ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXX (1974)

Двухточечная краевая задача для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с отклоняющимся аргументом

Юзеф Калиновски (Катовице)

Содержание. В этой работе, в теореме 1, доказано, что при некоторых предположениях существует единственное решение двухточечной краевой задачи

$$x(t_1) = r_1; \quad x(t_2) = r_2$$

для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся в интервале $[t_1, t_2]$ аргументом

$$x''(t) = f\big(t, x(w(t)), x'(v(t))\big).$$

В теореме 2 указано, что при более слабых предположениях, чем в теореме 1, можно получить аналогичную теорему для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)).$$

Из доказательств следует метод вычислительного решения этих задач. Результаты этой работы совпадают с выводами работы [1].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с отклоняющимся аргументом

$$x''(t) = f\big(t, x(w(t)), x'(v(t))\big), \quad t \in [t_1, t_2] \tag{1}$$

с двухточечным граничным условием

$$x(t_1) = r_1, \quad x(t_2) = r_2, \quad x, r_1, r_2 \in \boldsymbol{R}^m. \tag{2}$$

Предположим, что

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

непрерывная вектор-функция типа

$$f: [t_1, t_2] \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m \tag{3}$$

и непрерывные функции $w(t)$, $v(t)$, отклоняющие аргумент, типа

$$\begin{aligned} w &: [t_1, t_2] \to [t_1, t_2], \\ v &: [t_1, t_2] \to [t_1, t_2]. \end{aligned} \tag{4}$$

Двухточёчная краевая задача (1), (2) будет разрешена методом последовательных приближений. Доказательство теоремы сделает возможным применение счетных машин для численного решения этой задачи.

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условию* (3) *и условию Липшица относительно x, y*

$$\|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, x, y)\| \leqslant p\,\|\bar{x} - x\| + q\,\|\bar{y} - y\| \tag{5}$$

с постоянными Липшица $p, q \in [0, \infty)$ столь малыми, что

$$(t_2 - t_1)^2 p + (t_2 - t_1) q < \tfrac{1}{2}, \tag{6}$$

и пусть функции w, v удовлетворяют условию (4).

Тогда двухточечная краевая задача (1), (2) *имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ единственное решение $x(t)$ и последовательность* (7) *сходится к этому решению.*

Замечание 1. *В этой работе символ $\|\cdot\|$ может обозначать любую норму в пространстве $\boldsymbol{R}^m$.*

Доказательство. Пусть $x_0 : [t_1, t_2] \to \boldsymbol{R}^m$ произвольная дифференцируемая функция на отрезке $[t_1, t_2]$. Построим последовательность функции $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n(t) = \int_{t_1}^{t} \Big[\int_{t_1}^{s} f\big(u, x_{n-1}(w(u)), x'_{n-1}(v(u))\big) du + A_{n-1} \Big] ds + r_1, \tag{7}$$

где вектор A_{n-1}, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежит пространству $\boldsymbol{R}^m$ и определяется формулой

$$A_{n-1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \Big\{ r_2 - r_1 - \int_{1}^{t_2} \Big[\int_{t_1}^{s} f\big(u, x_{n-1}(w(u)), x'_{n-1}(v(u))\big) du \Big] ds \Big\}. \tag{8}$$

Тогда

$$x'_n(t) = \int_{t_1}^{t} f\big(u, x_{n-1}(w(u)), x_{n-1}(w(u))\big) du + A_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Векторы A_{n-1} определены так, что функции $x_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют граничному условию (2). Покажем сходимость координат последовательности векторов (8) и равномерную сходимость последовательностей (7) и (9). При этом заметим, что

$$\|A_n - A_{n-1}\| \leqslant (t_2 - t_1) B_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где

$$B_n = \max_{u \in [t_1, t_2]} p\,\|x_n(u) - x_{n-1}(u)\| + \max_{u \in [t_1, t_2]} q\,\|x'_n(u) - x'_{n-1}(u)\|, \tag{11}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

