COLLOQUIUM MATHEMATICUM

LI DÉDIÉ À M. STANISŁAW HARTMAN 1987

DISTRIBUTION DES VALEURS DES FONCTIONS ANALYTIQUES GAUSSIENNES

PAR

JEAN-PIERRE KAHANE (ORSAY)

À S. HARTMAN, EN SOUVENIR DE MONTPELLIER ET DE WROCŁAW, ET EN TÉMOIGNAGE DE MA FIDÈLE AMITIÉ

Introduction. Considérons trois sortes de séries de Taylor aléatoires:

$$\text{(R)} \qquad \sum_{0}^{\infty} \varepsilon_n a_n z^n,$$

$$\text{(S)} \qquad \sum_{0}^{\infty} e^{2\pi i \omega_n} a_n z^n,$$

$$\text{(g)} \qquad \sum_{0}^{\infty} Z_n a_n z^n$$

où z est une variable complexe dans le disque unité $\Delta = \{z;\ |z| < 1\}$, a_n des coefficients complexes donnés, les $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\omega)$ des variables aléatoires indépendantes prenant avec même probabilité $\frac{1}{2}$ les valeurs $+1$ et -1 (v. a. de Rademacher), les $\omega_n = \omega_n(\omega)$ des variables aléatoires indépendantes distribuées sur $[0, 1]$ selon la mesure de Lebesgue (v. a. de Steinhaus), et les $Z_n = Z_n(\omega)$ des variables aléatoires indépendantes gaussiennes complexes, d'espérance nulle et de variance 1 (nous dirons pour simplifier que Z_n est une v. a. normale, et que la suite (Z_n) est une suite normale). Les séries (S) ont été introduites par Steinhaus [7], les séries (R) par Paley et Zygmund [5], les séries (g) par Paley, Wiener et Zygmund [6], et on en connaît beaucoup de propriétés. Supposons $\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} = 1$. Alors chaque série (R), (S), (g) représente p.s. une fonction analytique dans le disque unité Δ et non prolongeable en dehors. Désignant cette fonction analytique aléatoire par $F(z, \omega)$, on peut s'interroger sur la distribution p.s. des valeurs de $F(z, \omega)$ quand z parcourt le disque unité Δ. Dans le cas (S), on a un bon résultat : si $\sum_{0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$, l'image du disque unité Δ par $F(z, \omega)$ est p. s. le plan $\boldsymbol{C}$ tout entier, chaque valeur est atteinte une infinité de fois et de plus le défaut (au sens de Nevanlinna) en tout point est zéro; cela a été établi en 1972 par Offord [4], et une nouvelle preuve très puissante en a été donnée par T. Murai en 1978 [2]; en fait, Murai démontre le même résultat lorsque

$$F(z, \omega) = f(z) + e^{2\pi i \omega} P(z),$$

$f(z)$ étant une fonction donnée, analytique dans le disque unité Δ et de caractéristique non bornée, et $P(z)$ un polynôme donné, le hasard n'intervenant que par la variable de Steinhaus $\omega \in [0, 1]$. Le cas gaussien (g) se ramène immédiatement au cas de Steinhaus (S). Le cas de Rademacher (R) est beaucoup plus difficile. Le résultat vaut encore si on suppose $\inf |a_n| > 0$ (T. Murai 1981 [3]) ou seulement $\inf\limits_{N \geq 2} \left(\frac{1}{\log N} \sum\limits_1^N |a_n|\right) > 0$ (M. Jakob et C. Offord 1983 [1]).

Enoncé des théorèmes 1 et 2. Dans le cas des séries (g), on peut obtenir des résultats plus précis, et c'est le premier but de cet article. Ces résultats sont d'ailleurs valables pour des fonctions analytiques gaussiennes plus générales, et c'est le second but. Enonçons ce qu'on va obtenir pour les séries (g). On suppose

$$\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = 1, \quad \sum_0^\infty |a_n|^2 = \infty. \tag{1}$$

On pose

$$\varrho(r) = \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} \quad (0 \leq r < 1). \tag{2}$$

Etant donné $b \in C$, on écrit $n(r, b, F)$ pour le nombre de zéros de $F(z) - b$ dans le disque $|z| < r$, et

$$N_\varepsilon(r, b, F) = \int_\varepsilon^r \frac{n(s, b, F)}{s} ds \quad (0 \leq \varepsilon < r < 1). \tag{3}$$

