 10 (1959), pp. 207-257.

[3] M. Biernacki, *Sur un problème d'interpolation relatif aux équations différentielles linéaires*, Ann. Soc. Pol. Math. 20 (1947), pp. 169-214.

[4] R. Caccioppoli, *Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti*, Rend. Acad. Naz. Lincei, Ser. VI, 13 (1931), pp. 498-502.

[5] S. Cinquini, *Sopra il problema di Nicoletti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, Ann. Scuola Sup. Norm. Pisa, Ser. II, 10 (1941), pp. 127-138.

[6] R. Conti, *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires*, Math. Nachr. 23 (1961), pp. 161-178.

[7] C. Foiaş, G. Gussi, V. Poenaru, *Despre problema polilocală la ecuaţii diferenţiale lineare de ordinul al doilea*, Bul. Ştiint. Acad. R.P.R. 7 (1955), pp. 699-721.

[8] Ph. Hartman, A. Wintner, *On an oscillation criterion of de la Vallée Poussin*, Quart. Applied Math. 13 (1955), pp. 330-332.

[9] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[10] A. Lasota, *Sur la distance entre les zéros de l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), pp. 129-132.

[11] — *Sur les problèmes linéaires aux limites pour un système d'équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série des sci. math., astr. et phys. 10 (1962), pp. 565-570.

[12] —, Z. Opial, *Sur un problème d'interpolation pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre n*, ibidem 9 (1961), pp. 667-671.

[13] А. Ю. Левин, *О многоточечной краевой задаче*, Научные Доклады Высшей Школы 1958, нр. 5, pp. 34-37.

[14] — *О некоторых оценках дифференцируемой функции*, ДАН СССР 138 (1961), pp. 37-38.

[15] — *О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи*, ibidem 136 (1961), pp. 1022-1025.

[16] J. Mikusiński, *Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles linéaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 19 (1947), pp. 165-205.

[17] O. Nicoletti, *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*, Atti Acad. Sci. Torino 33 (1897-98), pp. 746-759.

[18] Z. Opial, *Sur une inégalité de Ch. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), pp. 87-91.

[19] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte I, Bologna 1948.

[20] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), pp. 171-180.

[21] Ch. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre*, Journ. Math. Pures et Appl. 8 (1929), pp. 125-144.

[22] S. Zaidman, *Evaluări ale distanţei între zerourile soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale*, Revista Univ. C. I. Parhon, Bucureşti, 6-7 (1955), pp. 47-54.

[23] G. Zwirner, *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie di ordine n*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 12 (1941), pp. 114-122.

[24] — *Sopra il problema di Nicoletti per le equazioni differenziali ordinarie di ordine n*, Ann. Univ. Ferrara, Ser. VII, 1 (1950-51/1951-52), pp. 1-7.

Reçu par la Rédaction le 9. 11. 1962