что следует из формулы (8) и условий (4) и (5). Используя (7) и (10), можно оценить

$$\|x_n(t)-x_{n-1}(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{u\in[t_1,t_2]}\left\|f\big(u,\, x_{n-1}(w(u)),\, x'_{n-1}(v(u))\big)-f\big(u,\, x_{n-2}(w(u)),\, x'_{n-2}(v(u))\big)\right\|(t_2-t_1)^2+$$

$$+(t_2-t_1)\cdot\|A_{n-1}-A_{n-2}\| \leqslant$$

$$\leqslant (t_2-t_1)^2\Big[\max_{u\in[t_1,t_2]} p\left\|x_{n-1}(w(u))-x_{n-2}(w(u))\right\|+$$

$$+\max_{u\in[t_1,t_2]} q\left\|x'_{n-1}(v(u))-x'_{n-2}(v(u))\right\|\Big]+(t_2-t_1)^2B_{n-1}\leqslant$$

$$\leqslant (t_2-t_1)^2\Big[\max_{u\in[t_1,t_2]} p\,\|x_{n-1}(u)-x_{n-2}(u)\|+$$

$$+\max_{u\in[t_1,t_2]} q\,\|x'_{n-1}(u)-x'_{n-2}(u)\|\Big]+(t_2-t_1)^2B_{n-1} =$$

$$= 2(t_2-t_1)^2B_{n-1}.$$

Отсюда

$$\|x_n(t)-x_{n-1}(t)\| \leqslant 2(t_2-t_1)^2B_{n-1}. \tag{12}$$

Подобным образом

$$\|x'_n(t)-x'_{n-1}(t)\| \leqslant 2(t_2-t_1)B_{n-1}.$$

Из (11) следует, что

$$B_n \leqslant 2\,[p(t_2-t_1)^2+q(t_2-t_1)]\,B_{n-1}. \tag{13}$$

В силу (6) существует константа C, $0<C<1$, удовлетворяющая неравенству

$$B_n \leqslant C^nB_0, \qquad n=1,2,\ldots,$$

и потому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ является сходящимся рядом. Отсюда получаем равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}[x_n(t)-x_{n-1}(t)] \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}[x'_n(t)-x'_{n-1}(t)]$$

на отрезке $[t_1, t_2]$.

Из этого следует, что ряд

$$x_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[x_n(t)-x_{n-1}(t)] = x(t)$$

равномерно сходится на отрезке $[t_1, t_2]$. Следовательно

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

также равномерно и потому функция $x(t)$ является непрерывной на отрезке $[t_1, t_2]$. Из неравенства (10) вытекает сходимость координат последовательности векторов $\{A_n\}$ к соответственным координатам некоторого вектора A. Покажем, что функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2). Так как $\{x_n\}$ равномерно сходится на отрезке $[t_1, t_2]$, то в равенствах (7) и (8) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Мы получим равенства

$$A = \frac{1}{t_2-t_1}\Big\{r_2-r_1-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\int_{t_1}^{s} f\big(u, x(w(u)), x'(v(u))\big)du\Big]ds\Big\}, \tag{14}$$

$$x(t) = \int_{t_1}^{t}\Big[\int_{t_1}^{s} f\big(u, x(w(u)), x'(v(u))\big)du+A\Big]ds+r_1. \tag{15}$$

Система уравнений (14), (15) эквивалентна системе (1), (2). Функция $x(t)$ из системы (14), (15) удовлетворяет граничному условию (2), потому что из равномерной сходимости на отрезке $[t_1, t_2]$ последовательности $\{x_n\}$ следует сходимость на концах этого отрезка.