La formule de Jensen s'écrit

$$N_0(r, b, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{F(re^{it}) - b}{F(0) - b} \right| dt \tag{4}$$

sauf si $F(0) = b$. On suppose enfin que F est la fonction aléatoire définie par la série (g):

$$F(z, \omega) = \sum_0^\infty Z_n(\omega) a_n z^n \quad (z \in \Delta). \tag{5}$$

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses ci-dessus, les propriétés suivantes sont presque sûres*:

a) *l'image du disque unité Δ par $F(z, \omega)$ est le plan C entier, chaque valeur est prise une infinité de fois et le défaut en tout point est* 0;

b) *il existe une suite $r_n \to 1$ telle que, pour tout $b \in C$ on ait*

$$N_\varepsilon(r_k, b, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(r_k e^{it})|\,dt + O(1) \quad (\varepsilon > 0) \tag{6}$$

et de plus

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(N_\varepsilon(r_k, b, F) - \tfrac{1}{2}\log\varrho(r_k)) > -\infty. \tag{7}$$

La partie a) est un corollaire du théorème d'Offord 1972. Elle est conséquence de la partie b), qui exprime dans un sens très fort que tous les points de C sont recouverts de la même façon par les images des disques $|z| < r_k$; la démonstration montrera que toute suite r_k tendant vers 1 assez vite pour que la série $\sum(\varrho(r_k))^{-1/6} < \infty$ est convenable.

Rappelons qu'une fonction $f(z)$ analytique dans le disque unité Δ est de *caractéristique bornée*, ou de *classe* $\mathcal{N}$ (Nevanlinna) si

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{it})|\,dt = O(1) \quad (r \to 1).$$

Cela entraîne, d'après (4), que l'ensemble des zéros de f a la propriété suivante:

$(\mathcal{N}, \Delta)$: la somme de leurs distances à la frontière de Δ converge. Il en est de même pour l'ensemble $f^{-1}(b)$, quel que soit $b \in C$. Etant donné un ouvert G dans C homéomorphe à Δ on définit par transport conforme les fonctions de caractéristique bornée dans G, et nous dirons qu'un ensemble de points dans G est $(\mathcal{N}, G)$ ou non $(\mathcal{N}, G)$ suivant que l'ensemble image par une application conforme de G dans Δ vérifie la condition $(\mathcal{N}, \Delta)$ ou non.

L'hypothèse (1) entraîne que p.s. $F(z, \omega)$ n'est pas de classe $\mathcal{N}$, et le théorème 1 montre que p. s. la préimage de tout point $b \in C$ est un ensemble infini non-$\mathcal{N}$. On va étendre ce résultat à des ouverts G contenus dans Δ.

THÉORÈME 2. *Soit G un ouvert contenu dans le disque unité Δ, conformément équivalent à Δ et tel que les applications conformes de G dans Δ soient lipschitziennes. Etant donné une application conforme de Δ dans G, désignons par Γ_r l'image du cercle $|z| = r$, et par $d\theta$ l'image de la mesure $\dfrac{dt}{2\pi}$ $(z = re^{it})$. On a l'alternative suivante. Si*

$$\int_{\Gamma_r} \log\varrho(|z|)\,d\theta = O(1) \quad (r \to 1),$$

il est presque sûr que $F(z,\omega)$ est de caractéristique bornée dans G, et qu'en conséquence pour tout $b \in C$ la préimage de b est un ensemble $(\mathcal{N}, G)$. Si

$$\lim_{r \to 1} \int_{\Gamma_r} \log \varrho(|z|)\, d\theta = \infty \tag{8}$$

il est presque sûr que $F(z,\omega)$ n'est pas de caractéristique bornée dans G, et de plus que pour tout $b \in C$ la préimage de b est un ensemble infini non-$(\mathcal{N}, G)$.

On va généraliser le théorème 2. Cela va nous imposer de considérer des fonctions analytiques gaussiennes dans un ouvert G de C, ce que nous allons faire aussitôt.

Fonctions analytiques gaussiennes. On donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on suppose l'existence de suites normales. Le sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ engendré par une suite normale est un espace de Hilbert dont les éléments sont des v. a. gaussiennes complexes centrées. Nous appelons un tel espace "espace de Hilbert gaussien". A priori, on a deux définitions possibles pour des fonctions analytiques gaussiennes. G désigne toujours un ouvert de C.

Définition 1. Une *fonction analytique gaussienne* définie sur G est une application holomorphe de G dans $\mathcal{H}$, espace de Hilbert gaussien. Ainsi, pour tout $z \in G$, $F(z)$ appartient à $\mathcal{H}$, et la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = F'(z) \tag{9}$$

existe dans $\mathcal{H}$.

Définition 2. Une *fonction analytique gaussienne* définie sur G est une fonction de deux variables $(z,\omega) \rightsquigarrow F(z,\omega)$ $(z \in G, \omega \in \Omega)$ qui est analytique (en z) pour presque tout ω, et qui est gaussienne (en ω) dans le sens que les v. a. $\omega \rightsquigarrow F(z,\omega)$ appartiennent à un même espace de Hilbert gaussien $\mathcal{H}$.

La définition 2 diffère de la définition 1 en ce qu'on suppose que (9) a lieu p. s. partout, au lieu d'être une égalité dans $\mathcal{H}$. Il est clair qu'une fonction analytique gaussienne au sens de la définition 2 est analytique gaussienne au sens de la définition 1. La réciproque est essentiellement vraie: si on donne une fonction analytique gaussienne $F(z)$ au sens de la définition 1 (alors, pour chaque z, $F(z,\omega)$ n'est défini qu'à un ensemble de probabilité nulle près), il en existe une version $F(z,\omega)$ qui est analytique au sens de la définition 2.

Démontrons le. Soit (Z_n) une base de $\mathcal{H}$. Posons

$$\varphi_n(z) = \langle F(z), Z_n \rangle. \tag{10}$$

Il suit de (9) que $\varphi_n(z)$ est analytique sur G. De plus,

$$F(z) = \sum Z_n \varphi_n(z) \tag{11}$$

(égalité dans $\mathscr{H}$), et

$$\sum |\varphi_n(z)|^2 = E(|F(z)|^2) < \infty. \tag{12}$$

Posons

$$F(z, \omega) = \sum Z_n(\omega) \varphi_n(z). \tag{13}$$

D'après (12) et les conditions classiques de convergence d'une série aléatoire dans un espace de Hilbert, la série $\sum Z_n(\omega)\varphi_n(\cdot)$ converge p. s. dans $L^2(\gamma, ds)$ quelle que soit la courbe donnée $\gamma \subset G$, munie de la mesure d'arc ds. Il s'ensuit que la série (13) converge p. s. uniformément sur tout compact de G, et sa somme $F(z, \omega)$ (qui est une version de $F(z)$) vérifie bien la définition 2. En passant, nous avons trouvé une troisième définition, essentiellement équivalente aux définitions 1 et 2.

Définition 3. Une *fonction analytique gaussienne* définie sur G est une fonction de la forme (13), où les $\varphi_n(z)$ sont des fonctions analytiques sur G telles que $\sum |\varphi_n(z)|^2 < \infty$ en tout point $z \in G$, les $Z_n(\omega)$ forment une suite normale, et la convergence est p. s. uniforme sur tout compact.

Les propriétés presque sûres de $F(z, \omega)$ dépendent uniquement de la fonction de corrélation

$$\varrho(z, z') = E\big(F(z)\overline{F(z')}\big) = \sum \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z')} \tag{14}$$

(il s'agit là d'un fait général pour tous les processus gaussiens). On écrira

$$\varrho(z) = \varrho(z, z) = E(|F(z)|^2) = \sum |\varphi_n(z)|^2. \tag{15}$$

Les séries (g) correspondent à $\varphi_n(z) = a_n z^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

L'hypothèse (H). Dans la suite, nous ferons toujours l'hypothèse suivante:

(H): *il existe un $\gamma > 0$ et un compact $K \subset G$ tels que, quels que soient λ et μ complexes, et z et z' dans $G \setminus K$, on ait*

$$E(|\lambda F(z) + \mu F(z')|^2) \geqslant \gamma |z - z'|^2 (|\lambda|^2 + |\mu|^2). \tag{16}$$

Une forme équivalente de (H) est l'existence de γ et K tels que

$$\varrho(z)\varrho(z') - (\varrho(z, z'))^2 \geqslant \gamma |z - z'|^2 (\varrho(z) + \varrho(z')) \tag{17}$$

pour $z, z' \in G \setminus K$.