Теперь нужно доказать единственность решения задачи (1), (2). Пусть $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ два разные решения задачи (1), (2). Обозначим

$$D = \max_{u\in[t_1,t_2]} [p\|x(u)-\bar{x}(u)\|+q\|x'(u)-\bar{x}'(u)\|].$$

Формула (15) влечет за собой

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| \leqslant 2(t_2-t_1)^2D,$$

$$\|x'(t)-\bar{x}'(t)\| \leqslant 2(t_2-t_1)D.$$

Отсюда мы получили

$$D\leqslant 2[(t_2-t_1)^2p+(t_2-t_1)q]D,$$

а это противоречит предположению $x(t)\neq\bar{x}(t)$ для $t\in[t_1, t_2]$. И так, теорема 1 доказана.

Замечание 2. *Из доказательства следует, что при $p>0$ скорость сходимости определяется с помощью формулы*

$$\|x_n(t)-x(t)\|\leqslant\frac{B_0\cdot C^n}{p(1-C)},$$

где

$$C = 2p(t_2-t_1)^2+2q(t_2-t_1).$$

Аналогично вышеуказанному доказательству, применяя $w(t) = t$, $v(t) = t$, можно доказать при более слабых предположениях теорему о существовании и единственности решения двухточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условию* (3) *и условию Липшица относительно x, y*

$$\|f(t,\bar{x},\bar{y})-f(t,x,y)\|\leqslant p(t)\|\bar{x}-x\|+q(t)\|\bar{y}-y\|, \tag{16}$$

где $p(t)$, $q(t)$ неотрицательные вещественные функции, удовлетворяющие неравенству

$$\max_{u\in[t_1,t_2]}[p(u)(t_2-t_1)^2+q(u)(t_2-t_1)]<\tfrac{1}{2}. \tag{17}$$

Тогда на отрезке $[t_1,t_2]$ существует единственное и непрерывное решение уравнения

$$x''(t)=f\big(t,x(t),x'(t)\big), \tag{18}$$

удовлетворяющие условию (2). *Последовательность $x_n(t)$ определена формулой*

$$x_n(t)=\int_{t_1}^{t}\Big[\int_{t_1}^{s}f\big(u,x_{n-1}(u),x'_{n-1}(u)\big)du+A_{n-1}\Big]ds+r_1,\qquad n=1,2,\ldots,$$

где $x_0(t)$ — произвольная дифференцируемая функция на отрезке $[t_1,t_2]$ — сходится к этому решению.

Вектор A_{n-1} определен формулой

$$A_{n-1}=\frac{1}{t_2-t_1}\Big\{r_2-r_1-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\int_{t_1}^{s}f\big(u,x_{n-1}(u),x'_{n-1}(u)\big)du\Big]ds\Big\},$$

для $n=1,2,\ldots$

В случае $m=1$, заменяя символ $\|\cdot\|$ на $|\cdot|$, мы получим аналогичную теорему для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Процесс, определённый формулами (7), (8) и (9), можно использовать к вычислительному решению краевой задачи уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также и к некоторым типам уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с отклоняющимся аргументом.

Похожий процесс представленный в работе [1], можно применять только к вычислительному решению двухточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Кроме этого, итоги, полученные в этой работе, частично совпадают с результатами, находящимися в работе [1], о которой мы уже говорили. Там доказано сходимость последовательных приближений к решению задачи (18), (2) в случае $m=1$ при предположении, что такое решение существует. В предположениях теоремы 3 из работы [1] находится неравенства с постоянными p и q из условия (5). Одно из них, $q < 2$, необязательно должно быть исполнено. С другой стороны, для $q = 1$, $p = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{2}/2$ выполняют предположения теоремы 3 из работы [1], но эти константы не удовлетворяют условию (6) нашей теоремы. Поэтому теорема 2 данной работы в случае $m = 1$ частично дополняет результаты цитированной работы.

Литература

[1] Г. Ф. Алиев и Я. Д. Мамедов, *О сходимости некоторых итерационных процессов к решению краевой задачи*, Дифференциальные уравнения 8 (1972), стр. 871–880.

Reçu par la Rédaction le 31. 8. 1972