(H) exclut que, si $z \neq z'$ $(z, z' \in G \setminus K)$, les v. a. $F(z)$ et $F(z')$ soient proportionnelles, et aussi que, si $z \in G \setminus K$, la v. a. $F'(z)$ soit la v. a. nulle.

Supposons (1) et voyons dans quel cas la fonction F définie par (g) vérifie (H). On prend pour G le disque unité Δ. On a

$$E\left(|\lambda F(z)+\mu F(z')|^2\right)=\sum |a_n|^2\,|\lambda z^n+\mu z'^n|^2.$$

Si cette expression est nulle, on a $z^n z'^n = z^m z'^m$ dès que $a_n a_m \neq 0$, donc $z^p = z'^p$ si p est le plus grand commun diviseur des entiers $m-n$ tels que $a_n a_m \neq 0$. Donc (H) entraîne:

(H'): *les entiers $m-n$ tels que $a_n a_m \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.*

Inversement, supposons (H'). Si $z \neq z'$, on a $E\left(|\lambda F(z)+\mu F(z')|^2\right) \neq 0$. Choisissons n et m tels que $a_n a_m \neq 0$, et supposons pour simplifier $|a_n| \geqslant 1$, $|a_m| \geqslant 1$. Prenons $K = \{z;\ |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$, et z et z' dans $\Delta\setminus K$. On a

$$\begin{aligned}
E\left(|\lambda F(z)+\mu F(z')|^2\right) &\geqslant |\lambda z^n+\mu z'^n|^2+|\lambda z^m+\mu z'^m|^2\\
&\geqslant \tfrac{1}{2}\left(|\lambda z^n+\mu z'^n|+|\lambda z^m+\mu z'^m|\right)^2\\
&\geqslant \tfrac{1}{2}\left(|\lambda z^{n+m}+\mu z'^n z^m|+|\lambda z^{n+m}+\mu z'^m z^n|\right)^2\\
&\geqslant \tfrac{1}{2}|\mu|^2\,|z'^n z^m - z'^m z^n|
\end{aligned}$$

donc, pour un $\gamma_0 > 0$ convenable, on a

$$E\left(|\lambda F(z)+\mu F(z')|^2\right) \geqslant \gamma_0 |\mu|^2 |z'-z|$$

si $|z'-z| < \gamma_0$, et la même inégalité avec λ à la place de μ dans le second membre. Donc (16) a lieu quand $|z'-z| < \gamma_0$ (avec $\gamma = \frac{1}{2}\gamma_0$). Comme le premier membre est strictement positif sur le compact $|z'-z_0| \geqslant \gamma_0$, $z \in \overline{\Delta\setminus K}$, $|\lambda|^2+|\mu|^2 = 1$, (16) est valide (avec un $\gamma > 0$ assez petit) pour tout couple z, z' dans $\Delta\setminus K$.

Donc, lorsque F est définie par (g), les conditions (H) et (H') sont équivalentes.

Les hypothèses (H_j). Enoncés des théorèmes 3, 4, 5. On se bornera à des ouverts conformément équivalents au disque unité Δ. On supposera de plus, comme dans le théorème 2, que

(H_1): *les applications conformes de G dans Δ sont lipschitziennes.*

Cette condition est réalisée si G est convexe. De façon générale elle exprime que le complémentaire de G n'a pas de pointe saillante.

Une application conforme du disque Δ dans G étant fixée, les cercles $|z| = r$, munis de la mesure normalisée $\dfrac{dt}{2\pi}$ $(z = re^{it})$, sont transformés en courbes Γ_r, munies de la mesure $d\theta$. On fera toujours l'hypothèse

(H_2): $\displaystyle\lim_{z\in\Gamma_r,\, r\to 1} \varrho(z) > 0$

et dans certains cas l'hypothèse plus forte

$$(\mathrm{H}_3):\quad \lim_{z\in\Gamma_r, r\to 1} \varrho(z)=\infty.$$

Si l'on a (1) et que $F(z, \omega)$ est donnée par (5), on peut choisir $G=\Delta$; alors (H_3) a lieu. On peut aussi choisir $G\subset\Delta$; alors (H_2) a lieu, sauf si $a_0=0$ et $0\in\partial G$.

On désignera par $n(r, b, F)$ (G et l'application conforme étant sous-entendus) le nombre des zéros de $F(z,\omega)-b$ à l'intérieur de Γ_r, et $N_\varepsilon(r, b, F)$ est alors défini par la formule (3). On démontrera les théorèmes suivants.

Théorème 3. *Moyennant les hypothèses* (H), (H_1), (H_3), *il existe une suite $r_k\to 1$ telle que p. s. pour tout $b\in\boldsymbol{C}$ on ait*

$$N(r_k, b, F)=\int_{\Gamma_{r_k}}\log|F(z)|\,d\theta+O(1). \tag{18}$$

Théorème 4. *Moyennant les hypothèses* (H), (H_1), (H_2), *on peut associer à toute fonction $\varphi(r)$ définie sur $[0, 1[$ et tendant vers $+\infty$ quand $r\to 1$ une suite $r_k\to 1$ telle que p. s. pour tout $b\in\boldsymbol{C}$ on ait*

$$N(r_k, b, F)=\int_{\Gamma_{r_k}}\log|F(z)|\,d\theta+o\big(\varphi(r_k)\big). \tag{19}$$

La signification des formules (18) et (19) est précisée par la proposition que voici.

Proposition. *Pour toute suite $r_k\to 1$, on a p. s.*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{\Gamma_{r_k}}\log|F(z)|\,d\theta-\tfrac{1}{2}\int_{\Gamma_{r_k}}\log\varrho(z)\,d\theta>-\infty, \tag{20}$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\int_{\Gamma_{r_k}}\log|F(z)|\,d\theta-\tfrac{1}{2}\int_{\Gamma_{r_k}}\log\varrho(z)\,d\theta<\infty. \tag{21}$$

Désignons par (H_4) l'hypothèse

$$\lim_{r\to 1}\int_{\Gamma_r}\log\varrho(z)\,d\theta=\infty. \tag{22}$$

Théorème 5. *Moyennant les hypothèses* (H), (H_1), (H_2), *on a l'alternative suivante. Si* (H_4) *n'a pas lieu, il est presque sûr que $F(z,\omega)$ est de caractéristique bornée dans G, et donc que pour tout $b\in\boldsymbol{C}$ la préimage de b est un ensemble $(\mathscr{N}, G)$. Si* (H_4) *a lieu, il est presque sûr que $F(z,\omega)$ n'est pas de caractéristique bornée dans G, et de plus que pour tout $b\in\boldsymbol{C}$ la préimage de b est un ensemble infini non $(\mathscr{N}, G)$.*

Passons maintenant aux démonstrations.

Démonstration de la proposition. Rappelons que $\varrho(z) = E(|F(z)|^2)$. Posons

$$L(z) = \log|F(z)|^2 - \log\varrho(z),$$
$$M(r) = \int_{\Gamma_r} L(z)\,d\theta.$$

On a $E(e^{L(z)}) = 1$ et $E(L(z)) = -c$, constante absolue négative, donc $E(e^{M(r)}) \leqslant 1$ et $E(M(r)) = -c$. Etant donné $A > c$, on a

$$-AP(M(r) < -A) + E(M(r)1_{M(r)\geqslant -A}) \geqslant -c,$$
$$E(M(r)1_{M(r)\geqslant -A}) \leqslant \log E(\exp(M(r)1_{M(r)\geqslant -A})) \leqslant 0,$$

par conséquent

$$P(M(r) < -A) \leqslant \frac{c}{A}.$$

Dans l'autre sens, on a

$$P(M(r) > A) \leqslant e^{-A}.$$

Etant donné une suite $r_k \to 1$, il suit de là que la probabilité d'avoir $M(r_k) \geqslant -A$ pour une infinité de valeurs de k est supérieure ou égale à $1 - \frac{c}{A}$, et que la probabilité d'avoir $M(r_k) \leqslant A$ pour une infinité de valeurs de k est supérieure ou égale à $1 - e^{-A}$. Il est donc presque sûr que $\overline{\lim}_{k\to\infty} M(r_k) > -\infty$ et $\underline{\lim}_{r\to 1} M(r_k) < +\infty$, c'est-à-dire (20) et (21).

Un lemme sur variables gaussiennes. En vue de la démonstration des théorèmes 3 et 4 nous aurons besoin du lemme élémentaire que voici.

LEMME. *Supposons $Z_1 \in \mathscr{H}$, $Z_2 \in \mathscr{H}$ ($\mathscr{H}$ est comme toujours un espace de Hilbert gaussien), u réel et $b \in \mathbf{C}$. Alors*

$$(23)\qquad E(\exp(-u(|Z_1 - b|^2 + |Z_2 - b|^2)))$$
$$\leqslant \left((1 + uE(|Z_1|^2))(1 + uE(|Z_2|^2)) - u^2|E(Z_1\bar{Z}_2)|^2\right)^{-1}$$

et l'égalité a lieu pour $b = 0$.

Preuve. Quitte à changer b, Z_1 et Z_2 en des nombres proportionnels, on peut supposer $u = \frac{1}{2}$ et b réel. Posons $A = E(|Z_1|^2)$, $B = E(Z_1\bar{Z}_2)$, $C = E(|Z_2|^2)$, $Z_1 = X_1 + iY_1$, $Z_2 = X_2 + iY_2$, et désignons par $\Phi(b)$ le premier membre de (23). Ainsi

$$\Phi(b) = E\left[\exp\left(-\tfrac{1}{2}((X_1 - b)^2 + Y_1^2 + (X_2 - b)^2 + Y_2^2)\right)\right]$$

donc, par transformation de Fourier,

$$\Phi(b) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iiiint_{\mathbf{R}^4} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\xi_1^2+\eta_1^2+\xi_2^2+\eta_2^2)\right) \times$$
$$\times E\left[\exp\left(i(\xi_1(X_1-b)+\eta_1 Y_1+\xi_2(X_2-b)+\eta_2 Y_2)\right)\right] d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iiiint_{\mathbf{R}^4} \exp\left(-i(\xi_1+\xi_2)b\right) \times$$
$$\times \exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\xi_2^2+\eta_2^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+E\left((\xi_1 X_1+\eta_1 Y_1+\xi_2 X_2+\eta_2 Y_2)^2\right)\right)\right] d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2.$$

On voit que $\Phi(b) \leqslant \Phi(0)$. Reste à calculer $\Phi(0)$. Remarquons que, en écrivant $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$,

$$E\left((\xi_1 X_1+\eta_1 Y_1+\xi_2 X_2+\eta_2 Y_2)^2\right) = \tfrac{1}{2} E(|\zeta_1 Z_1+\zeta_2 Z_2|^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(A|\zeta_1|^2+2\mathrm{Re}(B\zeta_1\bar{\zeta}_2)+C|\zeta_2|^2).$$

Donc

$$\Phi(0)$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{\mathbf{C}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{A}{2}\right)|\zeta_1|^2+\mathrm{Re}(B\zeta_1\bar{\zeta}_2)+\left(1+\frac{C}{2}\right)|\zeta_2|^2\right)\right) d\sigma(\zeta_1)\, d\sigma(\zeta_2)$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire dans C, c'est-à-dire

$$\Phi(0) = \left(\left(1+\frac{A}{2}\right)\left(1+\frac{C}{2}\right)-\frac{1}{4}|B|^2\right)^{-1}$$

ce qui achève la preuve du lemme.

Démonstration des théorèmes 3 et 4. Sans restriction (grâce à l'hypothèse (H_1)) nous pouvons supposer $G = \Delta$ et prendre pour Γ_r le cercle $|z| = r$, avec $d\theta = \dfrac{dt}{2\pi}$. Quitte à diviser $F(z)$ par un monôme on peut aussi supposer que $F(0)$ n'est pas nul p. s. Ainsi, b étant fixé, on a $F(0) \neq b$ p. s. Appliquons la formule de Jensen (4), sous la forme

$$N(r, b, F) = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{it})| \frac{dt}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \frac{1}{|F(re^{it})-b|} \frac{dt}{2\pi} + O(1), \tag{24}$$

le terme d'erreur $O(1)$ étant borné quand $r \to 1$ (b et ω étant fixés, tels que

$F(0) \neq b$). Posons

$$I(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{it})| \frac{dt}{2\pi}, \tag{25}$$

$$I(r, b) = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \frac{1}{|F(re^{it}) - b|} \frac{dt}{2\pi}. \tag{26}$$

On va chercher à majorer $I(r, b)$.

Fixons un compact $B \subset C$ et posons

$$I^*(r) = \sup_{b \in B} I(r, b). \tag{27}$$

Pour majorer $I^*(r)$ il est commode d'introduire

$$J(u, r, b) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-u |F(re^{it}) - b|^2) \frac{dt}{2\pi} \qquad (u > 0) \tag{28}$$

et

$$J^*(u, r) = \sup_{b \in B} J(u, r, b). \tag{29}$$

Comme

$$\int_1^{\infty} e^{-ux} \frac{du}{u} \geqslant \frac{1}{e} \log^+ \frac{1}{x}$$

on a

$$I(r, b) \leqslant \frac{e}{2} \int_1^{\infty} J(u, r, b) \frac{du}{u}$$

et

$$I^*(r) \leqslant \frac{e}{2} \int_1^{\infty} J^*(u, r) \frac{du}{u}. \tag{30}$$

Il s'agit donc de majorer $J^*(u, r)$. Si $b = b(s)$ décrit un arc dont l'élément de longueur est ds, on a

$$\left| \frac{dJ(u, r, b(s))}{ds} \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} 2u |F(re^{it}) - b| \exp(-u |F(re^{it}) - b|^2) \frac{dt}{2\pi}$$

donc, tenant compte de l'inégalité $uve^{-uv^2} \leqslant e^{-1}\sqrt{u}$,

$$\left|\frac{dJ(u, r, b(s))}{ds}\right| \leqslant 2e^{-1}\sqrt{u}.$$

Comme $J(u, r, b) \leqslant 1$, il en résulte

(31) $$|J^2(u, r, b) - J^2(u, r, b')| \leqslant 4e^{-1}\sqrt{u}\,|b-b'|,$$

inégalité dont nous allons nous servir tout à l'heure.

Fixons maintenant $b \in B$ et cherchons à majorer $E(J^2(u, r, b))$. On a

$$E(J^2(u, r, b)) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E\left[\exp\left(-u\left(|F(re^{it})-b|^2 + |F(re^{is})-b|^2\right)\right)\right]\frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi}.$$

Appliquons le lemme (formule (23)) en utilisant les notations (14) et (15). On obtient

$$E(J^2(u, r, b)) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+u\varrho(re^{it})\right)\left(1+u\varrho(re^{is})\right) - u^2\varrho^2(re^{it}, re^{is})\right)^{-1}\frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi}.$$

Utilisant l'hypothèse (H),

$$E(J^2(u,r, b)) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(u\left(\varrho(re^{it})+\varrho(re^{is})\right)(1+u\gamma|t-s|^2)\right)^{-1}\frac{dt}{2\pi}\frac{ds}{2\pi}$$

$$\leqslant u^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\varrho(re^{it})\right)^{-1}\frac{dt}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+u\gamma t^2)^{-1}\frac{dt}{2\pi}$$

donc

(32) $$E(J^2(u, r, b)) \leqslant c(\gamma, r)\,u^{-3/2}$$

avec $c(\gamma, r) = O(1)$ $(r \to 1)$ dans l'hypothèse (H_2) et $c(\gamma, r) = o(1)$ $(r \to 1)$ dans l'hypothèse (H_3).

Etant donné $\varepsilon > 0$, soit $b_1, b_2, \ldots, b_N$ un ε-réseau dans B; ainsi tout point de b est à une distance $\leqslant \varepsilon$ d'un point b_j au moins. On peut supposer $N = O(\varepsilon^{-2})$. D'après (29), (31) et (32),

$$E\left((J^*(u, r))^2\right) \leqslant 4e^{-1}\varepsilon u + E\left(\sup_{1\leqslant j\leqslant N} J^2(u, r, bj)\right),$$

$$E\left(\sup_{1\leqslant j\leqslant N} J^2(u, r, b_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{N} E(J^2(u, r, b_j))^2 \leqslant Nc(\gamma, r)\,u^{-3/2}$$

donc, pour une constante absolue C convenable

$$E\big((J^*(u,r))^2\big) \leqslant C\big(\varepsilon u^{1/2} + c(\gamma,r)\varepsilon^{-2}u^{-3/2}\big).$$

En choisissant $\varepsilon = \big(c(\gamma,r)u^{-2}\big)^{1/3}$, on obtient

$$E\big((J^*(u,r))^2\big) \leqslant 2C\big(c(\gamma,r)\big)^{1/3}u^{-1/6}$$

et en conséquence

$$E\big(J^*(u,r)\big) \leqslant \sqrt{2C}\big(c(\gamma,r)\big)^{1/6}u^{-1/12}.$$

Utilisant (30), on a enfin la majoration souhaitée pour $I^*(r)$

$$E\big(I^*(r)\big) \leqslant C'\big(c(\gamma,r)\big)^{1/6}. \tag{33}$$

Supposons d'abord (H_3), donc $c(\gamma,r) = o(1)$ $(r \to 1)$. On peut choisir une suite $r_k \to 1$ telle que $\sum_1^\infty \big(c(\gamma,r_k)\big)^{1/6} < \infty$. D'après (33) on a $E\big(\sum_1^\infty I^*(r_k)\big) < \infty$, donc la suite $I^*(r_k)$ tend vers 0 p. s. En recouvrant C par une réunion dénombrable de compacts, on voit que

$$\sup_{b\in C} I(r_k, b) = o(1) \quad \text{p. s.} \tag{34}$$

donc, en revenant à (24), (25), (26), on a p. s. pour tout b

$$N(r_k, b, F) = I(r_k) - I(r_k, 0) + O(1)$$

ce qui est (18), la conclusion du théorème 3.

Supposons maintenant (H_2), donc $c(\gamma,r) = O(1)$ $(r \to 1)$. Etant donné $\varphi(r)$, on choisit les r_k de façon que $\sum_1^\infty \big(1/\varphi(r_k)\big) < \infty$. Il en résulte $I^*(r_k) = o\big(\varphi(r_k)\big)$ p. s., par le même procédé que ci-dessus. Au lieu de (34), on a

$$\sup_{b\in C} I(r_k, b) = o\big(\varphi(r_k)\big) \quad \text{p. s.} \tag{35}$$

d'où (19), la conclusion du théorème 4.

Démonstration des théorèmes 1, 2 et 5. Pour démontrer les théorèmes 1 et 2, on peut (quitte à diviser $F(z,\omega)$ par un monôme z^ν) supposer $a_0 \neq 0$, et on peut aussi (quitte à remplacer $F(z,\omega)$ par $F(z^{1/\varkappa},\omega)$) supposer que les entiers n tels que $a_n \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Ainsi l'hypothèse (H′) est réalisée, et on a vu qu'elle entraîne (H) lorsque G est le disque unité Δ (cas du théorème 1). A fortiori (H′) entraîne (H) si G est une partie de Δ (cas du théorème 2).

Les hypothèses du théorème 1 entraînent celles du théorème 3, avec $G = \Delta$. En effet, la fonction $\varrho(z)$ de (15) s'écrit $\varrho(r)$ dans la notation (2), et l'hypothèse (1) entraîne (H_3). On s'est ramené au cas où (H) a lieu, et (H_1) est évident. Le théorème 3 s'applique, et (19) donne (6). La proposition s'applique également, et (20) donne (7).

La première partie du théorème 5 vient de la formule (21) (proposition 4) et la seconde de (19) (théorème 4). Enfin, comme on s'est ramené au cas où (H) a lieu, le théorème 2 est un cas particulier du théorème 5.

Le théorème 2 suggère un problème, sans doute difficile. Sous les hypothèses du théorème 1, est-il presque sûr que $F(z, \omega)$ prenne toute valeur complexe dans tout ouvert G convexe vérifiant (8)? **(P 1295)**

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Jakob and A. C. Offord, *The distribution of the values of a random power series in the unit disk*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A 94 (1983), p. 251–263.

[2] T. Murai, *Une remarque sur la distribution des valeurs des séries de Taylor aléatoires*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série A–B 287 (1978), p. 931–934.

[3] –, *Value distribution of random Taylor series in the unit disk*, The Journal of the London Mathematical Society 24 (1981), p. 480–494.

[4] A. C. Offord, *The distribution of the values of a random function in the unit disk*, Studia Mathematica 41 (1972), p. 71–106.

[5] R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, *Some series of functions* (3), Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 28 (1932), p. 190–205.

[6] –, N. Wiener and A. Zygmund, *Notes on random functions*, Mathematische Zeitschrift 37 (1932), p. 647–668.

[7] H. Steinhaus, *Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürlich Grenze ist*, ibidem 31 (1930), p. 408–416.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (BÂT. 425)
91405 ORSAY CEDEX

Reçu par la Rédaction le 15. 03. 1984